УДК 517.9

С. П. Дегтярев

Явление мгновенной компактификации носителя в условиях неоднородной абсорбции и при возможном росте начальных данных

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. М. Ковалевым)

We study the instantaneous support shrinking phenomenon for a doubly nonlinear degenerate parabolic equation with inhomogeneous absorption in the case of slow diffusion, when the initial Cauchy data are, in general, Radon measures and grow at infinity depending on the behavior of the absorption at infinity. For nonnegative solutions, we obtain the necessary and sufficient conditions for the instantaneous support shrinking phenomenon in terms of a local behavior of the array of initial data together with the behavior of the absorption. We also give the bilateral estimates exact with respect to order for the support size.

1. Постановка задачи и основной результат. В области $\mathbb{R}^N \times [0,T]$, N — размерность пространства $\mathbb{R}^N$, $T > 0$, рассмотрим следующую задачу Коши для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(|u|^{\beta-1}u(x,t)) - \nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + h(x,t)|u|^{\lambda-1}u(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$|u|^{\beta-1}u(x,0) = |u_0|^{\beta-1}u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

где $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_N)$, $\beta > 0$, $p > 0$, $\lambda > 0$ — заданные параметры, $h(x,t)$ — заданная строго положительная функция, а заданные начальные данные $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ могут быть локально конечной радоновской мерой. Мы рассматриваем случай медленной диффузии и сильной абсорбции, что выражается в следующем ограничении на параметры задачи:

$$\beta > 0, \qquad p > 1 + \beta, \qquad \lambda < \beta. \tag{3}$$

Функция $h(x,t)$, растущая либо убывающая на бесконечности, предполагается для простоты непрерывной и удовлетворяющей следующему условию удвоения:

$$C^{-1}h(k^{-1}x,\tau) \leqslant h(x,t) \leqslant Ch(kx,\tau), \qquad k \in [1,2], \qquad \tau \in [0,t]. \tag{4}$$

Здесь и далее через C, γ, b обозначаем все различные абсолютные константы либо константы, зависящие только от параметров задачи β, p, λ, N, u_0. Кроме того, мы используем обозначения

$$\begin{aligned} &d = p - 1 - \beta > 0, \qquad d_\lambda = p - 1 - \lambda, \qquad \Delta = \beta - \lambda, \\ &k = Nd + \beta p, \qquad k_\lambda = Nd_\lambda + \beta p. \end{aligned} \tag{5}$$

В случае однородной абсорбции, т. е. когда $h(x,t) \equiv 1$, из работ, например, [1–9] известно, что если начальная функция $|u_0|^{\beta-1}u_0(x)$ является достаточно регулярной и убывающей на бесконечности, а также выполнено (3), то задача (1), (2) разрешима в слабом смысле и наблюдается явление мгновенной компактификации носителя решения, когда, несмотря на то что носитель начальной функции может совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^N$, у решения он становится компактным в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$. Настоящая работа посвящена изучению данного явления для задачи (1), (2) в случае неоднородной абсорбции (неоднородность моделируется наличием в уравнении растущего либо убывающего потенциала $h(x,t)$) и получению точных по порядку оценок размеров носителя слабого решения указанной задачи в терминах поведения начальной функции и потенциала, когда начальные данные являются локально конечными мерами. Отметим, что точные оценки размеров носителя решения, когда начальные данные не монотонны и непрерывны, являются новыми даже в случае $h(x,t) \equiv 1$.

Влияние неоднородности абсорбции на процесс мгновенной компактификации изучалось многими исследователями. Отметим работы [2, 6, 9], в которых изучалась рассматриваемая нами ситуация неоднородной абсорбции и было, в частности, выяснено, что при растущем на бесконечности потенциале $h(x,t)$ явление мгновенной компактификации носителя наблюдается даже при растущих начальных данных. Однако эти результаты не содержат точных по порядку оценок размеров носителя в рассматриваемой нами ситуации, получение которых является одной из целей данной работы.

