УДК 517.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. А. Мартынюк**

О принципе сравнения для системы матричных дифференциальных уравнений

This paper presented a comparison principle for matrix differential equations. We employ the unified Liapunov's direct method via matrix-valued Liapunov functions and some differential inequalities.

Мотивом исследования матричных дифференциальных уравнений является их применение при моделировании некоторых процессов в теории оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории устойчивости движения и других областях прикладной математики. Одним из плодотворных методов качественной теории уравнений является обобщенный прямой метод Ляпунова на основе матричнозначных функций (см. [1–3] и приведенную там библиогр.).

Целью данной работы является формулировка основных теорем принципа сравнения для матричных дифференциальных уравнений на основе матричнозначной функции.

Предварительные сведения. Рассмотрим матричную систему уравнений

$$\frac{dX}{dt} = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и F — матричнозначная функция, обеспечивающая существование и единственность решения $X(t) = X(t; t_0, X_0)$ системы (1) на интервале $T_0 = [t_0, \infty)$, $t_0 \geqslant 0$, при $(t_0, X_0) \in T_0 \times N$, $N \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ — открытая связная область. Будем предполагать далее, что $F(t, X) = 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$, если $X = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Предположим, что каким-либо способом для системы (1) построена матричнозначная функция $U\colon T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$. Для значений $(t, X) \in T_0 \times N$ определим матричнозначные функции

$$D_-U(t, X) = \liminf\{[U(t + h, X + hF(t, X)) - U(t, X)]h^{-1}\colon h \to 0^-\}, \tag{2}$$

$$D^+U(t, X) = \limsup\{[U(t + h, X + hF(t, X)) - U(t, X)]h^{-1}\colon h \to 0^+\}, \tag{3}$$

которые являются нижней левой и верхней правой производной Дини матричнозначной функции $U(t, X)$ вдоль решений системы (1).

Заметим, что в качестве простейшей матричнозначной функции $U(t, X)$ может быть выбрана функция $U(t, X) = XX^T$, где $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. При этом выражения (2), (3) принимают вид $D_-U(t, X) = D^+U(t, X) = \dot U(X(t)) = X\dot X^T + \dot X X^T = XF^T(t, X) + F(t, X)X^T$, где $(^T)$ — знак транспонирования матрицы.

Предположим, что существует матричнозначная функция $G(t, U)$ такая, что

$$D^+U(t, X) \leqslant G(t, U(t, X)) \tag{4}$$

при всех $(t, X) \in T_0 \times N$, где $G \in C(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Матричному дифференциальному неравенству (4) сопоставим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dY}{dt} = G(t, Y), \qquad Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{5}$$

Определение 1. Матричное дифференциальное уравнение (5) является системой сравнения для матричного дифференциального уравнения (1), если в множестве решений уравнения (5) существует решение $\overline{Y}(t)$, связанное с решениями $X(t)$ матричной системы (1) соотношениями $U(t_0, X_0) \leqslant Y_0$ и $U(t, X(t)) \leqslant \overline{Y}(t)$ при всех $t \geqslant t_0$.

Множество индексов $\Theta = \{(i,j)\colon i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}$ разделим на подмножества P и Q так, что $P \cap Q = \varnothing$ и $P \cup Q = \Theta$ и при этом матрицы $[Y_{lk}]$ и $[Y_{mr}]$ при любых $(l,k) \in P$ и $(m,r) \in Q$ являются квадратными.

Определение 2 (см. [4]). Матричнозначная функция $G(t, Y)\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$:

1) удовлетворяет свойству смешанной квазимонотонности, если для множества индексов $\Theta = \{(i,j)\colon i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n\}$ существует разбиение на подмножества P и Q такие, что выполняются условия:

а) для любых $(l,k) \in P$ и $(m,r) \in Q$ матричнозначная функция $G(t, Y)$ является неубывающей по Y_{lk} и невозрастающей по Y_{mr};

либо

б) для любых $(l,k) \in P$ и $(m,r) \in Q$ матричнозначная функция $G(t, Y)$ является невозрастающей по Y_{lk} и неубывающей по Y_{mr};

2) является квазимонотонной неубывающей по Y, если $G(t, Y)$ является неубывающей по Y_{ij}, при всех $(i,j) \in \Theta$ и квазимонотонной невозрастающей, если $G(t, Y)$ является невозрастающей по Y_{ij} при всех $(i,j) \in \Theta$.

