УДК 517.9

О. Ю. Теплінський

Відображення зсуву інтервалів як об'єднавчий підхід до вивчення динаміки ряду моделей дискретизованих електронних пристроїв

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

The dynamics of quasiperiodically driven interval translation mappings is presented and researched. Such mappings, on the one hand, generate simple and general enough discrete-time dynamical systems and, on another, detect common features of a group of mathematical models for widely used discretized electronic devices such as sigma-delta modulators and digital phase-locked loops.

Для опису багатьох поширених радіоелектронних пристроїв можуть бути використані математичні моделі, що мають вигляд нелінійних динамічних систем того чи іншого типу. Але головним напрямком у розвитку сучасних телекомунікацій є дискретизовані (зокрема, цифрові) системи, тобто такі, що продукують, передають і обробляють дискретні у часі (і часто "квантовані" за величиною) сигнали, у зв'язку з чим саме розривні динамічні системи з дискретним часом привертають в останні десятиліття найбільшу увагу як інженерів-теоретиків, так і практичних розробників електронних приладів. Серед особливостей цифрових систем — принципова неможливість їхньої лінеаризації: навіть у стаціонарному стані, якщо він у них є, вони схильні виявляти так званий джиттер (тобто дрижання) вихідного сигналу внаслідок дискретизації і квантування. Звичайно, метою розробників комерційного приладдя є зменшення рівня цього "квантизаційного шуму", але без надмірного ускладнення (а отже, подорожчання) відповідних елементарних блоків. Саме визначення оптимального співвідношення між складністю та ефективністю радіоелектронних пристроїв з елементами дискретизації вимагає ретельного вивчення динаміки відповідних математичних систем.

У цій роботі ми представляємо і досліджуємо математичну модель інтервального зсуву, керованого поворотом кола, яка, з одного боку, є досить простою і загальною розривною двовимірною динамічною системою з дискретним часом, а з іншого — виявляє суттєві спільні риси цілого ряду дискретизованих електронних пристроїв. Такими пристроями є, зокрема, сигма-дельта-модулятори ($\Sigma\Delta$) та системи фазового автопідлаштування частоти (ФАПЧ) з елементами дискретизації. Перші являють собою найбільш поширений зараз (внаслідок своєї відносної простоти) тип аналого-цифрових конверторів [1]. Другі, відомі також під назвою 'системи фазової синхронізації' (англ. phase-locked loops — PLL), що зараз широко застосовуються, наприклад, у мобільному зв'язку, були описані ще в 1980-ті роки [2, 3]. Існує багато різновидів як $\Sigma\Delta$, так і дискретизованих ФАПЧ, що відрізняються, зокрема, порядком складності електронної схеми, тобто кількістю наявних циклів зворотного зв'язку або інтеграторів, порядком частотних фільтрів тощо. Викладені тут нові результати безпосередньо застосовні до декількох найпростіших схем, зокрема тих, які описано в роботах [4–6], виконаних автором у співробітництві з групою ірландських інженерів на чолі з професором Орлою Філі (University College Dublin).

Спочатку ми введемо поняття інтервального зсуву на прямій і наведемо результат щодо граничної абсорбуючої множини для квазіперіодично керованого зсуву двох інтервалів з нерівномірним перекриттям. Потім покажемо, яким чином цей результат стосується динаміки електронних пристроїв $\Sigma\Delta$ та дискретизованих ФАПЧ.

1. Граничний абсорбуючий пояс для квазіперіодично керованого зсуву інтервалів. Зсув інтервалів — це розривне відображення певного, скінченного чи нескінченного, проміжку дійсної прямої $\mathbb{R}$ або кола в себе, яке полягає в його розбитті на скінченну кількість підпроміжків і жорсткому зсуві кожного з них на певну відстань. Інакше кажучи, це є одновимірне кусково-афінне відображення таке, що кутовий коефіцієнт кожного з його афінних кусків дорівнює 1. Зсув інтервалів є природним узагальненням перекладання відрізків (яке можна означити як взаємно однозначний зсув) — добре вивченого класу відображень, що породжує одновимірні динамічні системи з нетривіальними ергодичними властивостями, але без перемішування [7]. Динамічні властивості інтервальних зсувів є ще більш складними, і навіть питання про геометрію їхніх граничних множин у загальному вигляді є досить нетривіальним [8].