В случае $h(x,t) \equiv 1$ имеются два типа результатов, относящихся к изучению явления мгновенной компактификации. Одни из них, основанные преимущественно на барьерной технике, предполагают начальную функцию в (2) локально ограниченной и монотонно убывающей на бесконечности (либо имеющей монотонную мажоранту) [5–8]. Сформулируем кратко результат этих работ применительно к нашему случаю. Пусть здесь и всюду ниже

$$S(t) = \inf_{\rho>0}\{\rho\colon u(x,t) \equiv 0, |x| > \rho\} \; — \tag{6}$$

верхняя граница носителя решения $u(x,t)$ задачи (1), (2). Пусть начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и монотонно убывает на бесконечности и пусть

$$f_\infty(\rho) \equiv \max_{|y|=\rho} |u_0(y)| \to 0, \qquad \rho \to \infty. \tag{7}$$

Тогда, как следует, например, из работ [5–8],

$$S(t) \sim C f_\infty^{-1}\Big(\gamma t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}\Big). \tag{8}$$

В другого типа результатах начальная функция предполагается локально суммируемой с некоторой степенью $q > \beta$ [1–4]. В частности, пусть

$$f_q(\rho) \equiv \sup_{|y|=\rho} \int\limits_{|x-y|<1} |u_0(x)|^q dx$$

и пусть $f_q(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$. Тогда в задаче (1), (2) наблюдается явление мгновенной компактификации носителя, причем

$$S(t) \leqslant f_q^{-1}\Big(\gamma t^{\frac{qp+N(p-1-\lambda)}{p(\beta-\lambda)}}\Big) \tag{9}$$

с достаточно малым $\gamma > 0$, где в случае нестрого монотонной $f_q(\rho)$

$$f_q^{-1}(s) \equiv \inf\{\rho\colon f_q(\rho) < s\}.$$

Как видно из последней оценки, она не переходит в оценку (8) при улучшении свойств начальной функции до непрерывной и монотонно убывающей. Однако, как мы покажем, оценка (9) является точной "для всего класса функций" и достигается на начальных функциях, приближающихся по своим свойствам к локально конечным мерам в виде δ-функции. В частности, мы покажем, что для начальных данных вида

$$|u_0|^{\beta-1}u_0(x) = \sum_{\overline{n}\in\mathbb{R}^N} \mu_{\overline{n}}\delta(x-\overline{n}), \tag{10}$$

где $\overline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$ — точка с целочисленными координатами, $\delta(x-\overline{n})$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке $\overline{n}$ с массой $\mu_{\overline{n}}$, $\mu_{\overline{n}} \to 0$, $|\overline{n}| \to \infty$, имеет место асимптотика

$$S(t) \sim Cf_0^{-1}\biggl(\gamma t^{\frac{N(p-1-\lambda)+\beta p}{p(\beta-\lambda)}}\biggr), \tag{11}$$

где

$$f_0^{-1}\Bigl(\gamma t^{\frac{N(p-1-\lambda)+\beta p}{p(\beta-\lambda)}}\Bigr) = \inf\Bigl\{\rho\colon |\mu_{\overline{n}}| < \gamma t^{\frac{N(p-1-\lambda)+\beta p}{p(\beta-\lambda)}}, |\overline{n}| > \rho\Bigr\}. \tag{12}$$

Отсюда, в частности, следует "предельная" точность оценки (9) при $q = \beta$, когда начальные данные ведут себя подобно (10). Отметим также и то, что, как оказывается, соотношение (11) имеет место только лишь для данных вида (10): для начальных данных, которые являются равномерно локально суммируемыми в $\mathbb{R}^N$ порядок размера носителя всегда меньше, чем в (11).

Таким образом, наша цель — изучить влияние неоднородности абсорбции $h(x,t)$ на явление мгновенной компактификации носителя решения и при этом, с одной стороны, максимально расширить класс возможных начальных функций до локально конечных радоновских мер, а с другой — получить точную по порядку двустороннюю оценку размера носителя решения с учетом поведения на бесконечности потенциала $h(x,t)$, которая учитывала бы гладкостные свойства конкретных начальных данных и из которой, таким образом, следовали бы оценки (8) и (9) в случае $h(x,t) \equiv 1$. Мы используем метод локальных интегральных оценок, развитый в работах [10–12].

