

УДК 523.9-72

Ю. И. ФедоровГлавная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины
03680 Киев, ул. Заболотного 27**Статистическое ускорение космических лучей
в анизотропной турбулентной среде**

Исследуется ускорение космических лучей при их взаимодействии с анизотропной магнитогидродинамической турбулентной средой. Ускорение частиц обусловлено крупномасштабным электрическим полем, возникающим в турбулентной среде вследствие альфа-эффекта. Проведено сравнение равновесных спектров космических лучей, характерных для данного механизма ускорения, с энергетическими распределениями частиц, соответствующими статистическому ускорению Ферми.

СТАТИСТИЧНЕ ПРИСКОРЕННЯ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ У АНІЗОТРОПНОМУ ТУРБУЛЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ, Федоров Ю. І. — Досліджується прискорення космічних променів при їхній взаємодії з анізотропним, магнітогідродинамічним турбулентним середовищем. Прискорення частинок зумовлене великомасштабним електричним полем, яке виникає у турбулентному середовищі внаслідок альфа-ефекту. Стаціонарні спектри космічних променів, характерні для даного механізму прискорення, порівнюються з енергетичними розподілами частинок, які відповідають статистичному прискоренню Фермі.

STATISTICAL ACCELERATION OF COSMIC RAYS IN ANISOTROPIC TURBULENT MEDIUM, by Fedorov Yu. I. — The acceleration of cosmic rays caused by their interaction with anisotropic magnetohydrodynamical turbulence is studied. The particle acceleration is due to a large scale electric field generated in the turbulent medium owing to alpha-effect. The equilibrium cosmic ray spectra typical to the given acceleration mechanism are compared with particle energy distributions corresponding to the stochastic Fermi acceleration.

ВВЕДЕНИЕ

При взаимодействии быстрых заряженных частиц с плазменной турбулентностью имеет место статистическое ускорение частиц (ускорение Ферми) [6, 7, 19, 25]. Данный механизм ускорения обусловлен взаимодействием космических лучей (КЛ) со случайно движущимися неоднородностями магнитного поля [19] или магнитогидродинамическими (МГД) волнами [6, 7, 25, 27]. Статистическое ускорение Ферми широко используется при описании генерации КЛ в солнечных вспышках, остатках сверхновых, галактическом центре и других астрофизических объектах [8, 9, 14, 24, 25, 27, 29].

Другой возможный механизм ускорения частиц обусловлен взаимодействием КЛ с анизотропной МГД-турбулентностью [4]. В турбулентной, анизотропной среде генерируются крупномасштабные магнитные и электрические поля [3, 5], причем возникающее вследствие -эффекта электрическое поле может эффективно ускорять космические лучи [4, 16, 17, 20]. Этот механизм ускорения КЛ был впервые исследован в работах Л. Кичатинова, в которых было получено уравнение статистического ускорения КЛ и оценено характерное время ускорения частиц [4, 20]. В работе [16] был проведен вывод кинетического уравнения, учитывающего флуктуации магнитного поля и гидродинамической скорости среды и получено уравнение переноса КЛ в анизотропной, турбулентной среде.

В настоящей работе на основании уравнения переноса КЛ исследуется стохастическое ускорение быстрых частиц при их взаимодействии с плазменной турбулентностью. Получено точное аналитическое решение уравнения статистического ускорения частиц, транспортный пробег которых не зависит от их энергии. При степенной зависимости пробега от импульса частицы приведены приближенные решения уравнения переноса КЛ. Анализируются равновесные энергетические спектры ускоренных частиц и обсуждается применимость полученных результатов для интерпретации энергетического распределения солнечных космических лучей.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Рассмотрим распространение КЛ в среде с высокой проводимостью, которая имеет гидродинамическую скорость \mathbf{u} . Электрическое поле, действующее на быстрые заряженные частицы, определяется соотношением

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}],$$

где \mathbf{H} — магнитное поле, которое можно представить в виде суммы регулярной (\mathbf{H}_0) и случайной (\mathbf{H}_1) составляющих:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_1.$$

Скорость среды также имеет вид суперпозиции

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1,$$

где \mathbf{u}_0 — средняя скорость среды, \mathbf{u}_1 — флуктуирующая составляющая.

Известно, что в анизотропной турбулентной среде возникает крупномасштабное электрическое поле, направленное вдоль регулярной составляющей магнитного поля (-эффект) [3, 5]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \langle [\mathbf{u}_1 \mathbf{H}_1] \rangle - \mathbf{H}_0, \quad (1)$$

причем коэффициент пропорционален спиральности турбулентной среды, а угловые скобки в уравнении (1) обозначают усреднение по ансамблю случайных полей. Электрическое поле (1), возникающее в анизотропной турбулентной среде, может эффективно ускорять заряженные частицы высоких энергий (-ускорение КЛ) [4]. Запишем уравнение переноса КЛ, которое получено в диффузионном приближении из кинетического уравнения для средней функции распределения частиц [16],

$$\frac{N}{t} - \frac{1}{p^2} \frac{d}{dp} p^2 D_p \frac{N}{p} = 0, \quad (2)$$

где $N(p, t)$ — концентрация частиц с данным значением импульса p , а величина D_p представляет собой коэффициент диффузии КЛ в пространстве абсолютных значений импульса частиц. Отметим, что рассматривается пространственно однородный случай, когда функция распределения КЛ не зависит от пространственных координат. Коэффициент диффузии КЛ по импульсам D_p может быть представлен в виде суммы

$$D_p = D_F + D_K. \quad (3)$$

Первое слагаемое в соотношении (3) описывает статистическое ускорение Ферми [19], обусловленное взаимодействием частиц с неоднородностями магнитного поля, движущимися со случайными скоростями [6, 7]

$$D_F = \frac{p^2 \langle u_1^2 \rangle}{3v}, \quad (4)$$

где λ — транспортный пробег частицы, а параметр β определяется соотношением между регулярным и случайным магнитными полями [16]. Если напряженности случайного и регулярного магнитных полей одного порядка, то величина β порядка единицы (в дальнейшем в соотношении (4) положим $\beta = 1$). Второе слагаемое в (3) описывает ускорение КЛ электрическим полем (1), возникающим в анизотропной турбулентной среде вследствие -эффекта. Величина D_K имеет вид [4, 16, 20]

$$D_K = \frac{2}{3} \frac{p^2}{vR^2}, \quad (5)$$

где $R = pc / (eH_0)$ — ларморов радиус частицы в регулярном магнитном поле.