Далее применяются обозначения:

$Y_P = [Y_{ij}]$ — матрица $n \times n$ с произвольными элементами Y_{lk}, $(l,k) \in P$ и $Y_{mr} = 0$, $(m,r) \in Q$;

$Y_Q = [Y_{ij}]$ — матрица $n \times n$ с произвольными элементами Y_{mr}, $(m,r) \in Q$ и $Y_{lk} = 0$, $(l,k) \in P$.

Наряду с матричным уравнением (1) будем рассматривать матричные уравнения

$$\frac{dY_P}{dt} = G(t, Y_P), \qquad Y_P(t_0) = Y_{0P}, \tag{6}$$

$$\frac{dY_Q}{dt} = G(t, Y_Q), \qquad Y_Q(t_0) = Y_{0Q}, \tag{7}$$

где $G(t, Y_P) = G_P(t, Y)$ и $G(t, Y_Q) = G_Q(t, Y)$.

Пусть $\overline{Y}_P(t)$, $\overline{Y}_Q(t)$ — максимальные и $\underline{Y}_P(t)$, $\underline{Y}_P(t)$ — минимальные решения уравнений (6), (7) соответственно.

Определение 3. Решение $Y(t)$ матричного уравнения сравнения (5) называется:

а) P-максимальным — Q-минимальным, если

$$Y_P(t) \leqslant \overline{Y}_P(t) \qquad \text{и} \qquad Y_Q(t) \geqslant \underline{Y}_Q(t) \tag{8}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a)$;

б) P-минимальным — Q-максимальным, если

$$Y_P(t) \geqslant \underline{Y}_P(t) \qquad \text{и} \qquad Y_Q(t) \leqslant \overline{Y}_Q(t) \tag{9}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a)$.

Если $P = \Theta$ и выполняются неравенства (8), то решение $Y(t)$ системы (5) является максимальным и при $P = 0$ — минимальным.

Если $P = \Theta$ и выполняются неравенства (9), то решение $Y(t)$ системы (5) является минимальным и при $P = 0$ — максимальным.

Здесь и далее неравенства между матрицами являются поэлементными.

Теоремы принципа сравнения. Принимая во внимание некоторые результаты работы [4], покажем, что имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *и матричной системы сравнения* (5) *выполняются следующие условия:*

1) существует матричнозначная функция $U(t, X) \in C(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *локально липшицева по* X*;*

2) существует матричнозначная функция $G(t, Y) \in C(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$*, обладающая свойством смешанной квазимонотонности, для которой:*

а) при $t = t_0$ *выполняются оценки*

$$U_P(t_0, X(t_0)) < Y_P(t_0), \qquad U_Q(t_0, X(t_0)) > Y_Q(t_0); \tag{10}$$

б) при $t \geqslant t_0$ *верны дифференциальные неравенства*

$$\begin{aligned} &D_-U_P(t, X(t)) \leqslant G_P(t, U(t, X)),\\ &D_-Y_P(t) > G_P(t, Y(t)); \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &D_-Y_Q(t) \leqslant G_Q(t, Y(t)),\\ &D_-U_Q(t, X(t)) > G_Q(t, U(t, X)). \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда выполняются дифференциальные неравенства

$$U_P(t, X(t)) < \overline{Y}_P(t), \qquad U_Q(t, X(t)) > \underline{Y}_Q(t) \tag{13}$$

при всех $t \in [t_0, t_0 + a)$*.*

Доказательство. Введем обозначения $M_P(t) = \overline{Y}_P(t) - U_P(t, X(t))$, $M_Q(t) = U_Q(t, X(t)) - \underline{Y}_Q(t)$. Согласно условию *2, а* теоремы 1 имеем $M_{ij}(t_0) > 0$ при любом разбиении множества индексов $(i, j) \in \Theta$. Пусть оценки (13) не верны. Тогда множество $T = \bigcup\limits_{i,j=1}^{n} \{t \in [t_0, t_0 + a)\colon M_{ij}(t) \leqslant 0\}$ является не пустым.

Пусть $t_1 = \inf T$, $t_1 > t_0$ и T замкнуто. Предположим, что для $t_1 \in T$ существует пара индексов $(l, m) \in P$ такая, что $M_{lm}(t_1) = 0$ и $M_{ij}(t_1) \geqslant 0$ при $(i, j) \neq (l, m)$ и $D_-M_{lm}(t_1) \leqslant 0$.