Чтобы сформулировать основной результат введем еще несколько определений и обозначений.

Под слабым решением задачи (1), (2) на интервале времени $[0,T]$ мы понимаем измеримую функцию, обладающую следующими свойствами:

1) для любой функции $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ отображение

$$t \in [0,T] \to \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}u(x,t)\zeta(x)\,dx$$

непрерывно;

2) для любой финитной по x достаточно гладкой функции $\eta(x,t)$ выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}u(x,t)\eta\,dx + \sum_{i=1}^{N}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}u_{x_i}\eta_{x_i}\,dxd\tau + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} h|u|^{\lambda-1}u\eta\,dxd\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0|^{\beta-1}u_0(x)\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1}u(x,\tau)\eta_\tau(x,\tau)\,dxd\tau. \tag{13}$$

Из работ [13, 14] следует, что задача (1), (2) при заданном соотношении параметров (3) разрешима для начальных функций из $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ или для локально конечных радоновских мер в качестве начальных данных, не слишком растущих на бесконечности. А именно, пусть для $R > 0$

$$|||u_0|||_R \equiv \sup_{\rho>R}\rho^{-k/d}\int\limits_{B_\rho(0)} ||u_0|^{\beta-1}u_0(x)|\,dx < \infty.$$

Здесь и далее $B_\rho(x_0)$ означает шар радиуса ρ с центром в x_0, а интеграл по $B_\rho(x_0)$ от модуля начальной функции в случае, если эта функция представляет собой радоновскую меру, означает полную вариацию этой меры по шару $B_\rho(x_0)$. Тогда известно [13, 14], что на некотором интервале времени $[0,T]$ для решения задачи (1), (2) справедлива оценка

$$|||u(x,t)|||_R \leqslant C|||u_0|||_R. \tag{14}$$

Более того, из результатов работ [13, 14] следует, что слабое решение задачи локально ограничено при $t > 0$ и, кроме того, $u_{x_i} \in L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0,T))$, а также выполнена следующая оценка максимума модуля решения:

$$\sup|u(\cdot,t)|_{B_\rho(0)} \leqslant Ct^{-N/k}\rho^{p/d}|||u_0|||_R, \qquad \rho \geqslant R. \tag{15}$$

Это, в частности, означает, что интегральное тождество (4) справедливо для финитных по x пробных функций $\eta(x,t) \in L_{p,\mathrm{loc}}((0,T), W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$. Отметим также, что ниже при доказательстве оценки снизу (22) размеров носителя решения мы считаем наше решение тем слабым решением, которое является пределом решений с гладкими финитными начальными данными (как и получается слабое решение в работах [13, 14]).

Чтобы сформулировать основной результат, введем важный для нас показатель

$$\varkappa = \frac{p-1-\lambda}{p(\beta-\lambda)} = \frac{d_\lambda}{p\Delta} > 0, \tag{16}$$

который аналогичен показателю, полученному в работе [15] при оценке размеров носителя решения в ситуации, в определенном смысле противоположной рассматриваемой нами — когда $\lambda > p > 1+\beta$ и первоначально компактный носитель решения начинает расширяться.

Введем также другой показатель, связанный с неоднородностью абсорбции и присутствием в уравнении потенциала:

$$\mu = \varkappa - \frac{1}{p} = \frac{p-1-\beta}{p(\beta-\lambda)} = \frac{d}{p\Delta} > 0. \tag{17}$$

Введем еще важный для нас “характерный радиус”, связанный с заданной точкой $x_0 \in \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Зафиксируем $\varepsilon_0 \in (0, 1/4)$ и положим здесь и всюду далее

$$D \equiv D(x_0, t) = \min\{t^{\varkappa} h^{\mu}(x_0, t), \varepsilon_0 |x_0|\}. \tag{18}$$

Отметим, что так как мы рассматриваем только достаточно большие $|x_0|$, то при функциях $h(x, t)$, убывающих или не слишком сильно растущих на бесконечности, мы имеем $D = t^{\varkappa} h^{\mu}(x_0, t)$.