Относительная эффективность процесса γ -ускорения (по отношению к ускорению Ферми второго рода) определяется формулой

$$\frac{D_K}{D_F} = \frac{v^2}{\langle u_1^2 \rangle} \frac{1}{R^2}. \quad (6)$$

Величина $v^2 / \langle u_1^2 \rangle$ является мерой гиротропности турбулентной среды, в космической плазме это безразмерное отношение обычно значительно меньше единицы [10—12, 23, 30]. Теоретические расчеты величины $v^2 / \langle u_1^2 \rangle$ для конвективной зоны Солнца позволяют получить оценку $v^2 / \langle u_1^2 \rangle = 0.01 \dots 0.001$ [21, 28]. Транспортный пробег для частиц с энергиями от нескольких МэВ до сотен МэВ может превышать ларморов радиус R более чем на два порядка величины как для межпланетной среды [13, 26], так и для солнечной короны [15]. Таким образом, для различных астрофизических объектов величина (6), характеризующая относительную эффективность процесса γ -ускорения, может значительно превосходить единицу для широкого диапазона энергий частиц [4, 16, 17, 20]. Отметим, что относительная эффективность γ -ускорения КЛ (6) не зависит от энергии частиц, транспортный пробег которых пропорционален их импульсу. Если величина $v^2 / \langle u_1^2 \rangle$ увеличивается с увеличением импульса частицы медленнее, чем по линейному закону, то относительная эффективность γ -ускорения уменьшается при увеличении энергии КЛ. Наоборот, если пробег увеличивается при увеличении энергии быстрее, чем импульс частицы, то γ -ускорение преобладает для КЛ высоких энергий [4, 16, 17, 20].

РАВНОВЕСНЫЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЧАСТИЦ С ПОСТОЯННЫМ ТРАНСПОРТНЫМ ПРОБЕГОМ

Заряженные частицы высокой энергии могут испытывать энергетические потери, а также покидать область ускорения вследствие диффузии или конвекции. Эти процессы приводят к «убеганию» частиц из данной энергетической области, в которой они возникают вследствие стохастического ускорения КЛ в турбулентной среде. Для учета энергетических потерь обычно вводится характерное время t_e . В этом приближении уравнение переноса (2) может быть записано в виде [14, 25, 29]

$$\frac{N}{t} = \frac{1}{p^2} \frac{d}{dp} p^2 D_p \frac{N}{p} - \frac{N}{t_e} = q \frac{(p - p_0)}{p^2}. \quad (7)$$

Третий член в левой стороне этого уравнения описывает энергетические потери частиц. Правая часть уравнения соответствует непрерывной инжекции частиц с импульсом p_0 , причем в единицу времени

в единице объема испускается q частиц. Заметим, что при постоянной инжекции частиц энергетическое распределение КЛ со временем стремится к равновесному, для которого число ускоренных частиц, возникающих в данном интервале энергии, равно числу частиц, покидающих этот энергетический интервал вследствие потерь. Нестационарные решения уравнения (7) позволяют оценить характерное время установления равновесного энергетического спектра. Так, например, для физических условий, характерных для активных областей солнечной короны, стационарный спектр КЛ вплоть до энергий порядка ГэВ устанавливается за несколько секунд [15, 18, 25].

Будем рассматривать установившиеся равновесные энергетические распределения частиц, которым соответствуют стационарные решения уравнения переноса (7). Предположим, что энергетические потери КЛ обусловлены выходом частиц из области ускорения вследствие диффузии. В этом случае время убегания t_e уменьшается с увеличением энергии, то есть высокоэнергичные частицы покидают область ускорения быстрее [9, 14, 29]. В ряде работ исследовалось ускорение КЛ в приближении постоянного времени убегания t_e [18, 25, 29]. Отметим, что случаю $t_e = \text{const}$ соответствует диффузионный перенос частиц с постоянным коэффициентом диффузии или конвективный вынос КЛ из области ускорения.

Определим безразмерный импульс частицы соотношением

$$\frac{p}{mc}, \quad (8)$$

где m — масса покоя частицы. Скорость частицы v зависит от безразмерного импульса согласно формуле

$$v = \frac{pc}{\sqrt{1 + p^2/c^2}}. \quad (9)$$

Рассмотрим статистическое ускорение Ферми частиц с постоянным транспортным пробегом ($\lambda = \lambda_0$). В этом случае коэффициент диффузии КЛ по импульсам (4) принимает вид

$$D_p = D_0 \sqrt{1 + p^2/c^2}, \quad (10)$$

где постоянная величина D_0 определена соотношением

$$D_p = \frac{m^2 c \langle u_1^2 \rangle}{3 v_0}. \quad (11)$$

В качестве характерного времени убегания частиц из области ускорения выберем диффузионное время [29]

$$t_e = \frac{L^2}{v_0} = \frac{3L^2}{v_0}, \quad (12)$$

где $v_0/3$ — коэффициент диффузии, а L — характерный размер области ускорения. Диффузионное время убегания (12) обратно пропорционально скорости частицы, и следовательно, убывает при увеличении энергии. Учитывая (9), получим

$$t_e = t_{e0} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (13)$$

где

$$t_{e0} = \frac{3L^2}{0c}. \quad (14)$$

Таким образом, в рассматриваемом стационарном случае уравнение переноса КЛ (7) принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{N}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{3}{2} \frac{N}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{N}{e} \frac{qt_0}{(mc)^3} \left(\frac{1}{2} - \beta^2 \right), \quad (15)$$