Поява зсуву інтервалів у моделях цифрової радіоелектроніки є насправді цілком природною. Схематично її можна пояснити таким чином. Моделями аналогових систем є, як правило, системи звичайних диференціальних рівнянь. Нехай перед нами найпростіший випадок — одновимірне автономне рівняння $\dot{x} = f(x)$ з неперервною правою частиною. У відповідній цифровій системі сигнал, по-перше, дискретизується за часом, тобто замість неперервної величини $x(t)$ розглядається послідовність її числових значень $x_n = x(t_n)$ в окремі моменти (такти) часу t_n, зазвичай рівнорозподілені. По-друге, вплив цього сигналу на себе через цикл зворотного зв'язку (а саме цей вплив описує функція $f(x)$), часто квантується, тобто права частина може приймати лише скінченний набір значень. У результаті, замість диференціального рівняння, записаного вище, з'являється різницеве рівняння вигляду $x_{n+1} = x_n + \overline{f}(x_n)$, де квантована функція $\overline{f}(x)$ є кусково-сталою. Відповідне відображення $x_n \mapsto x_{n+1}$, як легко зрозуміти, є нічим іншим як зсувом інтервалів.

Звичайно, більш реалістичні моделі містять не одну, а декілька незалежних змінних, значення яких мусять задовольняти певні фізичні обмеження, потерпають від випадкових збурень і залежать від кількох параметрів. Ми розглянемо лише одне з таких ускладнень, досить специфічне з математичної точки зору, але дуже природне в електроніці, а саме — квазіперіодичне керування, тобто наявність фазового (кутового) параметра θ, що змінюється незалежно від внутрішнього стану системи за законом повороту на певний кут ω (що припускається раціонально несумірним з 2π), тобто $\theta_{n+1} = \theta_n + \omega (\operatorname{mod} 2\pi)$. Таким природним квазіперіодичним керуванням є вхідний періодичний сигнал, частота якого несумірна з внутрішньою тактовою частотою системи.

Зауваження 1. Певне практичне значення має і розгляд резонансного випадку, тобто коли частота вхідного сигналу є раціонально сумірною з тактовою частотою системи, а отже, керування є не квазіперіодичним, а періодичним. Цей випадок потребує спеціального дослідження з огляду на специфічні властивості конкретних розглядуваних систем, що й було, зокрема, зроблено в роботах [4, 6]. З іншого боку, взяте навмання дійсне число є ірраціональним з імовірністю 1, тому випадок квазіперіодичного керування є основним за умови припущення, що вхідний сигнал не є корельованим із внутрішніми параметрами пристрою.

Розглянемо таке модельне відображення циліндра $\mathbb{S}_{2\pi} \times \mathbb{R}$ в себе:

$$F(\theta, x) = (\theta + \omega, f_{\theta+\omega}(x)), \tag{1}$$

де інтервальні зсуви на прямій $\mathbb{R}$ задаються виразами $f_\theta(x) = x + a(\theta) - b(\theta)\operatorname{sgn} x$, в яких функція знаку sgn набуває лише двох значень: $\operatorname{sgn} x = 1$ при $x \geqslant 0$ і $\operatorname{sgn} x = -1$ при $x < 0$, тоді як a та b — це певні дійсні функції на колі $\mathbb{S}_{2\pi}$, друга з яких вважається додатною (це забезпечує стійкість системи "на великих масштабах" відносно значень змінної x). Зауважимо, що відображення f_θ є зсувом двох інтервалів $(-\infty, 0)$ та $[0, +\infty)$, чиї образи перекриваються на ширину $2b(\theta)$, $\theta \in \mathbb{S}_{2\pi}$.

Траєкторії динамічної системи на циліндрі задаються ітераціями відображення (1):

$$(\theta_n, x_n) = F(\theta_{n-1}, x_{n-1}) = F^n(\theta_0, x_0) = F(F(\ldots F(\theta_0, x_0)\ldots)) \qquad (n \text{ разів}).$$

Основним результатом щодо цієї системи є доведення існування і єдиності так званого граничного поглинаючого (чи абсорбуючого) поясу — регіону спеціальної форми у фазовому просторі, всередину якого рано чи пізно потрапляють усі траєкторії.