Кроме того, определим функцию

$$\varphi_t(x_0) = h^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}}(x_0, t) \frac{1}{\omega_N D^N} \int\limits_{|x-x_0|<D} |u_0(x)|^{\beta} dx \equiv h^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}}(x_0, t) \oint\limits_{B_D(x_0)} |u_0(x)|^{\beta} dx, \tag{19}$$

где ω_N — объем единичного шара в $\mathbb{R}^N$, а также функцию

$$\varphi_t(\rho) \equiv \sup_{|x_0|=\rho} \varphi_t(x_0). \tag{20}$$

Теорема 1. *Если начальная функция в* (2) *неотрицательна(неположительна), то решение задачи* (1), (2) *обладает свойством мгновенной компактификации носителя тогда и только тогда, когда для начальной функции* $|u_0|^{\beta-1} u_0(x)$ *(которая может быть радоновской мерой) выполнено условие*

$$\varphi_t(\rho) \to 0, \qquad \rho \to \infty,$$

при каком-либо $t > 0$ *(в этом случае, как легко проверить, сформулированное условие выполнено при любом* $t > 0$*). При этом существуют такие зависящие от* $u_0(x)$ *константы* t_0, γ_0, γ_1 M_1, *что на интервале времени* $[0, t_0]$ *справедливы следующие оценки сверху и снизу размеров носителя решения:*

$$S(t) \leqslant C \varphi_t^{-1}\big(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}\big), \tag{21}$$

$$S(t) \geqslant \varphi_{M_1 t}^{-1}\big(\gamma_1 t^{\beta/(\beta-\lambda)}\big), \tag{22}$$

где при нестрого монотонной функции $\varphi_t(\rho)$

$$\varphi_t^{-1}(s) \equiv \inf_{\rho}\{\rho : \varphi_t(k) < s, k > \rho\}. \tag{23}$$

Если же начальная функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, произвольно меняет знак, то оценка (21) размера носителя сверху имеет место и в этом случае.

Замечание 1. Из оценки (21) ввиду определения функции φ_t легко следуют оценки (8) и (9) в случае $h(x, t) \equiv 1$ применением неравенства Гельдера для получения (9) и теоремы о среднем для получения (8). Кроме того, из оценок (21) и (22) легко следует соотношение (11).

Замечание 2. Из определения функции $\varphi_t(\rho)$ и из оценки (21) также следует, что при растущей на бесконечности функции $h(x, t)$ мгновенная компактификация носителя решения наблюдается даже при начальных данных, растущих на бесконечности — точное соотношение возможного роста дается формулой (21). Кроме того, если $h(x, t)$ убывает на бесконечности, то от начальных данных требуется достаточно быстрое убывание, чтобы мгновенная компактификация имела место. Например, если $h(x,t)$ и $u_0(x)$ имеют степенное поведение на бесконечности, т. е. $h(x,t) \sim |x|^q$, $u_0(x) \sim |x|^a$, q, $a \in R$, то явление мгновенной компактификации носителя решения наблюдается тогда и только тогда, когда $-q + a(\beta - \lambda) < 0$, при этом $S(t) \sim t^{1/(-q+a(\beta-\lambda))}$.

Замечание 3. Переходя к доказательству теоремы 1 (п. 2), отметим, что в соответствии с формулировкой этой теоремы будем считать начальные данные, а следовательно, и решение неотрицательными, не оговаривая это каждый раз отдельно. (При этом все приведенные в п.2 доказательства и рассуждения не меняются для начальных данных и решений произвольного знака и остаются справедливыми.)

2. Доказательство оценок (21), (22) и теоремы 1. Доказательство теоремы 1 можно разделить на четыре основных этапа.

