**ФИЗИКА КОСМОСА**

**КИНЕМАТИКА И ФИЗИКА НЕБЕСНЫХ ТЕЛ том 27 № 2 2011**

УДК 533.951; 533.951.8

**О. К. Черемных, В. В. Данилова**

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Национального космического агентства Украины
03680 Киев-187, проспект Академика Глушкова 40
ch_ol@ikd.kiev.ua

# Поперечно-мелкомасштабные МГД-возмущения в космической плазме с магнитными поверхностями

*Анализируются поперечные мелкомасштабные возмущения в произвольных трехмерных пространственно неоднородных плазменных космических системах с магнитными поверхностями. Получена система уравнений для таких возмущений. Показано, что в дипольном магнитном поле реализуются возмущения с двумя различными поляризациями. В рамках дипольной геометрии получены уравнения для собственных МГД-мод, а также исследована устойчивость возмущений.*

*ПОПЕРЕЧНО-ДРІБНОМАСШТАБНІ МГД-ЗБУРЕННЯ У КОСМІЧНІЙ ПЛАЗМІ З МАГНІТНИМИ ПОВЕРХНЯМИ, Черемних О. К., Данилова В. В. — Аналізуються поперечні дрібномаштабні збурення у довільних тривимірних просторово неоднорідних плазмових космічних системах з магнітними поверхнями. Отримано систему рівнянь для таких збурень. Показано, що у дипольній геометрії магнітного поля реалізуються збурення з двома різними поляризаціями. В рамках дипольної геометрії отримано рівняння для власних МГД-мод, а також досліджено стійкість збурень.*

*TRANSVERSAL SMALL-SCALE MHD PERTURBATIONS IN SPACE PLASMA WITH MAGNETIC SURFACES, by Cheremnykh O. K., Danilova V. V. — Transversal small-scale perturbations in arbitrary three-dimensional (3-D) spatially non-uniform space plasma systems with magnetic surfaces are analysed. A system of equations describing the disturbances is deduced. It is shown that in dipole geometry of magnetic field the distur-*

*bances of two different polarizations can be realized. In the framework of dipole geometry equations for MHD-eigenmodes are obtained and stability of the disturbances is investigated.*

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что для некоторых плазменных космических систем (например для магнитосферной плазмы или солнечных магнитных структур) в ряде случаев наибольшую опасность с точки зрения устойчивости представляют поперечно-мелкомасштабные возмущения. Под указанными возмущениями обычно понимают специальный класс пространственно-ограниченных смещений элементарного плазменного объема. Поэтому для получения уравнений малых колебаний будет использовано уравнение для вектора смещения, полученное в работе [6] для произвольных МГД-возмущений, т. е. будет использован гидродинамический подход. В рамках этого подхода, задавая поперечно-мелкомасштабное смещение элементарного объема плазмы, мы найдем возникающие при этом силы, которые определяют частоты возмущений. Никаких ограничений на возмущенное электромагнитное поле (например, условие замыкания токов или представление электрического поля в виде суммы потенциальной и вихревой частей) накладывать не будем, поскольку заданный вид смещения определяет вид электромагнитных полей. Такой подход позволяет последовательно получить и проанализировать проблему описания поперечно-мелкомасштабных возмущений в трехмерных плазменных системах. При этом, в отличие от подхода [6], мы не будем применять к исходным МГД-уравнениям дифференциальные операторы и не будем использовать вариационные методы, как в [14], что может привести к искажению спектра возмущений. Мы ограничимся только условием поперечной мелкомасштабности возмущений. Полученные результаты применены к дипольной геометрии магнитного поля, часто используемой для описания магнитного поля Земли.

## ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Как было показано в работе [6], в рамках одножидкостной МГД уравнение малых колебаний можно представить в виде

$$\frac{\;^{2}\vec{}}{t^{2}} = a \quad {}_{s} \; a \quad T_{3} \quad \frac{a \quad T_{0}}{|\quad a|^{2}} \quad 2p\,T_{3} \quad \vec{B} \quad T_{1} \quad K \quad +$$

$$\frac{[\vec{B} \quad a]}{|\quad a|^{2}} \; \frac{[\vec{B} \quad a] \quad T_{0}}{|\vec{B}|^{2}} \quad \vec{B} \quad T_{2} \quad [\vec{B} \quad a] \quad T_{3} + \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^{2}}(\vec{B} \quad T_{0}). \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\vec{\ } \qquad \frac{a}{|\ \ a|^2} \qquad \frac{[\vec{B}\quad a]}{|\vec{B}|^2} \quad \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2},$$

$$T_0 \quad p\,\mathrm{div}\vec{\ },\ T_1 \quad \frac{\vec{B}}{|\ \ a|^2},\ T_2 \quad \frac{1}{_s}[\vec{B} \qquad (\ _s \quad s)\ ],$$

$$T_3 \quad \mathrm{div}\vec{\ } \qquad 2\vec{\ }\ \vec{\ } \quad , \qquad (\vec{e} \quad )\vec{e}, \tag{2}$$

$$\vec{e} \quad \vec{B}/|\vec{B}|,\ \ K \quad \frac{_s}{_s}(\ _s \quad s) \ \ \frac{p}{|\vec{B}|^2}\frac{a \quad (2p \ \ |\vec{B}|^2\,)}{|\ \ a|^2},$$

$$(...) \quad \frac{d}{da}(...),\quad _s \quad \frac{|\vec{B}|^2}{|\ \ a|^2},\quad _s \quad \frac{\vec{j}\ \ \vec{B}}{|\ \ a|^2},$$

$$s \quad \frac{[\vec{B}\quad a]}{|\ \ a|^2}\ \mathrm{rot}\frac{[\vec{B}\quad a]}{|\ \ a|^2}.$$