Теорема 1. *Нехай число обертання $\omega/2\pi$ є ірраціональним, функції a та b неперервні, причому b строго додатна, і має місце нерівність*

$$\left|\int_0^{2\pi} a(\theta)\,d\theta\right| < \int_0^{2\pi} b(\theta)\,d\theta.$$

Тоді існує єдиний пояс $B = \{(\theta, x) | L(\theta) \leqslant x < U(\theta), \theta \in \mathbb{S}_{2\pi}\}$ з неперервними межами U та L, які задовольняють співвідношення $U(\theta) = \xi_{b(\theta)}(U(\theta - \omega)) + a(\theta)$, $L(\theta) = -\xi_{b(\theta)}(-L(\theta - \omega)) + a(\theta)$, $\theta \in \mathbb{S}_{2\pi}$, де $\xi_s(t) = \min\{t + s, \max\{t - s, s\}\}$. Цей пояс має такі властивості:

1) він є напівінваріантним, тобто $F(B) \subset B$;

2) його ширина $\Delta(\theta) = U(\theta) - L(\theta)$ знаходиться в межах перекриття образів проміжків, що зсуваються, тобто задовольняє нерівності

$$2 \min_{\nu \in \mathbb{S}_{2\pi}} b(\nu) \leqslant \Delta(\theta) \leqslant 2 \max_{\nu \in \mathbb{S}_{2\pi}} b(\nu), \qquad \theta \in \mathbb{S}_{2\pi};$$

3) він поглинає всі траєкторії в динамічній системі рівномірно на обмежених множинах початкових даних, тобто для кожного $C > 0$ існує таке натуральне $N = N(C)$, що з нерівності $|x_0| \leqslant C$ випливає включення $(\theta_n, x_n) \in B$ для всіх $n \geqslant N$, $\theta_0 \in \mathbb{S}_{2\pi}$;

4) межові контури U та L складаються з частин скінченної кількості кривих, заданих формулами $C_1^+ \colon x = a(\theta) + b(\theta)$, $C_n^+ = F(C_{n-1}^+)$, $n \geqslant 2$, та $C_1^- \colon x = a(\theta) - b(\theta)$, $C_n^- = F(C_{n-1}^-)$, $n \geqslant 2$, відповідно.

Ця теорема доводиться конструктивно шляхом побудови послідовності взаємно вкладених напівінваріантних поясів $B_n = \{(\theta, x) \mid L_n(\theta) \leqslant x < U_n(\theta), \theta \in \mathbb{S}_{2\pi}\}$ з неперервними межами, що задовольняють умову $F(B_n) \subset B_{n+1} \subset B_n$ для всіх $n \geqslant 1$, і доведення для граничного поясу $B = \lim\limits_{n \to \infty} B_n$ усіх зазначених властивостей (включаючи єдиність).

2. Застосування теорії інтервального зсуву до вивчення динаміки $\Sigma\Delta$ та ФАПЧ.

2.1. $\Sigma\Delta$ першого порядку та ФАПЧ типу "bang-bang". Найбільш безпосередньо наведена вище теорема застосовна до моделей таких електронних пристроїв, що розглядались у роботі [6]: однобітного $\Sigma\Delta$ першого порядку з дискретним часом з періодичним вхідним сигналом; аналогічного $\Sigma\Delta$ з неперервним часом; ФАПЧ типу "bang-bang" (BB-PLL, див. [9]) з частотно-модульованим (FM) вхідним сигналом. Як пояснено в [6], усі три моделі описуються відображенням (1) із зсувом вигляду $f_\theta(x) = x + a(\theta) - \operatorname{sgn} x$, де $a(\theta)$ — неперервна функція на колі $\mathbb{S}_{2\pi}$. Зауважимо, що фізичний зміст змінної x є різним для розглядуваних пристроїв: для $\Sigma\Delta$ вона виражає безпосереднє значення сигналу (тобто миттєву напругу), а для ФАПЧ — відхилення фази вихідного сигналу від вхідного. Особливістю даного випадку є сталість ширини перекриття: $b(\theta) \equiv 1$. Наслідком теореми 1 є існування та єдиність інваріантного (у сенсі $F(B) = B$) поглинаючого поясу B, межі якого задовольняють зазначені в теоремі співвідношення і є неперервними, а ширина є сталою: $\Delta(\theta) \equiv 2$. Динаміка всередині цього інваріантного поглинаючого поясу (якщо склеїти між собою його межі U та L) є еквівалентною до динаміки певного (визначеного конструктивним чином) косого зсуву [7] на двовимірному торі.