На первом этапе путем локальных энергетических интегральных оценок с использованием наличия в уравнении (1) абсорбции мы получаем условие локального обращения решения в ноль в терминах поведения локальной энергии, что сформулировано в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть $R > 0$, $\sigma \in (0,1)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $D = D(x_0,t)$ определено в (18). Пусть $0 < R_1 < R_2$, $R_2 = RD$, $R_1 = (1-\sigma)R_2$, $B_{R_i} = B_{R_i}(x_0) = \{x\colon |x - x_0| < R_i\}$, и пусть здесь и ниже для краткости $h = h(x_0,t)$. Тогда существует константа $\gamma_2 = \gamma_2(R,\sigma)$ такая, что если*

$$Y(t/2, R_2) \equiv \sup_{t/2<\tau<t} \int\limits_{B_{R_2}} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{B_{R_2}} |\nabla u|^p dx d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t/2}^{t}\int\limits_{B_{R_2}} h(x,\tau) u^{1+\lambda} dx d\tau \leqslant \gamma_2 t^{\frac{Nd_\lambda + p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}} h^{\frac{Nd+p(1+\beta)}{p(\beta-\lambda)}}, \tag{24}$$

то $u(x,t) \equiv 0$ на множестве $B_{R_1}(x_0) \times [3t/4, t]$.

На втором этапе путем оценок локальной энергии решения через локальную массу решения, аналогичных [10–12], мы выражаем условие локального обращения решения в ноль в терминах поведения локальной массы. Справедливы следующие две леммы.

Лемма 2. *Пусть $0 < r_1 < r_2$, $0 < t_2 < t_1 < t$, B_{r_i} — шары с центром в x_0 радиуса r_i. Тогда для решения $u(x,\tau)$ задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$Y(t_1, r_1) \equiv \sup_{t_1<\tau<t} \int\limits_{B_{r_1}} u^{1+\beta}(x,\tau)\,dx + \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{B_{r_1}} |\nabla u|^p dx d\tau + \int\limits_{t_1}^{t}\int\limits_{B_{r_1}} u^{1+r} dx d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\frac{t-t_2}{(t-t_2)^{\frac{k+N}{k}}}\left(\sup_{t_2<\tau<t}\int\limits_{B_{r_2}} u^\beta dx\right)^{\frac{k+p}{k}} + \frac{t-t_2}{(r_2-r_1)^{\frac{k+N}{\beta}}}\left(\sup_{t_2<\tau<t}\int\limits_{B_{r_2}} u^\beta dx\right)^{\frac{p}{\beta}}\right]. \tag{25}$$

Если же с некоторым $\gamma > 0$ выполнены условия $r_2 - r_1 > \gamma(|x_0| + r_2)$ и $1 > t_2 > \gamma(t_1 - t_2)$, то второе слагаемое в оценке (2) можно отбросить.

Лемма 3. *Пусть x_0, R, σ, R_1, R_2 и $Y(t/2, R_2)$ такие же, как в лемме 1, $R_3 = R_2(1+\sigma)$, $h = h(x_0,t)$, $D = D(x_0,t)$. Тогда существует константа $\gamma_3 = \gamma_3(R,\sigma) > 0$ такая, что* *условие леммы 1 выполнено, т. е.* $Y(t/2, R_2) \leqslant \gamma_2 t^{\frac{k_\lambda+p}{p\Delta}} h^{\frac{k+p}{p(\beta-\lambda)}}$, *если*

$$E \equiv E(t,R,\sigma) \equiv \sup_{t/4<\tau<t} \int\limits_{B_{R(1+\sigma)D}(x_0)} u^\beta dx \leqslant \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} \{\omega_N (R(1+\sigma)D)^N\},$$

т. е.

$$h^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}}(x_0,t) \sup_{t/4<\tau<t} \oint\limits_{B_{R(1+\sigma)D}} u^\beta(x,\tau)\,dx \leqslant \gamma_3 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}.$$