где характерное время ускорения t_0 дается соотношением

$$t_0 = \frac{m^2 c^2}{D_0} \frac{3}{\langle u_1^2 \rangle}, \quad (16)$$

а безразмерная величина

$$\frac{t_{e0}}{t_0} = \frac{L^2 \langle u_1^2 \rangle}{2c^2} \quad (17)$$

равна отношению характерного времени убегания частиц (14) к времени ускорения (16). Форма равновесного энергетического спектра КЛ существенным образом зависит от параметра $\frac{t_{e0}}{t_0}$ [18, 25]. При малом значении этого параметра частицы быстро покидают область ускорения и не успевают ускориться до высоких энергий, что обуславливает мягкий энергетический спектр КЛ. Если время убегания частиц сравнимо со временем их ускорения (параметр $\frac{t_{e0}}{t_0}$ не мал), частицы успевают ускориться до больших энергий, и равновесный энергетический спектр КЛ оказывается более жестким.

Уравнение (15) можно переписать в виде

$$\left(\frac{1}{2} - \beta^2 \right) \frac{N}{2} - \frac{3}{2} \frac{N}{2} = \frac{N}{e} \frac{qt_0}{(mc)^3} \sqrt{1 - \beta^2} \left(\frac{1}{2} - \beta^2 \right). \quad (18)$$

Следуя схеме работы [29], где исследовалось стохастическое ускорение КЛ в трансрелятивистской области, сделаем следующую замену переменной

$$\frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (19)$$

Уравнение (18) можно переписать в форме

$$2 \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \frac{N}{2} - \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right) \frac{N}{2} = \frac{N}{e} \frac{qt_0}{(mc)^3} \sqrt{1 - \beta^2} \left(\frac{1}{1 - \beta^2} \right). \quad (20)$$

Будем искать решение данного уравнения в следующем виде:

$$N(\epsilon) = C \epsilon^{3/4 - \epsilon/2} \quad (21)$$

где постоянная C определена соотношением

$$\sqrt{\frac{1}{\epsilon} - \frac{9}{4}} \quad (22)$$

Запишем однородное уравнение для функции $N(\epsilon)$, соответствующее (20):

$$\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left[1 - (3 - \epsilon)\right] - \frac{(3 - \epsilon)(5 - \epsilon)}{16} = 0 \quad (23)$$

Уравнение (23) представляет собой гипергеометрическое уравнение Гаусса, решением которого является функция [1]

$${}_1F_1\left(\frac{5}{4} - \frac{\epsilon}{2}; \frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{2}; 1\right) \quad (24)$$

Отметим, что параметры гипергеометрической функции (24) зависят от единственной постоянной C (22). Таким образом, согласно соотношению (21) получаем следующее выражение для концентрации КЛ, которое справедливо в области $\epsilon > 0$:

$$N(\epsilon) = C \epsilon^{\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{2}} {}_1F_1\left(\frac{5}{4} - \frac{\epsilon}{2}; \frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{2}; 1\right) \quad (25)$$

Для ультрарелятивистских частиц ($\epsilon \gg 1$) переменная (19) становится малой величиной, поэтому из (25) следует

$$N(\epsilon) = C \epsilon^{\frac{3}{4} - \frac{\epsilon}{2}}.$$

Так как при условии $\epsilon \gg 1$, ϵ^2 , для ультрарелятивистских частиц получаем

$$N(\epsilon) = C \epsilon^{\frac{3}{2}} \quad (26)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае ($\epsilon = \text{const}$) получаем степенную зависимость концентрации ультрарелятивистских частиц от импульса (26). Отметим, что степенной жесткой спектр ультрарелятивистских КЛ имеет место при постоянном транспортном пробеге частиц и постоянном времени утечки [25, 27]. В данном случае время убегания частиц определяется диффузионным соотношением (12)—(14) и зависит от энергии частицы. Однако, в ультрарелятивистской области скорость частиц близка к скорости света и характерное время t_e стремится к постоянному значению t_{e0} (14).

Запишем соотношение (24) в следующем виде [1]:

$${}_1F_1\left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2}; \frac{1}{4} - \frac{\epsilon}{2}; 1\right) \quad (27)$$

Второе линейно независимое решение гипергеометрического уравнения (23) можно записать в форме [1]:

$${}_2F_1\left(x, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{4}x\right) \quad (28)$$

Отметим, что нерелятивистским частицам ($\beta \ll 1$) соответствует значение переменной x , близкое к единице. Из соотношений (27), (28) видно, что функции ${}_1F_1(x)$ и ${}_2F_1(x)$ неограниченно возрастают при стремлении переменной x к единице. Составим следующую линейную комбинацию функций (27) и (28)

$${}_3F_1\left(x, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{4}x\right) + G \cdot {}_2F_1\left(x, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{4}x\right) \quad (29)$$

где

$$G = \frac{\frac{3}{2} \Gamma(1)}{\frac{3}{2} \Gamma(1)}$$

а $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Можно показать, что при $x \rightarrow 1$ функция ${}_3F_1(x)$ (29) стремится к постоянному значению.