При получении (1) предполагалось, что магнитное поле обладает магнитными поверхностями, под которыми обычно понимают поверхности, содержащие силовые линии магнитного поля и линии тока. Фигурирующая в (1) и (2) величина $a$ называется меткой магнитных поверхностей и удовлетворяет геометрическим уравнениям $\vec{B} \quad a = 0$, $\vec{j} \quad a = 0$. Остальные обозначения в (1) и (2) общепринятые: и $p$ — невозмущенные плотность и давление плазмы, $\vec{j}$, $\vec{E}$ и $\vec{B}$ — плотность равновесного тока, напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{\ }$ — вектор смещения элементарного объема плазмы, — показатель политропы. Для сокращения записи использовано следующее масштабирование электромагнитных величин:

$$\frac{\vec{B}}{\sqrt{4}} \quad \vec{B},\quad \frac{c}{\sqrt{4}}\vec{E} \quad \vec{E},\quad \frac{\sqrt{4}}{c}\vec{j} \quad \vec{j}.$$

Уравнение (1) справедливо для произвольных низкочастотных МГД-возмущений плазмы и не накладывает никаких ограничений на давление, токи и электромагнитные поля. При выводе (1) было учтено, что направления $a$, $[\vec{B}\quad a]$ и $\vec{B}$ являются взаимно ортогональными на выбранной магнитной поверхности, и поэтому по ним можно разложить любую возмущенную величину.

Допустим, что возмущения являются поперечно-мелкомасштабными, т. е. предположим [4, 6], что любая возмущенная составляющая $x$ вектора удовлетворяет неравенствам

$$\frac{|\ \ a \quad x|}{|\ \ a|},\quad \frac{|[\vec{B}\quad a]\quad x|}{|\vec{B}||\ \ a|} \qquad \frac{x}{b},\quad \frac{|\vec{B}\quad x|}{|\vec{B}|}, \tag{3}$$

где $b$ — характерный масштаб изменения равновесных величин. Неравенства (3) означают, что в направлении, поперечном к направлению магнитного поля (далее индекс ), величина $x$ изменяется быстрее, чем в продольном направлении. Кроме того, из (3) следует, что возмущение $x$ мало изменяется на расстоянии порядка $b$. Неравенства (3) удовлетворяются, если вектор смещения $\vec{}$ представить в эйкональном виде [14]

$$\vec{} \quad \hat{\vec{}} \exp \quad i \quad t \quad \frac{iS}{} . \tag{4}$$

Здесь эйконал $S$ описывает перпендикулярную к магнитному полю структуру возмущений и удовлетворяет уравнению $\vec{k} \quad \vec{B} = 0, \vec{k} \; = \; S$, а малый безразмерный параметр ( << 1) разделяет поперечные и продольные масштабы возмущений. В рассматриваемом случае идеальной МГД частота в (4) является либо чисто действительной, либо чисто мнимой величиной. Аналогичным образом представим остальные возмущенные величины

$$T_i \quad \hat{T}_i \exp \quad i \quad t \quad \frac{iS}{} . \tag{5}$$

Малое значение параметра позволяет редуцировать уравнение (1). Подставляя (4) и (5) в (1) и приравнивая нулю слагаемые, пропорциональные $1/ \;^2$ и $1/$ , получаем

$$_s(\vec{k} \quad a)\hat{} \quad ( \; a \; [\vec{k} \quad \vec{B}])\hat{} \quad 0, \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\hat{\vec{}} \quad \mathrm{div}\hat{\vec{}} \quad 2\vec{} \; \hat{\vec{}} \quad 0, \tag{7}$$

где $p/|\vec{B}|^2$. Уравнение (7) позволяет выразить $\mathrm{div}\vec{}$ через $\vec{}$ . Заметим, что похожая связь этих величин впервые была использована в [5] для получения уравнений малых колебаний для крупномасштабных возмущений. В ней фигурировали интегральный оператор и частота колебаний. В отличие от [5] уравнение (7) в рассматриваемом случае мелкомасштабных возмущений имеет более простой вид, поскольку в нем фигурируют только вектор кривизны силовых линий и параметр . Легко показать [8, 11], что уравнение (7) эквивалентно равенству нулю возмущенного полного давления плазмы.

Выписав оставшиеся в (1) слагаемые, находим

$$^2 \; \frac{[\vec{k} \quad [\vec{k} \quad \vec{B}]\hat{}}{a \; [\vec{k} \quad \vec{B}]} \quad \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2}\hat{} \; + \; a \quad \vec{} \; \frac{a}{| \; a|^2}(\hat{T}_0 \quad p \; \hat{})$$

$$\frac{\vec{k} \qquad a}{a \; [\vec{k} \quad \vec{B}]}(s \qquad _s)(\vec{B} \quad \hat{}) \quad \vec{B} \qquad \frac{1}{| \; a|^2}\vec{B} \quad \hat{} \qquad +$$

$$+\frac{[\vec{B}\quad a]}{|\quad a|^2}\quad\frac{_s\quad s}{_s}(\vec{B}\quad\hat{})\quad\frac{2\vec{}\;[\vec{B}\quad a]}{|\vec{B}|^2}(\hat{T}_0\quad p\;\hat{})$$

$$\frac{(\vec{k}\quad a)}{a\;[\vec{k}\quad\vec{B}]}{}_s\vec{B}\quad\frac{1}{_s}\vec{B}\quad\hat{}\quad\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^2}(\vec{B}\quad\hat{T}_0)\quad 0.$$