Согласно условию (11) имеем

$$\begin{aligned} &D_-M_{lm}(t_1) = D_-(Y_{lm}(t_0) - U_{lm}(t_0)) \leqslant 0,\\ &D_-Y_{lm}(t_1) \leqslant D_-U_{lm}(t_1) \leqslant G_{lm}(t_1, U(t_1, X(t_1))). \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$G_{lm}(t_1, Y(t_1)) < G_{lm}(t_1, U(t, X(t))).$$

В то же время $M_{lm}(t_1) = 0$, и поэтому $Y_{lm}(t_1) = U_{lm}(t_1)$ и $M_{ij}(t_1) \geqslant 0$ при любых $(i, j) \neq$ $\neq (l, m)$. Из свойства смешанной квазимонотонности матричнозначной функции $G(t, Y)$ получаем неравенство

$$G_{lm}(t_1, U(t_1, X(t_1))) \leqslant G_{lm}(t, Y(t_1)),$$

которое является противоречием.

Аналогичные рассуждения для случая $lm \in Q$ приводят к противоречию

$$G_{lm}(t_1, Y(t_1)) > G_{lm}(t_1, U(t_1, X(t_1)))$$

вследствие свойства смешанной квазимонотонности функции $G(t, Y)$.

Таким образом, доказано, что множество T пустое. Этим завершено доказательство теоремы 1.

Далее для матрицы Y определим норму $\|Y\| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} |Y_{ij}|^2\right)^{1/2}$.

Теорема 2. *Пусть матричнозначная функция $G(t, Y)$ определена и ограничена в области $\Omega = \{(t, Y) \colon t \in [t_0, t_0 + a), \|Y - Y_0\| \leqslant B\}$, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $\|G(t, Y)\| \leqslant M$ при всех $(t, Y) \in \Omega$. Если $G(t, Y)$ удовлетворяет свойству смешанной квазимонотонности, то система сравнения (5) имеет P-максимальное — Q-минимальное решение и P-минимальное — Q-максимальное решение при всех $t \in [t_0, t_0 + \eta)$, где $\eta = \min(a, 2B/(2M + B))$.*

Доказательство. Для заданной величины B выберем величины $0 < e_{ij} < B/2$ при всех $(i, j) = 1, 2, \ldots, n$ так, что $\|E\| < B/2$. Для разбиения множества Θ на подмножества P и Q рассмотрим начальные задачи.

$$\begin{aligned} \frac{dY_P}{dt} &= G_P(t, Y) + E_P, \qquad Y_P(t_0) = Y_{0P} + E_P, \\ \frac{dY_Q}{dt} &= G_Q(t, Y) - E_Q, \qquad Y_Q(t_0) = Y_{0Q} - E_Q. \end{aligned} \tag{14}$$

Обозначим $G_E(t, Y) = G(t, Y) \pm E \equiv [G_{ij}(t, Y) \pm e_{ij}]$ при всех $(i, j) = 1, 2, \ldots, n$. Матричнозначная функция $G_E(t, Y)$ определена на множестве

$$\Omega_E = \left\{(t, Y) \colon t \in [t_0, t_0 + a), \|Y - (Y_0 \pm E)\| \leqslant \frac{1}{2}B\right\},$$

и при этом верна оценка

$$\|G_E(t, Y)\| \leqslant \|G(t, Y)\| + \|E\| \leqslant M + \|E\| < M + \frac{B}{2} \leqslant \frac{2M + B}{2}.$$

По теореме Пеано начальная задача (12) имеет решение $Y(t, E)$ на $[t_0, t_0 + \eta)$, где $\eta =$ $= \min(a, 2B/(2M + B))$ при $p \in P$ и $q \in Q$.