2.2. Цифрова ФАПЧ другого порядку з синусоїдальним вхідним сигналом. Математичне дослідження моделей ФАПЧ з неперервним та дискретним часом, що базується на класичній теорії динамічних систем, на сьогодні може бути проведено майже вичерпно (принаймні для систем низької розмірності) — див., наприклад, найновішу монографію польських дослідників [10]. Значно складнішим виявилося дослідження цифрових ФАПЧ, головна особливість яких — це квантування проміжного сигналу (що пояснювалось нами в п. 1), що призводить до необхідності розгляду динамічних систем з розривами, зокрема відображень зсуву інтервалів. Модель цифрової ФАПЧ другого порядку з синусоїдальним вхідним сигналом розглядалася і досліджувалася чисельно Ф. Гарднером у роботі [11]. Математичне обгрунтування його спостережень було проведено в [4, 5]. Система двох різницевих рівнянь, що описують дану модель, має вигляд

$$\phi_{n+1} = \phi_n + 2\frac{\pi\mu}{2^b} - 2\pi Q_b(C_1 \sin\phi_n + u_n) \bmod 2\pi, \tag{2}$$

$$u_{n+1} = u_n + C_2 \sin\phi_{n+1}. \tag{3}$$

Тут ϕ — відхилення фази вихідного сигналу від вхідного; u — певна внутрішня змінна системи (вихідний сигнал інтегратора); $\mu = m + \alpha$, де $m = [\mu]$, $\alpha \in (0, 1)$, — частота вхідного сигналу; C_1 і C_2 — додатні параметри; $Q_b(x) = 2^{-b}[2^b x]$ — це функція, що описує квантування сигналу на b-бітному регістрі; квадратні дужки позначають цілу частину. Зауважимо, що в реальних промислових приладах довжина регістра квантизатора коливається в межах від 24 до 64 біт [11].

У [5] виписано обмеження на величини параметрів C_1 і C_2, за яких усі траєкторії системи рано чи пізно потрапляють всередину напівінваріантного чотирикутника, що містить точку $(\phi = 0, u = 2^{-b})$, обмеженого кривими $u = 2^{-b}(m+1) - C_1 \sin(\phi + 2\pi \cdot 2^{-b}(1-\alpha)) + C_2 \sin\phi$ та $u = 2^{-b}(m+1) - C_1 \sin(\phi - 2\pi \cdot 2^{-b}\alpha) + C_2 \sin\phi$ з лівого та правого боків відповідно і певними (визначеними конструктивно) графіками згори та знизу. Якщо склеїти його ліву та праву межі, ототожнивши між собою пари точок, координати яких відрізняються на $2\pi/2^b$, і розтягнути кутову змінну в 2^b разів (тобто замінити ϕ на $\theta = 2^b\phi \bmod 2\pi$), ми перетворимо цей чотирикутник на напівінваріантний пояс B_1 з неперервними межами на циліндрі $\mathbb{S}_{2\pi} \times \mathbb{R}$, динаміка на якому, як можна переконатися, описується відображенням вигляду (1) з $\omega = 2\pi\alpha$ і квазіперіодично керованим зсувом двох інтервалів $f_\theta(x) = x + a(\theta) - b(\theta)\operatorname{sgn}(x - c(\theta))$. Відмінність одержаної динамічної системи від тої, що фігурує в теоремі 1, щоправда, полягає в наявності одного розриву першого роду в додаткового коефіцієнта $c(\theta)$. Але це ускладнення в даному випадку компенсується іншими властивостями системи (2), (3), які дозволяють довести аналог теореми 1 у подібний спосіб з аналогічним результатом: для ірраціонального μ існує єдиний напівінваріантний поглинаючий пояс з неперервними кусково-гладкими межами і шириною, що міститься в межах перекриття (у даному випадку між величинами

$C_2 \sin(2\pi/2^b)$ та $2C_2 \sin(\pi/2^b)$). Досить розгорнути цей пояс у початкову систему координат (ϕ, u), аби отримати оцінки на джиттер, які цікавлять інженера.