Умножив это уравнение скалярно на векторы $\dfrac{[\vec{k}\quad\vec{B}]}{a\;[\vec{k}\quad\vec{B}]}$, $\vec{B}$ и $\vec{k}$ , получаем

$$\frac{^2|\vec{k}\quad|^2|\vec{B}|^2}{(\quad a\;[\vec{k}\quad\vec{B}])^2}\hat{}\quad 2(\hat{T}_0\quad p\;\hat{})\frac{\vec{}\;[\vec{k}\quad\vec{B}]}{a\;[\vec{k}\quad\vec{B}]}+$$

$$+\vec{B}\quad\frac{|\vec{k}\quad|^2|\vec{B}|^2}{(\quad a\;[\vec{k}\quad\vec{B}])^2}\vec{B}\quad\hat{}\quad 0,\tag{8}$$

$$^2\hat{}\quad\vec{B}\quad\hat{T}_0\quad 0,\quad\hat{T}_0\quad p\,\mathrm{div}\,\hat{\vec{}},\tag{9}$$

$$(\vec{B}\quad\hat{})\;\frac{(\vec{k}\quad a)(\vec{k}\quad[\vec{B}\quad a])}{_s}\vec{B}\quad\frac{_s}{|\quad a|^2}\quad+$$

$$+\;_s\;\frac{(\vec{k}\quad[\vec{B}\quad a])^2}{_s|\quad a|^2}\quad(\vec{k}\quad a)^2\;+$$

$$+\,s\;\frac{(\vec{k}\quad[\vec{B}\quad a])^2}{_s|\quad a|^2}\quad(\vec{k}\quad a)^2\quad+$$

$$2(p\;\hat{}\quad\hat{T}_0)(\vec{k}\quad[\vec{B}\quad a])(\vec{k}\quad\vec{})\quad 0.\tag{10}$$

Видно, что уравнения (8) и (9) содержат только поверхностные дифференциальные операторы $\vec{B}$ , описывающие распространение возмущений вдоль силовых линий магнитного поля. Известно [2], что в однородном магнитном поле при продольном распространении возмущений реализуются альвеновские и магнитозвуковые волны. Из структуры полученных уравнений видно, что уравнение (8) описывает альвеновские волны, модифицированные давлением, а уравнение (9) — медленные магнитозвуковые волны. Эти волны “сцеплены” друг с другом через вектор кривизны $\vec{}$ силовых линий магнитного поля. Уравнение (10) получено с использованием уравнения (6) и фактически является условием выполнимости уравнения $\vec{k}\quad\hat{\vec{}}=0$ .

Таким образом, исходное уравнение (1) свелось к уравнениям (7)—(10), которые совместно с граничными условиями описывают поперечно-мелкомасштабные возмущения в произвольных плазменных системах с магнитными поверхностями и учитывают сжимаемость среды. Поскольку при их получении к исходным уравнениям не применялись дифференциальные операторы, то последние описывают точный спектр рассматриваемых возмущений.

Из уравнения (7) следует, что фигурирующую в (8) и (9) величину $\hat{T}_0$ можно представить в виде [6]

$$\hat{T}_0 \quad p\,\mathrm{div}\,\hat{\ } \quad \frac{p|\vec{B}|^2}{p\ \ |\vec{B}|^2}\ \vec{B} \quad \frac{\hat{\ }}{|\vec{B}|^2} \quad 2^{\rightarrow}\ \hat{\ } \quad . \tag{11}$$

Уравнения (8), (9) с $\hat{T}_0$ вида (11) были получены в работе [14] с помощью энергетического принципа. Эти же уравнения позднее также были выведены в работе [6]. При этом в последней работе уравнение (7) в расчет не принималось, а уравнение (10) не было получено. Из самой процедуры упрощения (1) следует, что уравнение (7) не является тривиальным промежуточным уравнением, а является точно таким же по значимости уравнением, как и (8) и (9). Что касается (10), то оно совместно с (7) определяет структуру возможных возмущений.

Таким образом, окончательно получаем следующую систему уравнений малых колебаний:

$$^{2}\ \frac{|\vec{k}\ \ |^2|\vec{B}|^2}{(\ \ a\ [\vec{k}\ \ \ \ \vec{B}])^2}\ \hat{\ } \quad \vec{B} \quad \frac{|\vec{k}\ \ |^2|\vec{B}|^2}{(\ \ a\ [\vec{k}\ \ \ \ \vec{B}])^2}\vec{B} \quad \hat{\ }$$

$$\frac{2^{\rightarrow}\ [\vec{k}\ \ \ \ \vec{B}]}{a\ [\vec{k}\ \ \ \ \vec{B}]}\ p\ \hat{\ } \quad \frac{p|\vec{B}|^2}{p\ \ |\vec{B}|^2}\ \vec{B} \quad \frac{\hat{\ }}{|\vec{B}|^2} \quad 2^{\rightarrow}\ \hat{\ } \quad , \tag{12}$$

$$^{2}\hat{\ } \quad p\vec{B} \quad (\mathrm{div}^{\rightarrow}) \quad \vec{B} \quad \frac{p|\vec{B}|^2}{p\ \ |\vec{B}|^2}\ \vec{B} \quad \frac{\hat{\ }}{|\vec{B}|^2} \quad 2^{\rightarrow}\ ^{\rightarrow} \quad , \tag{13}$$

$$\vec{B} \quad \frac{\hat{\ }}{|\vec{B}|^2} \quad (1 \quad )\mathrm{div}^{\rightarrow} \quad 2^{\rightarrow}\ ^{\rightarrow} \quad , \tag{14}$$

$$(\vec{B} \quad \hat{\ })\ \frac{(\vec{k}\ \ \ \ a)(\vec{k}\ \ \ [\vec{B}\ \ \ \ a])}{_{s}}\vec{B} \quad \frac{_{s}}{|\ \ a|^2} \ +$$

$$+\ _{s}\ \frac{(\vec{k}\ \ \ [\vec{B}\ \ \ \ a])^2}{_{s}|\ \ a|^2} \quad (\vec{k}\ \ \ \ a)^2\ +$$

$$+s\ \frac{(\vec{k}\ \ \ [\vec{B}\ \ \ \ a])^2}{_{s}|\ \ a|^2} \quad (\vec{k}\ \ \ \ a)^2 \quad +$$

$$+2\ \ p \quad \frac{p|\vec{B}|^2}{p\ \ |\vec{B}|^2}\ \vec{B} \quad \frac{\hat{\ }}{|\vec{B}|^2} \quad 2^{\rightarrow}\ ^{\rightarrow}$$

$$(\vec{k}\ \ \ [\vec{B}\ \ \ \ a])(\vec{k}\ \ \ ^{\rightarrow}) \quad 0, \tag{15}$$

описывающую поперечно-мелкомасштабные возмущения в произвольной геометрии магнитного поля. Они могут быть решены численно для заданного равновесия плазмы. Вектор $\vec{k}$ в равновесной тороидальной геометрии обычно выражается через локальный магнитный шир [16, 17, 19], а в дипольной — через полоидальный магнитный поток [12, 13].