Следовательно, согласно соотношению (21) концентрация частиц низких энергий ($\beta < \beta_0$) имеет вид

$$N(\beta) = B \frac{3}{4} \frac{1}{2} {}_3F_1(x) = B \frac{3}{4} \frac{1}{2} \left[{}_2F_1\left(x, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{4}x\right) + F \cdot {}_2F_1\left(x, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; -\frac{1}{4}x\right) \right] \quad (30)$$

Таким образом, стационарный энергетический спектр ускоренных частиц описывается соотношениями (25), (30), где B, C — постоянные величины. Чтобы определить эти константы, используем непрерывность концентрации КЛ по импульсу в точке β_0 ($\beta_0 = p_0 / (mc)$ — безразмерный импульс инжектированных частиц) и условие, учитывающее скачок производной концентрации КЛ по импульсу в той же точке:

$$\frac{N(\beta_0 - 0)}{N(\beta_0 + 0)} = \frac{qt_0}{(mc)^3} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - \beta_0^2}} \quad (31)$$

Граничное условие (31) обусловлено наличием моноэнергетического источника частиц в правой части уравнения переноса КЛ (18). В

результате получим следующие значения постоянных B, C :

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{qt_0}{(mc)^3} \frac{1}{2^{2-1}} Q G \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) ; 0 . \\
 C &= \frac{qt_0}{(mc)^3} \frac{1}{Q \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) ; 0 \\
 &\quad \frac{1}{G 2^2} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) ; 0 ,
 \end{aligned} \tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{4^2}{16(1)} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) ; 0 F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}; 2; \frac{1}{2}\right) ; 0 \\
 &\quad - F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) ; 0 F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) ; 0 \\
 &\quad \frac{4^2}{16(1)} F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right) ; 0 F\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{2}; 2; \frac{1}{2}\right) ; 0 .
 \end{aligned}$$

Таким образом, зависимость концентрации ускоренных частиц от импульса описывается соотношениями (25), (30), (32). Для анализа спектров КЛ удобно перейти от безразмерного импульса к кинетической энергии частицы E_k

$$\frac{\sqrt{E_k(E_k + 2mc^2)}}{mc^2} . \tag{33}$$

Концентрация КЛ как функция кинетической энергии частиц может быть вычислена согласно соотношению

$$N(E_k) = \frac{p^2 N(p)}{v} = \frac{(mc)^2 N(\cdot)}{v} . \tag{34}$$

На рис. 1 приведена безразмерная величина $N(E_k)mc^2 / (qt_0)$ в зависимости от кинетической энергии частицы. Данная величина пропорциональна концентрации частиц (34) и вычисляется согласно формулам (25), (30), (32). Начальная энергия инжектируемых частиц равна 1 МэВ, а числа у кривых соответствуют величине параметра (17), который равен отношению времени убегания частиц к характерному времени ускорения. Видно, что при увеличении темпа ускорения КЛ (т. е. при увеличении параметра ϵ) энергетический спектр частиц становится более жестким [18, 25].

Вычислим показатель спектра КЛ, который определяет наклон жесткостного спектра частиц:

$$\frac{N(\cdot)}{N(\cdot)} . \tag{35}$$

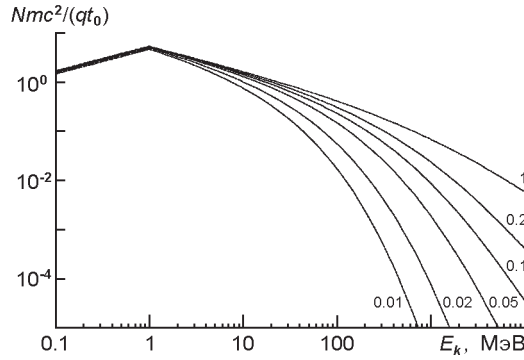


Рис. 1. Равновесный энергетический спектр ускоренных частиц с энергией инжекции 1 МэВ и постоянным транспортным пробегом. Числа у кривых — значения параметра ϵ

Используя соотношение (25) для концентрации частиц с энергиями, большими, чем энергия инжекции, получим

$$= \frac{2}{1 - \frac{3}{2} \frac{1}{1 - \frac{(5 - 2)(3 - 2)}{8(1 -)}} F \frac{9}{4} \frac{7}{2}, \frac{7}{4} \frac{7}{2}; 2} ; \quad (36)$$

$$F \frac{5}{4} \frac{3}{2}, \frac{3}{4} \frac{3}{2}; 1 ;$$

Для ультррелятивистских частиц ($\gamma \gg 1$) из (36) следует соотношение

$$3/2 \quad (37)$$

Отметим, что показатель спектра ультррелятивистских КЛ определяется единственным параметром ϵ . Полученная формула для показателя жесткого спектра КЛ (37) находится в соответствии с выражением (26), которое описывает степенную зависимость концентрации ультррелятивистских частиц от их импульса.

Показатель энергетического спектра КЛ

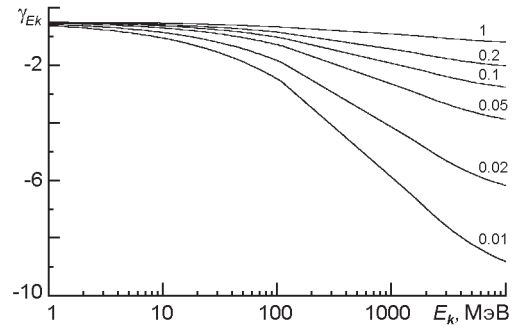
$$E \frac{E_k}{N(E_k)} \frac{N(E_k)}{E_k} \quad (38)$$

можно вычислить из формулы (36) для величины ϵ согласно соотношению

$$E \frac{E_k}{E_k g^2} \frac{mc^2}{(E_k mc^2)^2} \frac{E_k (E_k g^2)}{1} \quad (39)$$

Энергетическая зависимость показателя спектра КЛ (36), (39) приведена на рис. 2. Начальная кинетическая энергия испускаемых частиц равна 1 МэВ; числа у кривых соответствуют значениям параметра ϵ . Мы ограничились энергиями частиц 10 ГэВ, поэтому показатель энергетического спектра КЛ еще не достиг своего асимптотического значения, $E \approx 2 \frac{1}{2}$, характерного для ультррелятивистских частиц (рис. 2).