Пусть заданы матрицы $0 < E_2 < E_1 \leqslant E$ такие, что

$$Y_P(t_0, E_2) = Y_P(t_0) + E_{2P} < Y_P(t_0, E_1) = Y_P(t_0) + E_{1P},$$

$$Y_Q(t_0, E_2) > Y_Q(t_0, E_1) \qquad \text{или} \qquad Y_Q(t_0) - E_{2Q} > Y_Q(t_0) - E_{1Q}.$$

Кроме того, верны неравенства

$$\frac{dY_P(t,E_2)}{dt} \leqslant G_P(t,Y(t,E_2)) + E_{2P},$$

$$\frac{dY_Q(t,E_2)}{dt} \geqslant G_Q(t,Y(t,E_2)) - E_{2Q},$$

$$\frac{dY_P(t,E_1)}{dt} > G_P(t,Y(t,E_1)) + E_{2P} > G_P(t,Y(t,E_2)) + E_{2P} \geqslant \frac{dY_P(t,E_2)}{dt},$$

$$\frac{dY_Q(t,E_1)}{dt} < G_Q(t,Y(t,E_1)) - E_{2Q} < G_Q(t,Y(t,E_2)) - E_{2Q} \leqslant \frac{dY_Q(t,E_2)}{dt}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$Y_P(t,E_2) < Y_P(t,E_1) \qquad \text{и} \qquad Y_Q(t,E_2) > Y_Q(t,E_1)$$

при всех $t \in [t_0, t_0+\eta)$. Аналогичные рассуждения можно провести для любого матричного элемента последовательности E_n, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, равномерно по $t \in [t_0, t_0+\eta)$ выполняется соотношение $\lim\limits_{E_n\to 0} Y(t,E_n) = \overline{Y}(t)$, где $\overline{Y}(t)$ — решение начальной задачи (5).

Для того чтобы показать, что $\overline{Y}(t)$ является P-максимальным — Q-минимальным решением уравнения сравнения (5) на $[t_0, t_0+\eta)$ нужно доказать, что верны неравенства

$$Y_P(t) \leqslant \overline{Y}_P(t) \qquad \text{и} \qquad Y_Q(t) \geqslant \overline{Y}_Q(t)$$

при всех $t \in [t_0, t_0+\eta)$.

Пусть $Y(t)$ — некоторое решение системы (5) на $[t_0, t_0+\eta)$. Из последовательности неравенств

$$Y_P(t_0) < Y_P(t_0,E), \qquad Y_Q(t_0) > Y_Q(t_0,E),$$

$$\frac{dY_P(t)}{dt} < G_P(t,Y(t)) + E_P, \qquad \frac{dY_Q(t)}{dt} > G_Q(t,Y(t)) - E_Q,$$

$$\frac{dY_P(t,E)}{dt} \geqslant G_P(t,Y(t,E)) + E_P, \qquad \frac{dY_Q(t,E)}{dt} \leqslant G_Q(t,Y(t,E)) - E_Q,$$

где $\|E_P\|$, $\|E_Q\| < B/2$, получаем

$$Y_P(t) < Y_P(t,E) \qquad \text{и} \qquad Y_Q(t) > Y_Q(t,E)$$

при $t \in [t_0, t_0+\eta)$ и

$$Y_P(t) \leqslant \lim_{E\to 0} Y_P(t,E) = \overline{Y}_P(t),$$

$$Y_Q(t) \geqslant \lim_{E\to 0} Y_Q(t,E) = \overline{Y}_Q(t)$$

при всех $t \in [t_0, t_0+\eta)$.

Доказательство существования P-минимального — Q-максимального решений системы (5) проводится аналогично.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *и матричной системы сравнения* (5) *выполняются условия:*

1) существует матричнозначная функция $U(t, X) \in C(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$ *локально липшицева по* X*;*

2) существует матричнозначная функция $G(t, U) \in C(T_0 \times \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n})$*, квазимонотонно неубывающая по* U *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$*, такая, что*

$$D^+U(t, X(t)) \leqslant G(t, U(t, X))$$

при всех $(t, X) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n\times n}$*;*

3) существуют решение $X(t)$ *системы* (1) *и максимальное решение* $\overline{Y}(t)$ *системы сравнения* (5) *при всех* $t \geqslant t_0$.

Тогда при условии, что

$$U(t_0, X_0) < Y_0 \tag{15}$$

выполняется оценка

$$U(t, X(t)) < \overline{Y}(t; t_0, Y_0) \tag{16}$$

при всех $t \geqslant t_0$.