2.3. Цифрова ФАПЧ першого порядку з вхідним FM-сигналом. Динаміка цього електронного пристрою моделюється [12] відображенням $F(\theta, \phi) = (\theta+\omega, f_{\theta+\omega}(\phi))$ двовимірного тора $\mathbb{S}_{2\pi} \times \mathbb{S}_{2\pi}$ в себе, де зсув інтервалів (дуг) на колі задається як

$$f_\theta(\phi) = \phi + 2\pi(\mu + g(\theta))/2^b - 2\pi Q_b(C_1 \sin\phi) \bmod 2\pi, \qquad \phi \in \mathbb{S}_{2\pi}. \tag{4}$$

Тут ϕ, $\mu = m + \alpha$, Q_b, b та C_1 мають той самий зміст, що й у попередньому підпункті, але миттєва частота вхідного сигналу відхиляється від μ модулюючим періодичним сигналом $g(\theta)$ з частотою ω, при цьому змінна θ виражає його фазу. Ми вважатимемо, що $2\pi C_1 \in (0, 1)$ і що $2^b C_1$ не є цілим числом. Нехай $A = \max\limits_{\theta\in\mathbb{S}_{2\pi}} |g(\theta)|$ — амплітуда модулюючого сигналу.

Відображення (4) є зсувом не двох, а $4k_{\max} + 2$ інтервалів, де $k_{\max} = [2^b C_1]$, на які коло $\mathbb{S}_{2\pi}$ розбивається точками розриву $\sigma_k^+ = \arcsin(k/(2^b C_1))$ та $\sigma_k^- = \pi - \sigma_k^+$ для $|k| \leqslant k_{\max}$. Власне інтервали, що зсуваються, не залежать від параметра θ, але величина їхнього зсуву залежить від нього: зсув $f_\theta(\phi) = f_{k,\theta}(\phi) = \phi + c_k + 2\pi g(\theta)/2^b$, де $c_k = 2\pi(\mu - k)/2^b$, діє на інтервалах $\phi \in [\sigma_k^+, \sigma_{k+1}^+)$ та $\phi \in (\sigma_{k+1}^-, \sigma_k^-]$ для $-k_{\max} \leqslant k < k_{\max}$, на $\phi \in [\sigma_{k_{\max}}^+, \sigma_{k_{\max}}^-]$ для $k = k_{\max}$ і на $\phi \in (\sigma_{-k_{\max}}^-, \sigma_{-k_{\max}}^+)$ для $k = -k_{\max} - 1$.

Цікавим є лише той випадок, коли наша цифрова ФАПЧ здатна вловити сигнал при відсутній частотній модуляції ($A = 0$), а це відбувається тоді і лише тоді, коли набір величин зсувів $\{c_k\}_k$ містить як додатні, так і від'ємні значення, звідки випливають такі обмеження на частоту: $\mu \in (-k_{\max} - 1, k_{\max})$. При $A > 0$ варто виділити два крайніх значення індексу: $k^* = [\mu + A] + 1$ та $k_* = [\mu - A] + 1$. Їхній зміст у тому, що для кожного $\theta \in \mathbb{S}_{2\pi}$ при $k \geqslant k^*$ зсув $f_{k,\theta}$ відбувається на від'ємну величину, а при $k \leqslant k_*$ зсув $f_{k-1,\theta}$ відбувається на додатну величину. Неважко переконатися, що умова належності k^* та k_* до набору допустимих значень $|k| \leqslant k_{\max}$ відповідає такій умові на амплітуду модулюючого сигналу: $A < A_1 = \min\{k_{\max} + 1 + \mu, k_{\max} - \mu\}$. Ця умова виявилася майже достатньою для доведення наведеної нижче теореми, але певна особливість взаємного розташування інтервалів, що зсуваються, у випадку $\sigma_{k_{\max}}^- - \sigma_{k_{\max}}^+ < 2\pi/2^b$ вимагає зменшити A_1 на $\delta = 1 - 2^b(\sigma_{k_{\max}}^- - \sigma_{k_{\max}}^+)/(2\pi)$. Отже, покладемо $A_1^* = \min\{A_1, A_1 - \delta\}$.