Уравнения (12)—(14) можно переписать по-другому, выбрав в качестве независимых переменных $\hat{}$ и $\hat{T}_0$. Уравнение (12) представим в виде

$$^{2}\frac{|\vec{k}\;\;|^2}{|\vec{B}|^2}\hat{} + \frac{2}{|\vec{B}|^4}(\hat{T}_0 \quad p\;\hat{})(\vec{}\;\;[\vec{k} \quad \vec{B}])(\;\;a\;[\vec{k} \quad \vec{B}]) +$$

$$+\vec{B} \quad \frac{|\vec{k}\;\;|^2}{|\vec{B}|^2}\vec{B} \quad \hat{} \quad 0. \qquad (16)$$

Исключив из (14) с помощью (13) переменную $\hat{}$, получаем

$$\vec{B} \quad \frac{p}{|\vec{B}|^2\;\;^2}\vec{B} \quad \hat{T}_0 \quad (1 \quad )\hat{T}_0 \quad 2\;p\vec{}\;\;\vec{} \quad 0. \qquad (17)$$

Уравнения (15)—(17) представляют собой эквивалентную форму записи уравнений (12)—(15). Они обобщают уравнения Девара — Глассера [14] для поперечно-мелкомасштабных возмущений в плазме с конечным давлением.

**ДИПОЛЬНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

Полученные в предыдущем разделе уравнения (15)—(17) имеют довольно сложный вид и могут быть упрощены только для достаточно простых магнитных конфигураций. Рассмотрим, как выглядят указанные уравнения в дипольном магнитном поле, которое является простейшей моделью криволинейного магнитного поля, и до шести радиусов Земли хорошо аппроксимирует геомагнитное поле. Для такого поля справедливы равенства

$$s \quad _s \quad 0, \quad \vec{}\;\;[\vec{B} \quad a] \quad 0,$$

а метка магнитной поверхности $a$ совпадает с полоидальным магнитным потоком [12, 13]. Уравнение (15) для рассматриваемой магнитной конфигурации принимает вид

$$(\vec{k} \quad a)(\vec{k} \quad [\vec{B} \quad a])$$

$$(\vec{B} \quad \hat{})\frac{1}{_s}\vec{B} \quad \frac{_s}{|\;\;a|^2} \quad 2(p\;\hat{} \quad \hat{T}_0)\frac{\vec{}\;\;a}{|\;\;a|^2} = 0. \qquad (18)$$

Из (18) следует, что уравнения (16)—(17) допускают нетривиальные решения при $(\vec{k} \quad a) = 0$ и при $(\vec{k} \quad [\vec{B} \quad a]) = 0$ .

Согласно (6) случай $(\vec{k} \quad [\vec{B} \quad a]) = 0$ (т. е. $\vec{k} \quad a$, поскольку вектор $\vec{k}$ может быть разложен по направлениям $a$ и $[\vec{B} \quad a]$) реализуется при $\hat{} = 0$ и $\hat{} \quad 0$. Уравнения (16) и (17) в этом случае принимают вид

$$\frac{}{_s} \quad {}^2\hat{} \quad \vec{B} \quad \frac{1}{_s}\vec{B} \quad \hat{} \quad 0, \tag{19}$$

$$\vec{B} \quad \frac{p}{{}^2|\vec{B}|^2}\vec{B} \quad \mathrm{div}\hat{} \quad (1 \quad )\mathrm{div}\hat{} \quad 0. \tag{20}$$

Заметим, что уравнения в виде (19) и (20) ранее были получены в работе [10] и описывают магнитосферные резонансы магнитных силовых линий.

Второе нетривиальное решение реализуется при $(\vec{k} \quad a) = 0$ (т. е. при $\vec{k} \quad [\vec{B} \quad a]$), когда $\hat{} \quad 0$, $\hat{} = 0$. Для такого случая из (16), (17) следуют уравнения

$$\frac{}{| \quad a|^2} \quad {}^2\hat{} \quad \vec{B} \quad \frac{1}{| \quad a|^2}(\vec{B} \quad \hat{}) \quad \frac{2\vec{} \quad a}{| \quad a|^2}(p \quad \hat{} \quad p\mathrm{div}\hat{}) \quad 0, \tag{21}$$

$$\vec{B} \quad \frac{p}{{}^2|\vec{B}|^2}\vec{B} \quad \mathrm{div}\hat{} \quad (1 \quad )\mathrm{div}\hat{} \quad \frac{2(\vec{} \quad a)\,\hat{}}{| \quad a|^2} \quad 0, \tag{22}$$

которые, как было показано в работе [8], описывают резонансные полоидальные альвеновские моды, зацепленные с медленными магнитозвуковыми модами через радиальную кривизну силовых линий магнитного поля.