Доказательство. Пусть $X(t) = X(t; t_0, X_0)$ — любое решение системы (1), для которого $U(t_0, X_0) < Y_0$. Так как матричнозначная функция $M(t) = U(t, X(t; t_0, X_0))$ является локально липшицевой по X, то для сколь угодно малого $\beta \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned} M(t+\beta) - M(t) \leqslant K\|X(t+\beta) - X(t) - \beta F(t, X)\| + \\ + U(t+\beta, X(t) + \beta F(t, X(t))) - U(t, X(t)), \end{aligned} \tag{17}$$

где K — постоянная матрица. Из (17) следует оценка

$$D^+M(t) \leqslant D^+U(t, X(t)) \leqslant G(t, U(t, X(t))) = G(t, M(t)).$$

Покажем вначале, что матричное неравенство (16) выполняется покомпонентно на интервале $[t_0, t_0 + \delta)$, где δ — сколь угодно малое положительное число. При выполнении неравенства (15) это следует из непрерывности элементов матриц $U(t, X(t))$ и $Y(t)$.

Предположим теперь, что существует пара индексов $(r, s) \in \Theta$, для которой $U_{rs}(t_0, X_0) = \overline{Y}_{rs}(t_0)$. Учитывая квазимонотонность матричнозначной функции $G(t, U)$, получим

$$D^+U_{rs}(t_0, X_0) < G_{rs}(t_0, U(t_0, X)) \leqslant G_{rs}(t_0, Y(t_0)) = D^+\overline{Y}_{rs}(t_0).$$

Отсюда следует, что

$$D^+U_{rs}(t_0, X_0) - D^+\overline{Y}_{rs}(t_0) < 0,$$

и поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $t \in [t_0, t_0+\delta)$ будет верна оценка $U_{rs}(t_0, X(t)) < Y_{rs}(t)$ при $(r, s) \in \Theta$.

Покажем теперь, что неравенство (16) выполняется на интервале $[t_0, t_0 + \eta)$. Пусть $t^* = \inf\{t \in [t_0, t_0 + \eta)\}$, для которого хотя бы для одной пары индексов $(r, s) \in \Theta$ неравенство (16) обращается в равенство. Пусть $U_{rs}(t^*, X(t^*)) = \overline{Y}_{rs}(t^*)$ и при $t \in (t_0, t^*)$ выполняется неравенство (16) при всех $(i, j) = 1, 2, \ldots, n$. Как и выше, нетрудно получить, что

$$D^+U_{rs}(t^*, X(t^*)) - D^+Y_{rs}(t^*) < 0.$$

В этом случае найдется $\overline{\eta} > 0$ такое, что

$$U_{rs}(t, X(t)) > \overline{Y}_{rs}(t) \qquad \text{при} \qquad t \in [t^* - \overline{\eta}, t^*).$$

Но это противоречит выбору величины t^*. Следовательно, неравенство (16) выполняется при всех $t \in [t_0, t_0 + \eta)$.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 3 являются основными теоремами принципа сравнения для матричной системы (1). Этот принцип позволяет исследовать динамические свойства решений системы (1) на основе матричнозначной функции аналогично тому, как исследуются системы обыкновенных дифференциальных уравнений на основе векторных функций Ляпунова (см. [5]). Эти результаты будут предметом другой работы.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность профессору Д. Д. Шильяку за возможность ознакомления с его работой [6], которая побудила автора к проведенным исследованиям.

1. *Martynyuk A. A.* Stability by Liapunov's matrix function method with application. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
2. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics. Novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, 2002. – 301 p.
3. *Martynyuk A. A.* Stability of motion: the role of multicomponent Liapunov functions. – London: Cambridge Sci. Publ., 2007. – 322 p.
4. *Shaw M. D.* Generalized stability of motion and matrix Lyapunov functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1995. – **189**. – P. 104–114.
5. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: Анализ динамических свойств нелинейных систем. – Москва: Физматлит, 2001. – 380 с.
6. *Šiljak D. D.* Dynamic graphs (Manuscript). – Santa Clara University, 2006. – 31 p.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 21.03.2008

УДК 517.95+511.2

Член-кореспондент НАН України **Б. Й. Пташник, І. Р. Тимків**

Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами

The correctness of a problem with multipoint conditions with respect to the time for the Petrovskii parabolic equation with coefficients depending on the spatial coordinate is investigated. The conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The metrical theorems on the lower bounds of small denominators of the problem are proved.

Багатоточкові задачі для гіперболічних та безтипних диференціальних рівнянь в обмежених областях вивчались багатьма дослідниками (див., напр., [1–4] та наведену там бібліогр.). Встановлено, що такі задачі є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. Локальні багатоточкові задачі для деяких класів параболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами вивчались в роботах [5, 6],