На третьем этапе доказательства мы получаем оценку локальной массы решения через локальную массу начальной функции, причем идею такой оценки в случае уравнения без абсорбции мы заимствовали из любезно предоставленной нам неопубликованной пока статьи S. D. Eidelman, S. Kamin and A. F. Tedeev "Asymptotic representation for solutions of the Cauchy problem for quasi linear degenerate parabolic equations". Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Обозначим* $l = \beta/(\beta-r)$, $h = h(x_0,t)$ *и пусть* $\sigma \in (0,1)$ *задано. Существуют такие константы* $t_0 = t_0(u_0)$, $\gamma_4 = \gamma_4(u_0)$, *что для* $t < t_0$, *если* x_0 *таково, что при всех* $y \in B_{\varepsilon_0|x_0|}(x_0)$ *выполнено*

$$\oint\limits_{B_D(y)} u_0^\beta(x)\,dx \equiv \frac{1}{\omega_N D^N} \int\limits_{B_D(y)} u_0^\beta(x)\,dx \leqslant \gamma_4 t^l h^l, \tag{26}$$

то тогда выполнено

$$E_{D,x_0} \equiv \sup_{0<\tau<t} \int\limits_{B_D(x_0)} u^\beta(x,\tau)\,dx \leqslant 2 \int\limits_{B_{D(1+\sigma)}(x_0)} u_0^\beta(x)\,dx \equiv 2\mu_{D(1+\sigma)}(x_0). \tag{27}$$

На этом этапе из лемм 1, 3, 4 легко следует оценка (21) размеров носителя сверху теоремы 1.

Заключительный этап доказательства теоремы состоит в доказательстве оценки размеров носителя снизу (22). При доказательстве оценки (22) размеров носителя снизу будем пользоваться принципом сравнения решений задачи Коши (1), (2), т. е. тем, что для двух начальных данных в (2) $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x)$ и $|v_0(x)|^{\beta-1}v_0(x)$ таких, что $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x) \leqslant |v_0(x)|^{\beta-1}v_0(x)$, для соответствующих решений задачи Коши (1), (2) выполнено $u(x,t) \leqslant v(x,t)$.

Пусть $|u_0(x)|^{\beta-1}u_0(x)$ — произвольная неотрицательная локально суммируемая функция или локально конечная радоновская мера. Пусть $t > 0$ достаточно мало и фиксировано и пусть $|x_0| \leqslant \varphi_t^{-1}\big(\gamma_0 t^{\beta/(\beta-\lambda)}\big)$, т. е.

$$\int\limits_{|x-x_0|<D} u_0^\beta(x)\,dx \geqslant \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} D^N.$$

Обозначим

$$v_0^\beta(x) = v_{0,t}^\beta(x) = \begin{cases} u_0^\beta(x), & |x-x_0| \leqslant D, \\ 0, & |x-x_0| > D, \end{cases}$$

и пусть $v(x,\tau)$ — соответствующее решение задачи Коши (1), (2) с начальной функцией $v_0^\beta(x)$. Тогда, по принципу сравнения, $u(x,\tau) \geqslant v(x,\tau)$. Более того, не ограничивая общности (уменьшая, если нужно, $v_0^\beta(x)$), мы будем считать, что

$$\int\limits_{|x-x_0|<D} v_0^\beta(x)\,dx = \omega_N \gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} D^N.$$

Тогда для всех точек $y_0 \in \mathbb{R}^N$ (в качестве x_0) и функции $v_0^\beta(x)$ выполнены условия леммы 4, а следовательно, и оценка (27). Отсюда, ввиду определения функции $v_0^\beta(x)$, следует, что $v(x,\tau) \equiv 0$ на множестве $[0,t] \times \{|x-x_0| > D + (1+\sigma)D = (2+\sigma)D\}$, т. е. при $\tau \in [0,t]$ носитель функции $v(x,\tau)$ содержится в шаре $B_t \equiv B_{(2+\sigma)D}(x_0)$.