Покажем, что в дипольном магнитном поле могут реализоваться специфические альвеновские волны, обусловленные сжимаемостью среды $\mathrm{div}\hat{} \quad 0$. С этой целью рассмотрим возмущения, удовлетворяющие условию

$$\mathrm{div}\hat{} \quad \frac{2(\vec{} \quad a)\,\hat{}}{| \quad a|^2} \quad 0. \tag{23}$$

Из (22) и (23) получаем уравнение

$${}^2\mathrm{div}\hat{} \quad |\vec{B}|^2\,\vec{B} \quad \frac{1}{|\vec{B}|^2}\vec{B} \quad (\mathrm{div}\hat{}) \quad 0, \tag{24}$$

описывающее альвеновские волны, существующие только в сжимаемой среде. Уравнение (21) для возмущений, удовлетворяющих (23), принимает вид

$$\frac{\;^{2}}{|\ \ a|^{2}}\hat{\ }\quad \vec{B}\qquad \frac{1}{|\ \ a|^{2}}(\vec{B}\quad \hat{\ })\ +$$

$$+\frac{2(\vec{\ }\quad a)}{|\ \ a|^{2}}\ p\quad 2\ p\frac{2(\vec{\ }\quad a)}{|\ \ a|^{2}}\ \hat{\ }\qquad 0 \tag{25}$$

и описывает “обычные” альвеновские волны, модифицированные давлением. В случае 0 уравнение (25) переходит в уравнение для полоидальных альфвеновских волн [13].

**НЕСЖИМАЕМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ**

Из уравнений (19)—(22) следует, что при конечных частотах несжимаемые возмущения div $\hat{\vec{\ }}$ = 0 в дипольном магнитном поле генерируются только в виде тороидальных альфвеновских мод (19). Заметим, что несжимаемые возмущения возможны также при 0. Действительно, даже если возмущения при конечных частотах реализуются в виде сжимаемых возмущений, то при 0, как следует из (13), они становятся несжимаемыми.

Если 0, то уравнение (21) принимает вид

$$2p\,\frac{(\vec{\ }\quad a)}{|\ \ a|^{2}}\hat{\ }\quad \vec{B}\qquad \frac{1}{|\ \ a|^{2}}\vec{B}\quad \hat{\ }\qquad 0 \tag{26}$$

и описывает границу устойчивости идеальных баллонных мод в дипольном магнитном поле. Это уравнение можно также рассматривать как уравнение для квазистационарных баллонных возмущений с большим периодом, которые часто реализуются в космической плазме.

Для получения критерия устойчивости с помощью (26) используем энергетический принцип [9]. Следуя ему, умножим (26) на $\hat{\ }$ и проинтегрируем по объему возмущенной плазмы. В результате получаем выражение для потенциальной энергии $W$ возмущенного состояния плазмы на границе устойчивости:

$$W\quad \frac{1}{2}\ dV\ \frac{1}{|\ \ a|^{2}}(\vec{B}\quad \hat{\ })^{2}\quad 2p\,\frac{(\vec{\ }\quad a)}{|\ \ a|^{2}}\hat{\ }^{2}\qquad 0. \tag{27}$$

Первое слагаемое в (27) описывает эффект стабилизации, обусловленный изгибанием силовых линий магнитного поля, а второе — дестабилизирующее влияние градиента давления. Положительность квадратичной формы (27) ($W > 0$) гарантирует устойчивость плазмы относительно несжимаемых поперечно-мелкомасштабных возмущений.

Видно, что интеграл (27) может обратиться в ноль лишь за счет слагаемого, пропорционального $\vec{\ }$ $p$. Поэтому неравенство [6, 12]

$$\vec{\ } \quad p \quad 0 \tag{28}$$

является простейшим достаточным условием устойчивости плазмы относительно поперечно-мелкомасштабных возмущений с конечным давлением, т. е. баллонных мод, в дипольной геометрии. Для устойчивости достаточно, как видно из (28), чтобы силовая линия имела “благоприятную” кривизну, т. е. была выгнута в сторону увеличения давления. Таким образом, в магнитных конфигурациях неустойчивые баллонные моды реализуются на отрезке силовой линии, где кривизна является “неблагоприятной”, т.е. где выполняется условие $\quad p > 0$.

Для анализа неустойчивых возмущений с помощью (26) удобно перейти к производной вдоль силовой линии магнитного поля, представив оператор $\vec{B}$ в виде $\vec{B} \quad = |\vec{B}|\frac{}{l}$, где $l$ — длина дуги силовой линии магнитного поля. В результате получаем

$$|\vec{B}|\frac{}{l} \quad \frac{1}{|\quad a|^2}|\vec{B}|\frac{\hat{}}{l} \qquad \frac{2}{|\quad a|^2}(\vec{\ } \quad p)\hat{} \quad 0. \tag{29}$$

Фигурирующие в этом уравнении величины берутся на силовой линии. Пусть неустойчивые возмущения лежат в пределах $0 \quad l \quad L$, где справедливо неравенство $\quad p > 0$, и изменяются на этом интервале гораздо быстрее, чем равновесные величины. Для таких возмущений из (29) получаем

$$\frac{{}^2\hat{}}{l^2} \quad \frac{2}{|\vec{B}|^2}| \quad p|\hat{} \quad 0,$$

откуда следует

$$\hat{} \quad \hat{}_0 \sin \sqrt{\frac{2|\vec{\ } \quad p|}{|\vec{B}|^2}}\, l \; . \tag{30}$$

Из условия обращения в ноль возмущений на концах интервала находим

$$\sqrt{\frac{2|\vec{\ } \quad p|}{|\vec{B}|^2}} \quad \frac{}{L/n}. \tag{31}$$

Если пренебречь зависимостью радиуса кривизны силовой линии от координаты вдоль нее и перейти к обычному масштабированию магнитного поля ($\vec{B} \quad \vec{B}/\sqrt{4\ }$), то уравнение (31) можно представить в виде

$$L \quad n \, \frac{Rb}{}^{\;1/2} . \tag{32}$$

Здесь $p/| \quad p| \quad b, |\vec{\ }| \quad 1/R, \quad = 8 \quad p/|\vec{B}|^2$. Из (32) следует, что условие отсутствия решений или, что то же самое, условие устойчивости плазмы, можно записать как

$$L < \quad \frac{Rb}{\ } \ . \qquad (33)$$

Критерий устойчивости баллонных возмущений (33) совпадает с критерием, приведенным в [4]. Из него следует, что характерная длина интервала неустойчивости должна быть меньше некоторого геометрического размера плазменной системы. Видно, что при $\quad 0$ поперечно-мелкомасштабные возмущения заведомо устойчивы.