Рис. 2. Показатель энергетического спектра космических лучей, соответствующий ускорению Ферми частиц с постоянным транспортным пробегом. Числа у кривых равны величине ϵ , $E_{k0} = 1$ МэВ



Заметим, что для нерелятивистских частиц ($\beta \ll 1$) переменная (19) стремится к единице. Воспользовавшись соотношениями для гипергеометрической функции при $\beta \ll 1$ [1], можно показать, что показатель спектра (36) стремится к значению -2 при неограниченном уменьшении безразмерного импульса частицы. Показатель энергетического спектра нерелятивистских частиц, удовлетворяющих условию $\beta \ll 1$, имеет вид

$$\gamma_E \approx -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}.$$

Из рис. 2 видно, что при уменьшении параметра ϵ (т. е. при уменьшении темпа ускорения частиц или времени убегания КЛ) абсолютная величина показателя энергетического спектра КЛ увеличивается, а спектр частиц становится более мягким.

УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ

Рассмотрим процесс ускорения КЛ при их взаимодействии с анизотропной турбулентностью. В этом случае вследствие появления в такой среде крупномасштабного электрического поля (1) ($\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$ -эффект) имеет место ускорение частиц. Ускорение КЛ, имеющее характер диффузии частиц в импульсном пространстве, описывается уравнением (7), а коэффициент диффузии по импульсам D_p определяется соотношением (5). Предположим, что транспортный пробег КЛ зависит от импульса частицы по степенному закону

$$l_0 = \frac{p}{p_0} \lambda, \tag{40}$$

где p_0 — импульс инжектированных частиц. При такой зависимости транспортного пробега от импульса величина D_p принимает вид

$$D_p = D_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-2}, \tag{41}$$

где

$$D_0 = \frac{2}{3} \frac{m^2 c^2}{R_0^2}.$$

Величины R_0 и L_0 представляют собой транспортный пробег и ларморов радиус частиц с импульсом p_0 соответственно.

Предполагаем, что энергетические потери обусловлены диффузией частиц из объема ускорения, а характерное время убегания обратно пропорционально коэффициенту диффузии КЛ ($t_e = L^2 / D$). Учитывая формулу (40), описывающую зависимость транспортного пробега от импульса частицы, получим следующее соотношение для времени убегания:

$$t_e = t_{e0} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (42)$$

где постоянная t_{e0} определена формулой

$$t_{e0} = \frac{3L_0^2}{R_0 c}.$$

В рассматриваемом случае уравнение переноса КЛ (7) принимает вид

$$\frac{1}{2} \frac{dN}{dx} + \sqrt{1 - \beta^2} \frac{dN}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dN}{dx} - \frac{qt_0}{(mc)^3} \frac{dN}{dx}, \quad (43)$$

где t_0 — характерное время ускорения:

$$t_0 = \frac{m^2 c^2}{D_0} = \frac{3R_0^2 c}{2L_0^2}, \quad (44)$$

а постоянная величина t_{e0} , равная отношению времени убегания частиц к характерному времени их ускорения, описывается соотношением

$$t_{e0} = \frac{L_0^2}{R_0 c}. \quad (45)$$

Перепишем уравнение (43) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (1 - \beta^2) \frac{dN}{dx} + \sqrt{1 - \beta^2} \frac{dN}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dN}{dx} - \frac{qt_0}{(mc)^3} \frac{dN}{dx} = \\ &= \frac{qt_0}{(mc)^3} \frac{dN}{dx} \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (46)$$

Замена переменной

$$x = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} - 1}{\sqrt{\beta^2}} \quad (47)$$

позволяет записать уравнение (46) в форме

$$x^2 \frac{dN}{dx} + \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{\beta^2}}{x \sqrt{\beta^2}} x \frac{dN}{dx} - \frac{qt_0 \sqrt{\beta^2}}{(mc)^3} x^2 N = \frac{qt_0 \sqrt{\beta^2}}{(mc)^3} \frac{x^2}{2} (x - x_0), \quad (48)$$

где

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{\beta^2}} (2x - x^2 \sqrt{\beta^2})^{1/2}.$$

Предположим, что инжектируемые частицы являются нерелятивистскими, т. е. $\beta_0 \ll 1$. Для нерелятивистских КЛ переменная $x \ll 1$, и уравнение переноса КЛ (48) существенно упрощается:

$$x^2 \frac{d^2 N}{dx^2} - \frac{2}{x} x \frac{dN}{dx} - x^2 N = \frac{qt_0 \sqrt{e}}{(mc)^3} \frac{x^2}{2} \quad (x > x_0). \quad (49)$$

Данное уравнение имеет следующие решения:

$$N(x) = Bx^{-1/4} I_{1/4}(x), \quad x > x_0, \quad (50)$$

$$N(x) = Cx^{-1/4} K_{1/4}(x), \quad x < x_0, \quad (51)$$

где $I(x), K(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Для того чтобы определить константы B, C в соотношениях (50), (51), используем непрерывность концентрации частиц в точке инжекции x_0 , а также условие

$$\frac{N(x_0 + 0)}{x} = \frac{N(x_0 - 0)}{x} = \frac{qt_0 \sqrt{e}}{(mc)^3} \frac{x_0}{2}, \quad (52)$$

являющееся следствием наличия источника частиц в правой части уравнения переноса КЛ (49). В результате получим

$$B = \frac{qt_0 \sqrt{e} x_0^{1/4} K_{1/4}(x_0)}{(mc)^3 x_0^{2/4}}, \quad C = \frac{qt_0 \sqrt{e} x_0^{1/4} I_{1/4}(x_0)}{(mc)^3 x_0^{2/4}}. \quad (53)$$

Таким образом, концентрация нерелятивистских частиц описывается соотношениями (50), (51), (53).