Теорема 2. *Нехай амплітуда модулюючого сигналу задовольняє оцінку $A < A_1^*$. Тоді існує пояс $B = \{(\theta, \phi) \mid \phi \in [L(\theta), U(\theta))\} \subset \mathbb{S}_{2\pi} \times \mathbb{S}_{2\pi}$ сталої ширини $2\pi/2^b$ з неперервними межами, що є інваріантним відносно відображення F і поглинає всі траєкторії системи рівномірно за початковими значеннями. Цей інваріантний пояс міститься всередині напівінваріантного поясу $B_1 = \{(\theta, \phi) \mid \phi \in [f_{k_*,\theta}(\sigma_{k_*}^+), f_{k^*-1,\theta}(\sigma_{k^*}^+))\}$. Динаміка всередині B (зі склеєними межами U та L) є еквівалентною до динаміки косого зсуву на двовимірному торі.*

При доведенні цієї теореми спочатку прослідковується процес, за яким траєкторії рівномірно абсорбуються поясом B_1 (при цьому, зокрема, будується неперервний відштовхуючий контур $\phi = r(\theta)$ шляхом застосування аналогічної до доведення теореми 1 ітеративної процедури у зворотній бік, тобто до відображення, оберненого до F у певному сенсі; цей контур є межею між басейнами поглинання різних копій поясу B, зсунутих одна відносно одної уздовж кола на повний оберт). Решта доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 1. Оскільки всередині B_1 ширина всіх перекриттів при зсувах дорівнює $2\pi/2^b$, то діє додаткова умова сталої ширини перекриття, яка призводить до появи не лише напівінваріантного, а власне інваріантного поясу з динамікою косого зсуву на двовимірному торі аналогічно до випадку $\Sigma\Delta$ з підпункту 2.1.

Для зовсім малих значень амплітуди, які додатково до $A < A_1^*$ задовольняють умову $A < \min\{\alpha, 1-\alpha\}$, має місце рівність $k_* = k^*$, пояс B_1 має ширину $2\pi/2^b$, отже, $B = B_1$.

1. *Delta-Sigma* Data Converters: Theory, Design and Simulation / Ed. by S. R. Norsworthy, R. Schreier, G. C. Temes. – New York: IEEE Press, 1996. – 512 p.
2. *Цифровые* системы фазовой синхронизации / Под ред. М. И. Жодзишского. – Москва: Сов. радио, 1980. – 208 с.
3. *Системы* фазовой синхронизации с элементами дискретизации / Под ред. В. В. Шахгильдяна. – Москва: Радио и связь, 1989. – 318 с.
4. *Teplinsky A., Feely O., Rogers A.* Phase-jitter dynamics of digital phase-locked loops // IEEE Trans. Circuits and Systems. Part I. – 1999. – **46**, No 5. – P. 545–558.
5. *Teplinsky A., Feely O.* Phase-jitter dynamics of digital phase-locked loops. Part II // Ibid. – 2000. – **47**, No 4. – P. 458–472.
6. *Teplinsky A., Condon E., Feely O.* Driven interval shift dynamics in sigma-delta modulators and phase-locked loops // Ibid. – 2005. – **52**, No 6. – P. 1224–1235.
7. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – Москва: Наука, 1980. – 383 с.
8. *Boshernitzan M., Kornfeld I.* Interval translation mappings // Erg. Theory and Dyn. Sys. – 1995. – **15**. – P. 821–832.
9. *Walker R. C.* Designing bang-bang PLLs for clock and data recovery in serial data transmission systems // Phase-Locking in High-Performance Systems – From Devices to Architecture / Ed. B. Razavi. – New York: IEEE Press, 2003. – P. 34–45.
10. *Kudrewicz J., Wasowicz S.* Equations of phase-locked loops: Dynamics on circle, torus and cylinder. – Singapore: World Scientific, 2007. – 226 p.
11. *Gardner F. M.* Frequency granularity in digital phase-locked loops // IEEE Trans. Communs. – 1996. – **44**, No 6. – P. 749–758.
12. *Tertinek S., Teplinsky A., Feely O.* Phase jitter dynamics of first-order digital phase-locked loops with frequency-modulated input // Proc. of Intern. Symp. on Circuits and Systems, Seattle WA, USA, May, 2008. – P. 1544–1547.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 05.05.2008