В случае $L \quad \sqrt{Rb/\ }$ , то на силовой линии реализуется единственное ($n$ = 1) возмущение в виде "шлемоподобной" структуры. Такие возмущения генерируются в солнечных корональных петлях, хорошо наблюдаются экспериментально [7] и являются первоначальным зародышем формирующегося коронального выброса массы на Солнце [3] — плазменного образования, отвечающего за магнитные бури в окрестности Земли. Такие же возмущения наблюдаются космическими аппаратами [18] в ночном секторе магнитосферы Земли на расстоянии порядка десяти радиусов Земли. На нелинейной стадии баллонное возмущение имеет вид "пальца", вытянутого в направлении "хвоста" магнитного поля Земли. Отличительной особенностью "шлемоподобных" и "пальцевых" структур является их медленное изменение (т. е. квазистационарность), что соответствует $\quad 0$ .

В случае $L >> \sqrt{Rb/\ }$ согласно (32) решение (31) представляет собой "гребенку", состоящую из множества возмущений ($n$ >> 1) с одинаковой амплитудой

$$\hat{\ } \quad \hat{\ }_0 \sin \ \frac{l}{L/n} \ . \qquad (34)$$

Решение (34) согласуется с методом "эквивалентных гармоник" [5], применяемым для описания устойчивости тороидальных плазменных структур.

## СЖИМАЕМЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Рассмотренные выше несжимаемые возмущения (div $\hat{\vec{\ }}$ = 0) являются только одним из возможных возмущений, реализующихся на границе устойчивости. В общем случае на границе устойчивости справедливо равенство div $\hat{\vec{\ }}$ = $C$ = const. Чтобы убедиться в этом, обратимся к уравнениям (13) и (14), которые для рассматриваемых возмущений имеют вид

$$^{2}\hat{\ } \quad p\vec{B} \quad (\mathrm{div}\,\hat{\vec{\ }}) \quad 0, \qquad (35)$$

$$\vec{B} \quad \frac{\hat{\ }}{|\vec{B}|^2} \quad (1 \quad )\mathrm{div}\,\hat{\vec{\ }} \quad \frac{2(\quad a)}{|\quad a|^2}\hat{\vec{\ }}, \qquad (36)$$

и из которых вытекает уравнение (17). При $^2$ 0 из (35) следует div$\hat{}$ = const. Тогда уравнение (36) принимает вид

$$\vec{B} \quad \frac{}{l} \frac{\hat{}}{|\vec{B}|^2} \quad (1 \quad )C \quad \frac{2(\vec{} \quad a)}{| \quad a|^2}\hat{}. \tag{37}$$

Представив дифференциальный оператор $\vec{B}$ в виде производной вдоль силовой линии $\vec{B} \quad = |\vec{B}| \quad / \quad l$, из (37) получаем

$$|\vec{B}|\frac{}{l} \frac{\hat{}}{|\vec{B}|^2} \quad (1 \quad )C \quad \frac{2(\vec{} \quad a)}{| \quad a|^2}\hat{} \quad 0. \tag{38}$$

Константу $C$ найдем, используя граничные условия для $\hat{}$. Для определенности считаем, что рассматриваемые возмущения локализованы на силовой линии магнитного поля между точками $l = 0$ и $l = L$, например как в магнитных петлях в атмосфере Солнца или в магнитосфере Земли. Интегрируя получившееся уравнение вдоль силовой линии магнитного поля, находим

$$C \quad \frac{\left.\frac{\hat{}}{|\vec{B}|^2}\right|_0^L \quad 2\int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}\frac{(\vec{} \quad a)}{| \quad a|^2}\hat{}}{\int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|(1 \quad )}}. \tag{39}$$

На границе устойчивости уравнение (21) для рассматриваемых сжимаемых возмущений принимает вид

$$2(p \qquad pC)\frac{\vec{} \quad a}{| \quad a|^2} \quad \vec{B} \qquad \frac{1}{| \quad a|^2}\vec{B} \quad \hat{} \qquad 0. \tag{40}$$

Уравнение (40) отличается от уравнения (26) модификацией слагаемого с давлением

$$p\,\hat{} \qquad p\,\hat{} \qquad pC. \tag{41}$$

Поскольку при $l = 0$ и $l = L$ амплитуда $\hat{}$ обычно является линейной функцией $\hat{}$, и в общем случае не удовлетворяет условию $C = 0$, то граница устойчивости, определяемая из (40), может приводить к более мягким условиям для генерации неустойчивых возмущений. В частности, в работе [12] было показано, что из-за граничных условий на ионосфере в магнитосферной плазме реализуются неустойчивые желобковые возмущения с более мягким ограничением на градиент давления магнитосферной плазмы по сравнению с ранее известным критерием Голда — Кадомцева [1, 15] для этого случая.

Если же силовая линия магнитного поля является замкнутой, или амплитуда $\hat{}$ обращается в ноль при $l = 0$ и $l = L$, то слагаемое, описывающее продольное смещение $\hat{}$, в (39) исчезает. В результате постоянная величина $C$ описывает только стабилизирующее влияние сжимаемости. В этом случае уравнение (40) дает более мягкий критерий устойчивости по сравнению с критерием для несжимаемых возмущений, вытекающим из (39).