Для частиц, кинетическая энергия которых выше энергии инжекции ($x > x_0$), уравнение переноса КЛ (48) может быть представлено в форме

$$x^2 \frac{d^2 N}{dx^2} - ax \frac{dN}{dx} - x^2 N = 0, \quad (54)$$

где

$$a = \left(\pm 2 \right) \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{e}}{x \sqrt{e}}. \quad (55)$$

Величина $a(x)$ (55) принимает значения от $(-2)/2$ до $+2$ при изменении переменной x от 0 до ∞ . Таким образом, величина $a(x)$ (55) оказывается медленной функцией своего аргумента во всем интервале его изменения.

Получим решение уравнения (54) при постоянном значении параметра a . Определим функцию $N(x)$ следующим образом

$$N(x) = x^{-1/2} f(x),$$

где

$$f(x) = (a - 1)/2. \quad (56)$$

Исходя из (54), можно показать, что функция $N(x)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Бесселя

$$x^2 \frac{d^2 N}{dx^2} + x \frac{dN}{dx} - (x^2 - \nu^2) N = 0.$$

Следовательно, концентрация КЛ, кинетическая энергия которых больше энергии инжекции ($x > x_0$), может быть представлена в виде

$$N(x) = Cx^{-\nu} K_\nu(x), \quad (57)$$

где $K_\nu(x)$ — функция Макдональда, а постоянная C определена соотношением (53). Индекс ν , определяющий порядок функции Макдональда в приближенном решении (57) уравнения переноса КЛ, вычисляется по формулам (55), (56), а переменная x связана с безразмерным импульсом частицы соотношением (47).

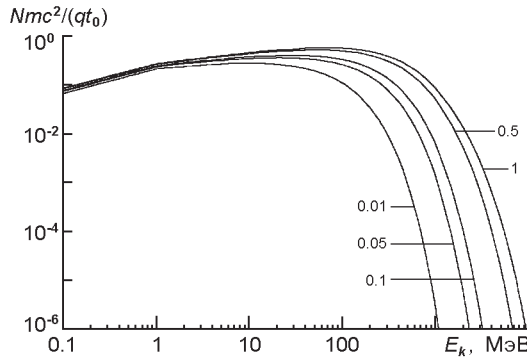


Рис. 3. Энергетический спектр космических лучей, соответствующий ν -ускорению частиц с начальной энергией 1 МэВ. Числа у кривых равны значениям параметра ϵ_e , $\nu = 1/3$

Равновесный энергетический спектр КЛ, соответствующий ν -ускорению частиц, приведен на рис. 3. Энергия испускаемых частиц равна 1 МэВ, а числа у кривых соответствуют параметру ϵ_e . Показатель степенной зависимости транспортного пробега от импульса частицы (40) выбран равным $1/3$. Видно, что форма энергетического спектра, соответствующая ν -ускорению КЛ, существенно отличается от формы спектра частиц, ускоренных механизмом Ферми (рис. 1). При ν -ускорении, в зависимости от значения параметра ϵ_e , концентрация КЛ с энергиями не более 100 МэВ либо уменьшается, либо незначительно увеличивается при увеличении кинетической энергии частицы (рис. 3). На более высоких энергиях спектр КЛ становится крутым, так что концентрация частиц быстро уменьшается при увеличении их кинетической энергии (рис. 3). Таким образом, в области низких энергий (например, если $\epsilon_e = 0.1$, то низкоэнергетический диапазон простирается до значений E_k порядка 400 МэВ) спектр ускоренных частиц оказывается жестким. Напротив, спектр ультрарелятивистских частиц оказывается значительно более мягким по сравнению с энергетическим распределением КЛ, ускоренных механизмом Ферми. Отметим, что большим значениям параметра ϵ_e соответствует более жесткий спектр КЛ (рис. 3).

Рассмотрим энергетическую зависимость показателя спектра КЛ для частиц, кинетическая энергия которых превышает энергию инжекции. Определим величину γ_x согласно соотношению

$$\gamma_x = \frac{N(x)}{N(x)}$$

Показатель жесткостного спектра КЛ (35) можно вычислить следующим образом:

$$\gamma_x = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}}} x^2 \quad (58)$$

Воспользовавшись приближенным соотношением (57), описывающим концентрацию КЛ ($E_k > E_{k0}$), получим

$$\gamma_x = \frac{x[K_1(x) - K_1(x)]}{2K_1(x)} \quad (59)$$

Учитывая, что для нерелятивистских частиц $\beta = 1/4$, и используя неравенство $x \ll 1$ в формуле (59), получим $\gamma_x = 1/2$. Таким образом, показатель энергетического спектра КЛ низких энергий имеет вид

$$\gamma_E = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

Отметим, что в случае $\beta < 1$ показатель энергетического спектра оказывается положительным, т. е. концентрация нерелятивистских частиц увеличивается при увеличении их энергии (рис. 3).

В ультрарелятивистской области ($\beta \gg 1$) $\beta = (\gamma + 1)/2$ и из соотношений (58), (59) следует

$$\gamma_E = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\gamma_e}}$$

Показатель энергетического спектра ультрарелятивистских КЛ

$$\gamma_E = \frac{3}{2} - \frac{E_k}{mc^2 \sqrt{\gamma_e}}$$

уменьшается по линейному закону при увеличении кинетической энергии частицы.