Проинтегрируем теперь уравнение (1) по шару B_t, учитывая, что решение равно нулю в окрестности границы этого шара. Интегрирование по частям в диффузионном слагаемом дает

$$\frac{d}{d\tau}\int\limits_{B_t} v^\beta dx + \int\limits_{B_t} h(x,\tau) v^\lambda dx = 0, \qquad \tau \in [0,t]. \tag{28}$$

Оценка (4) и применение неравенства Гельдера дают ($h = h(x_0,t)$)

$$\int\limits_{B_t} h(x,\tau) v^\lambda dx \leqslant Ch\int\limits_{B_t} v^\lambda dx \leqslant Ch\Bigl(\int\limits_{B_t} v^\beta dx\Bigr)^{\frac{\lambda}{\beta}}\Bigl(\int\limits_{B_t} dx\Bigr)^{1-\frac{\lambda}{\beta}} =$$

$$= \Bigl(\int\limits_{B_t} v^\beta dx\Bigr)^{\frac{\lambda}{\beta}} M D^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}} h, \tag{29}$$

где M — некоторая константа. Обозначая теперь $E(\tau) = \int\limits_{B_t} v^\beta(x,\tau)\,dx$, из (28) и (29) получаем, что

$$\frac{dE}{d\tau} \geqslant -MhD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}} E^{\frac{\lambda}{\beta}},$$

причем $E(0) = \int\limits_{B_t} u_0^\beta(x)\,dx = \omega_N\gamma_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} D^N \equiv \gamma t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} D^N$. Интегрируя это дифференциальное неравенство, приходим к оценке

$$E(\tau)^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}} \geqslant E(0)^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}} - \Bigl(\frac{\beta-\lambda}{\beta}\Bigr) M D^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}} h\tau \geqslant hD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}}\left[\gamma^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}} t - \Bigl(\frac{\beta-\lambda}{\beta}\Bigr) M\tau\right].$$

Положим $\tau_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\gamma^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}}}{M}\dfrac{\beta}{\beta-\lambda} t \equiv m_0 t$. Тогда

$$E(m_0 t) \geqslant \Bigl(\frac{\gamma^{\frac{\beta-\lambda}{\beta}}}{2}\Bigr) hD^{N\frac{\beta-\lambda}{\beta}} t > 0.$$

Таким образом, получаем, что для некоторого $m_0 = m_0(N, \sigma, \beta, \lambda)$

$$E(m_0 t) \equiv \int\limits_{B_t(x_0)} v^\beta(x, m_0 t) > 0.$$

Следовательно, $u(x, m_0 t) \geqslant v(x, m_0 t) > 0$ в окрестности точки x_0. Отсюда следуют два вывода.

С одной стороны, в случае, когда $\varphi_t(x_0)$ не стремится к нулю при $|x_0| \to \infty$ и мы имеем точки x_0 с рассмотренным свойством при любом малом t как угодно далеко от начала координат, это доказывает отсутствие мгновенной компактификации носителя: для любого малого момента времени вида $m_0 t$ найдется точка $x_0 = x_0(t)$ как угодно далеко от начала координат такая, что $u(x, \tau) > 0$ в окрестности этой точки.

С другой стороны, если $\varphi_t(x_0) \to 0$ при $|x_0| \to \infty$, то положим $x_0 = x_0(t)$, где $|x_0| = \varphi_t^{-1}\big(\gamma_0 t^{\beta/\beta - r}\big)$. Тогда

$$\oint\limits_{|x-x_0|<D(x_0, m_0^{-1}(m_0 t))} u_0^\beta(x)\,dx \geqslant \gamma_0 m_0^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}} (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} \equiv M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}},$$

и в то же время для всех $y \in \mathbb{R}^N$ таких, что $|y| > |x_0|$, по определению функции $\varphi_t^{-1}(s)$ выполнено

$$\oint\limits_{|x-y|<D(x_0, m_0^{-1}(m_0 t))} u_0^\beta(x)\,dx < \gamma_0 m_0^{-\frac{\beta}{\beta-\lambda}} (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} = M_0 (m_0 t)^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}} h^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}},$$

т. е., по определению, $|x_0| = \varphi^{-1}_{m_0^{-1}(m_0 t)}\big(M_0 (m_0 t)^{\beta/(\beta-\lambda)}\big)$, причем $u(x_0, m_0 t) \neq 0$. Ввиду произвольности t, обозначая $m_0 t$ снова через t, видим, что для любого малого $t > 0$ найдется точка $x_0 = x_0(t/m_0)$ такая, что

$$\left| x_0\left(\frac{t}{m_0}\right)\right| = \varphi^{-1}_{m_0^{-1} t}\Big(M_0 t^{\frac{\beta}{\beta-\lambda}}\Big), \qquad u\left(x_0\left(\frac{t}{m_0}\right), t\right) \neq 0.$$

Следовательно, доказана оценка (22) с $M_1 = m_0^{-1}$ и $\gamma_1 = M_0$, а вместе с ней доказана и теорема 1.