Следуя подходу, изложенному в предыдущем разделе, составим из (40) интеграл $W$ потенциальной энергии возмущений на границе устойчивости:

$$W \quad \frac{1}{2} \quad d \quad \int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|\,|\quad a|^2} \quad |\vec{B}|\frac{\hat{}}{l}^{\,2} \quad 2(\vec{}\quad p)\hat{}^{\,2} \; +$$

$$+\frac{4\ \ p \left(\int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}\frac{(\vec{}\quad a)\hat{}}{|\quad a|^2}\right)^2}{\int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}(1 \qquad )} \quad . \tag{42}$$

Здесь $dV = d\ \ dl$ — объем магнитной силовой трубки с поперечным сечением $d \qquad d\ \ (l)$, а $l$, как и раньше, — расстояние вдоль силовой линии магнитного поля. Этой силовой трубке соответствует магнитный поток $d \qquad B(l)d\ \ (l)$, не зависящий от $l$.

Устойчивости плазмы соответствует неравенство $W > 0$. Первое стабилизирующее слагаемое в (42) будет равно нулю для возмущений желобкового типа $\hat{}\ /\ \ l = 0$, т. е. для $\hat{}\,(l) = \mathrm{const}$. Это означает, что по отношению к желобковым возмущениям плазма обладает лишь стабилизирующей упругостью, обусловленной ее сжимаемостью (третье слагаемое в (42)). Поэтому, если имеется достаточно большое давление, направленное в сторону “неблагоприятной” кривизны силовых линий магнитного поля $(\vec{}\quad p > 0)$, то указанные возмущения начнут нарастать со временем. Подставляя в (42) возмущения $\hat{}\,(l) = \mathrm{const}$, получаем локальный критерий устойчивости относительно желобковых возмущений в виде

$$2\ \ p \left(\int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}\frac{(\vec{}\quad a)}{|\quad a|^2}\right)^2 > \frac{dp}{da}\int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}(1 \qquad ) \int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}\frac{(\vec{}\quad a)}{|\quad a|^2} \quad . \tag{43}$$

Как показано в Приложении, критерий (43) эквивалентен критерию устойчивости Шпиза [20]

$$(\ \ p\dot{U} \quad \dot{p}U)\ \dot{U} \quad \dot{p}U\left\langle \frac{1}{|\vec{B}|^2} \right\rangle > 0. \tag{44}$$

Здесь использованы обозначения

$$U \quad \int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}, (\dot{\ldots}) \quad d(\ldots)/da, \quad \langle \ldots \rangle \quad \int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}(\ldots) \Big/ \int_0^L \frac{dl}{|\vec{B}|}, \tag{45}$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по объему слоя между бесконечно близкими магнитными поверхностями. В пределе малого давления второе слагаемое в (44) может быть заменено на $\dot{U}$, и критерий (44) переходит в критерий Голда — Кадомцева [1, 15]

$$p\dot{U} \quad \dot{p}U \quad 0. \tag{46}$$

Из (44) видно, что вторая область устойчивости

$$\dot{U} \quad \dot{p}U\left\langle \frac{1}{|\vec{B}|^2} \right\rangle \quad 0 \tag{47}$$

существенно зависит от .

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ**

В работе получены следующие основные результаты.

1. Получена система уравнений (15)—(17) (или эквивалентная ей система (12)—(15)) для поперечно-мелкомасштабных возмущений в плазме с магнитными поверхностями, обобщающая систему уравнений Девара — Глассера.

2. Показано, что уравнения (14), (15) накладывают дополнительные ограничения на продольные и поперечные компоненты вектора смещения. Их добавление к уравнениям Девара — Глассера (12) и (13) приводит к ограничениям на типы возможных возмущений.

3. Прямыми расчетами из уравнений МГД можно показать, что вектор $\vec{k}$ параллелен вектору возмущенного электрического поля. Поэтому из (15)—(17) следует, что в дипольном магнитном поле реализуются возмущения с двумя поляризациями ($\vec{k}$ $a$ и $\vec{k}$ $[\vec{B}$ $a]$). Для этих поляризаций получены уравнения (19), (21) и (22), описывающие тороидальные альвеновские моды и полоидальные альвеновские моды, ”зацепленные” через радиальную кривизну силовых линий магнитного поля с медленными магнитозвуковыми модами.

4. Установлено, что в плазменной среде могут реализовываться специфические полоидальные альвеновские моды, описываемые уравнением (24) и обусловленные сжимаемостью плазменной среды div $\vec{\ }$ 0.

5. Отмечено, что в дипольной геометрии магнитного поля несжимаемые поперечно-мелкомасштабные возмущения с конечными частотами реализуются только в виде тороидальных альфвеновских мод. Из уравнения (26) показано, что при 0 реализуются баллонные моды. Из этого уравнения получено квазистационарное решение, которое описывает “шлемоподобные” структуры в солнечных корональных петлях и “пальцевые” структуры в магнитосфере Земли.

6. Обращено внимание на то обстоятельство, что в ограниченной плазменной среде магнитосферы несжимаемые возмущения не явля-

ются самыми опасными с точки зрения устойчивости. Пояснено, что из-за граничных условий, обусловленных конечной проводимостью ионосферы, возможна реализация сжимаемых возмущений с более “мягким” критерием неустойчивости магнитосферной плазмы, по сравнению с критерием для несжимаемых возмущений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Получим критерий устойчивости (44). Для упрощения (43) представим магнитное поле в виде

$$\vec{B} \quad [\ a \quad b], \tag{П.1}$$

где $a$, как и выше, выберем в качестве метки магнитных поверхностей. Из уравнения магнитостатического равновесия и выражения для вектора кривизны магнитного поля

$$p \quad [\vec{j} \quad \vec{B}],$$

$$\vec{\ } \quad \frac{(2p \quad |\vec{B}|^2)}{2|\vec{B}|^2} \quad \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|^4}(\vec{B} \quad )\frac{|\vec{B}|^2}{2},$$