На рис. 4 приведена зависимость показателя спектра γ_E от энергии частицы в случае β -ускорения КЛ. Числа у кривых соответствуют

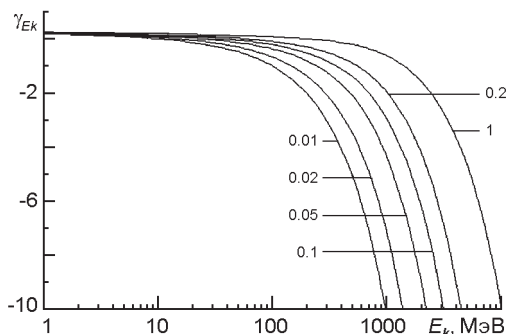


Рис. 4. Показатель равновесного энергетического спектра частиц при β -ускорении космических лучей ($E_{k0} = 1$ МэВ, $\beta = 1/3$)

значениям параметра β_e , начальная энергия частиц равна 1 МэВ, $\beta_e = 1/3$. Видно, что показатель спектра положителен в области низких энергий. При увеличении кинетической энергии частицы величина β_e становится отрицательной и быстро уменьшается. Отметим существенные отличия формы зависимостей $\beta_e(E_k)$ в области высоких энергий, которые имеют место для процесса β_e -ускорения (рис. 4) и в случае статистического ускорения Ферми (рис. 2).

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ ЧАСТИЦ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ СТАТИСТИЧЕСКОМУ УСКОРЕНИЮ ФЕРМИ

Перейдем к рассмотрению статистического ускорения Ферми частиц, транспортный пробег которых зависит от их импульса. При степенной зависимости (40) коэффициент диффузии КЛ в импульсном пространстве (4) приобретает вид

$$D_p = D_0 \beta_e^{-1} \sqrt{1 - \beta_e^2}, \quad (60)$$

где

$$D_0 = \frac{m^2 c \langle u_1^2 \rangle_0}{3 \beta_e}.$$

В данном случае характерное время ускорения КЛ определяется согласно формуле

$$t_0 = \frac{m^2 c^2}{D_0} = \frac{3 \beta_e c}{\langle u_1^2 \rangle_0}.$$

Предполагаем, что время убегания частиц определяется диффузией, тогда величина t_e удовлетворяет соотношению (42).

В стационарном случае уравнение переноса КЛ (7), описывающее процесс ускорения Ферми, приобретает вид

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\beta_e} \left[\beta_e \sqrt{1 - \beta_e^2} \frac{N}{e} \right] = \frac{qt_0}{(mc)^3} \left(\frac{N}{e} \right), \quad (61)$$

где

$$\frac{t_e}{t_0} = \frac{L^2 \langle u_1^2 \rangle_0}{2 c^2}. \quad (62)$$

Перепишем уравнение (61) в следующей форме:

$$\begin{aligned} (1 - \beta_e^2) \frac{dN}{d\beta_e} &= [3 \beta_e (4 - \beta_e^2)] \frac{N}{e} - \frac{qt_0}{(mc)^3} N = \\ &= \frac{qt_0}{(mc)^3} \sqrt{1 - \beta_e^2} \left(\frac{N}{e} \right). \end{aligned} \quad (63)$$

Сделав замену переменной (47), приходим к уравнению

$$x^2 \frac{d^2 N}{dx^2} + \left(4 - \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{e}}{x \sqrt{e}}\right) x \frac{dN}{dx} - \frac{e^{(1/2)x-1}}{(2 - x \sqrt{e})^1} N = \frac{qt_0 \sqrt{e}}{(mc)^3} \frac{x^2}{4} (x - x_0). \quad (64)$$

Уравнение (64) существенно упрощается как для нерелятивистских частиц, так и для ультрарелятивистских. В случае КЛ низкой энергии ($x \ll 1$) из выражения (64) следует

$$x^2 \frac{d^2 N}{dx^2} + \frac{4}{2} x \frac{dN}{dx} - 2^{-1} e^{(1/2)x-1} N = \frac{qt_0 \sqrt{e}}{(mc)^3} \frac{x^2}{4} (x - x_0). \quad (65)$$

Для ультрарелятивистских частиц ($x \gg 1$) получим

$$x^2 \frac{d^2 N}{dx^2} + \left(4 - \frac{1}{2}\right) x \frac{dN}{dx} - e^{1/2} x^2 N = 0. \quad (66)$$

Отметим, что предполагается инжекция нерелятивистских частиц ($x_0 \ll 1$), поэтому в правой части уравнения переноса КЛ высоких энергий (66) отсутствует источник частиц.

Рассмотрим решение уравнения

$$x^2 \frac{d^2 N}{dx^2} + ax \frac{dN}{dx} - bx N = 0. \quad (67)$$

Заметим, что уравнения переноса нерелятивистских и ультрарелятивистских КЛ ((65) и (66) соответственно), которые описывают процесс статистического ускорения Ферми, имеют вид (67). Определим функцию $N(x)$ согласно соотношению

$$N(x) = x^{(1-a)/2} \psi(x).$$

Уравнение (67) приобретает вид

$$x^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} + x \frac{d\psi}{dx} - \frac{a-1}{2} \psi - bx = 0.$$

Введем переменную

$$\xi = \frac{2\sqrt{b}}{x} x^{1/2}. \quad (68)$$

Для функции $\psi(\xi)$ получаем модифицированное уравнение Бесселя

$$\xi^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \xi \frac{d\psi}{d\xi} - \left(\frac{a-1}{2} - \xi^2\right) \psi = 0,$$

где

$$(a-1)/2 = \nu. \quad (69)$$

Так как левая часть уравнения переноса нерелятивистских КЛ имеет вид (67), можем записать решение этого уравнения:

$$N(x) = Bx^{-\frac{2}{4}} I_1 \left(\frac{2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}}}{1} x^{\frac{1}{2}} \right), \quad x > x_0, \quad (70)$$

$$N(x) = Cx^{-\frac{2}{4}} K_1 \left(\frac{2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}}}{1} x^{\frac{1}{2}} \right), \quad x < x_0, \quad (71)$$

где

$$1 = \frac{2}{2(1 - \dots)}.$$

Постоянные B, C могут быть найдены из условий непрерывности концентрации КЛ в точке x_0 и скачка производной $\frac{N}{x}$ в этой точке, который обусловлен наличием дельта-функции в правой части уравнения переноса КЛ (65).