Автор выражает свою искреннюю благодарность А. Ф. Тедееву за внимание к данной работе и ценные обсуждения в ходе ее выполнения.

1. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* Energy methods for the free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. – Basel: Birkhäuser, 2002. – 334 p.
2. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* The support shrinking in solutions of parabolic equations with non-homogeneous absorption terms // Elliptic and parabolic problems: Proc. of the 2nd Europ. conf., Pont-a-Mousson, June, 1994. – Harlow: Longman Scientific & Technical, Pitman Res. Notes Math., 1995. – Ser. 325. – P. 24–39.
3. *Kersner R., Shishkov A.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 1996. – **198**. – P. 729–750.
4. *Шишков А. Е.* Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Мат. сб. – 1999. – **190**, № 12. – С. 129–156.

5. *Kalashnikov A. S.* On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity // Math. USSR Sb. – 1986. – **53**. – P. 399–410.
6. *Kalashnikov A. S.* On quasilinear degenerating parabolic equation with singular lower-order terms and growing initial values // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, No 6. – С. 999–1009.
7. *Abdullaev U. G.* Exact local estimates for the supports of solutions in problems for nonlinear parabolic equations // Мат. сб. – 1995. – **186**, No 8. – С. 3–24.
8. *Ughi M.* Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption // Adv. Math. Sci. and Appl. Gakkotosho, Tokyo. – 2001. – **11**, No 1. – P. 333–345.
9. *Li Jun-Jie.* Instantaneous shrinking of the support of solutions to certain parabolic equations with unbounded initial data // Nonlinear Analysis. – 2002. – **48**. – P. 1–12.
10. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Adv. Different. Equat. – 2005. – **10**, No 1. – P. 89–120.
11. *Andreucci D., Tedeev A. F.* Finite speed of propagation for the thin film equation and other higher order parabolic equations with general nonlinearity // Interfaces and Free Boundaries. – 2001. – **3**, No 3. – P. 233–264.
12. *Andreucci D., Tedeev A. F.* A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with non compact boundary // J. Math. Anal. and Appl. – 1999. – **231**. – P. 543–567.
13. *Kazuhiro Ishige.* On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation // SIAM J. Math. Anal. – 1996. – **27**, No 5. – P. 1235–1260.
14. *Fan H. J.* Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure // Acta Math. Sinica. Engl. Ser. – 2004. – **20**, No 4. – P. 663–682.
15. *Bernis F.* Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1986. – **A104**. – P. 1–19.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 05.05.2008

УДК 531.36

Член-корреспондент НАН Украины **А. М. Ковалев, А. С. Суйков**

Построение функции Ляпунова при выполнении теоремы Барбашина–Красовского

The paper presents a method of building a strong Lyapunov function from a weak one for autonomous systems satisfying the conditions of the Barbashin–Krasovskii theorem. The method is based on results from the invariant set theory. The resulting function is built iteratively as a sum of the initial Lyapunov function with semidefinite derivative and several additional functions, whose derivatives have definite signs at the points, where the derivative of the initial function becomes zero.

Для систем, удовлетворяющих условиям теоремы Барбашина–Красовского, получено явное выражение функции Ляпунова со знакоопределенной производной. Функция строится в виде $W = V + V_a$, где V — исходная функция Ляпунова со знакопостоянной производной, а V_a представляет собой сумму некоторых дополнительных функций. Каждое из составляющих V_a слагаемых сужает множество, на котором производная получаемой функции обращается в нуль. В процессе построения к V_a добавляются слагаемые до тех пор, пока