получаем

$$\frac{\vec{\ }\ [\ b \quad \vec{B}]}{|\vec{B}|} \quad \frac{1}{2}\frac{dp}{da}\frac{1}{|\vec{B}|^2} \quad \frac{1}{2}\mathrm{div}\ \frac{[\ b \quad \vec{B}]}{|\vec{B}|^2}\ . \tag{П.2}$$

Учитывая, что

$$\frac{\vec{\ }\ [\ b \quad \vec{B}]}{|\vec{B}|^2} \quad \frac{\vec{\ } \quad a}{|\ \ a|^2},$$

из (П.2) находим

$$\frac{dl}{|\vec{B}|}\frac{(\quad a)}{|\ \ a|^2} \quad \frac{1}{2}\frac{dp}{da}U\left\langle \frac{1}{|\vec{B}|^2} \right\rangle \quad \frac{1}{2}\ \frac{dl}{|\vec{B}|}\mathrm{div}\ \frac{[\ b \quad \vec{B}]}{|\vec{B}|^2}\ , \tag{П.3}$$

где величины $U$ и $\langle ... \rangle$ определены (45).

Преобразуем второе слагаемое справа в (П.3), учитывая, что элемент $dV$ объема плазмы можно представить в виде

$$dV \quad \frac{ds\,da}{|\ \ a|} \quad \frac{dadbdl}{|\vec{B}|}. \tag{П.4}$$

Здесь $ds$ — элемент площади на магнитной поверхности $a = \mathrm{const}$. Тогда искомое слагаемое принимает вид

$$\frac{dl}{|\vec{B}|}\mathrm{div}\ \frac{[\ b \quad \vec{B}]}{|\vec{B}|^2} = \frac{d}{da}\frac{d}{db} \quad \frac{dadbdl}{|\vec{B}|}\mathrm{div}\ \frac{[\ b \quad \vec{B}]}{|\vec{B}|^2} =$$

$$= \frac{d}{da}\frac{d}{db} \quad \frac{\vec{n} \ [ \ \ b \ \ \ \vec{B}]}{|\vec{B}|^2} ds = \frac{d}{da}\frac{d}{db} \quad \frac{dbdl}{|\vec{B}|} \quad \frac{d}{da} \quad \frac{dl}{|\vec{B}|} \quad \frac{dU}{da}. \qquad (П.5)$$

При получении (П.5) было учтено, что $\vec{n} = \quad a/| \quad a|$.

Из (43) и (П.2)—(П.5) после простых алгебраических преобразований получаем критерий устойчивости (44).


1. *Кадомцев Б. Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат, 1963.—Вып. 2.—С. 132—176.
2. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.—304 с.
3. *Кременецкий И. А., Черемных О. К.* Космическая погода: механизмы и проявления. — Киев: Наук. думка, 2009.—144 с.
4. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. — М.: Атомиздат, 1977.—Т. 2.—306 с.
5. *Погуце О. П., Юрченко Э. И.* Баллонные эффекты и устойчивость плазмы в токамаке // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоиздат, 1987.—Вып. 11.—С. 56—117.
6. *Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д.* Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы / Под ред. Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоиздат, 1987.—Вып. 15.—С. 146—293.
7. *Цап Ю. Т., Копылова Ю. Г., Степанов А. В.* Баллонная неустойчивость и колебания корональных петель // Астрон. журн.—2006.—№ 12.—С. 1142—1152.
8. *Черемных О. К.* К вопросу о резонансных МГД-возмущениях в магнитосферной плазме // Космічна наука и технологія.—2010.—16.—С. 57—63.
9. *Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M.* An energy principle for hydromagnetic stability problems // Proc. Roy. Soc. London A.—1958.—244.—P. 17—40.
10. *Cheng C. Z., Chang T. C., Lin C. A., Tsai W. H. J.* Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere // J. Geophys. Res.—1993.—**98A**, N 7.—P. 11339—11347.
11. *Cheremnykh O. K.* Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces // Plasma Phys. Contr. Fusion.—2010.—**52**.
12. *Cheremnykh O. K., Parnovski A. S.* Flute and ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth: Stability and influence of the ionospheric conductivity // Space Science: New Research / Ed. by Nick S. Maravell. — New York: Nova Sci. Publs Inc., 2006.—P. 71—108.
13. *Cheremnykh O., Parnowski A., Burdo O.* Ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // Planet. Space Sci.—2004.—**55**.—P. 1217—1229.
14. *Dewar R. L., Glasser A. H.* Ballooning mode spectrum in general toroidal systems // Phys. Fluids.—1983.—**26**.—P. 3038—3052.
15. *Gold T. I.* Motions in the magnetosphere of the Earth // J. Geophys.Res.—1959.—64.—P. 1219—1226.
16. *Guthbert P., Lewandowski J. L. V., Gardner H. J., et al.* Toroidally localized and nonlocalized ballooning instabilities in a stellarator // Phys. Plasmas.—1998.—5.—P. 2921—2931.
17. *Hazeltine R. D., Meiss J. D.* Shear-Alfven dynamics of toroidally confined plasmas // Phys. Repts.—1985.—**121**, N 1-2.—P. 1—167.

18. *Hurricane O. A., Fong B. H., Cowley S. C., et al*. Substorm detonation // J. Geophys. Res.—1999.—**104A**, N 5.—P. 10221—10231.

19. *Nakajima N*. High-mode-number ballooning modes in a heliotron/torsatron system. II. Stability // Phys. Plasmas.—1996.—**3**.—P. 4556—4567.

20. *Spies G. O.* Magnetohydrodynamic stability theory with closed magnetic field lines // Phys. Fluids.—1974.—**17**.—P. 400—407.

Поступила в редакцию 10.08.09