Запишем решение уравнения (67), которое убывает при неограниченном увеличении аргумента x :

$$N(x) = Cx^{\frac{1-a}{2}} K_{\nu}(\dots), \quad (72)$$

где индекс ν определяется соотношением (69), а переменная \dots задана формулой (68). Исходя из (72), получаем следующее выражение для величины \dots :

$$\dots = \frac{1-a}{2} \frac{K_{\nu-1}(\dots) - K_{\nu+1}(\dots)}{2K_{\nu}(\dots)} \sqrt{bx^2}, \quad (73)$$

которое позволяет вычислить показатель спектра КЛ. Для ультрарелятивистских частиц, концентрация которых удовлетворяет уравнению (66), получаем следующее выражение для показателя жесткостного спектра КЛ:

$$\frac{3}{2} = \frac{\dots}{\sqrt{e}}.$$

Этой величине соответствует показатель энергетического спектра КЛ высоких энергий ($\dots \gg 1$)

$$E = 2 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{E_k}{mc^2}. \quad (74)$$

Следовательно, если транспортный пробег КЛ увеличивается при увеличении энергии частицы ($\dots > 0$), то показатель спектра ультрарелятивистских КЛ (74) уменьшается, т. е. спектр становится круче (мягче). Заметим, что в случае постоянного транспортного пробега КЛ ($\dots = 0$) показатель спектра ультрарелятивистских частиц не зависит от их энергии.

Полученные результаты можно использовать для приближенного расчета равновесного энергетического спектра ускоренных частиц. Для определения показателя спектра КЛ воспользуемся формулой (73), параметры которой определим, в соответствии с уравнением (64), следующим образом:

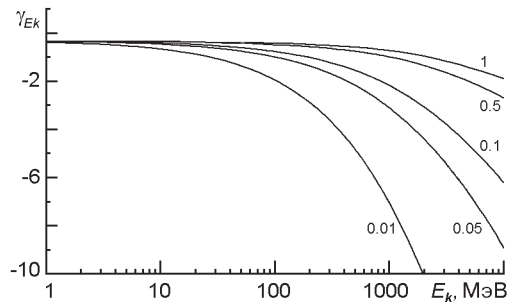
$$a = \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{e}}{x \sqrt{e}},$$

$$b = \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{e}}{x \sqrt{e}},$$

$$b = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} x} \frac{1}{(2 x \sqrt{e})^1}.$$

Аргумент функции Макдональда в формуле (73) определен согласно (68), а индекс — соотношением (69).

Рис. 5. Зависимость показателя энергетического спектра космических лучей от кинетической энергии частицы, соответствующая статистическому ускорению Ферми частиц с начальной энергией 1 МэВ. Числа у кривых равны значениям параметра e , $e = 1/3$



Зависимость показателя энергетического спектра КЛ от энергии частицы приведена на рис. 5. Рассматривается статистическое ускорение Ферми частиц, транспортный пробег которых зависит от их импульса по степенному закону (40), причем индекс $\alpha = 1/3$. Кинетическая энергия испускаемых частиц $E_{k0} = 1$ МэВ, а числа у кривых равны значениям параметра e . Видно, что большим значениям величины e соответствуют меньшие (по абсолютной величине) значения показателя спектра, т. е. более жесткий спектр (рис. 5). Отметим, что в отличие от процесса α -ускорения КЛ (рис. 4) в данном случае показатель равновесного энергетического спектра нерелятивистских частиц отрицателен, таким образом спектр КЛ является падающим (рис. 5). В области высоких энергий показатель спектра, характерный для ускорения Ферми, оказывается больше (при тех же значениях параметра e , что и для α -ускорения), т. е. спектр КЛ в данном случае оказывается менее крутым (рис. 4 и 5).

На рис. 6 приведен показатель энергетического спектра, соответствующий статистическому ускорению Ферми, для различных значений параметра e (числа у кривых). Величина e , характеризующая

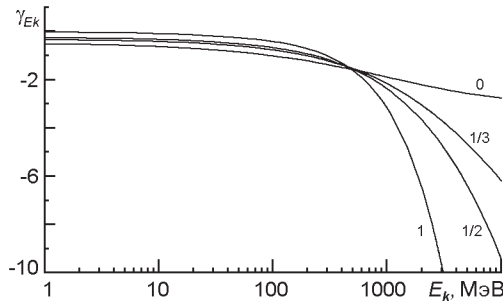


Рис. 6. Показатель энергетического спектра космических лучей, соответствующий статистическому ускорению Ферми. Числа у кривых равны значениям параметра λ , $E_{k0} = 1$ МэВ, $\epsilon = 0.1$

темп ускорения КЛ, выбрана равной 0.1, энергия инжекции — 1 МэВ. Если транспортный пробег постоянен ($\lambda = 0$), то при увеличении энергии частицы показатель спектра γ_E асимптотически приближается к значению, которое соответствует степенному спектру ультрарелятивистских КЛ (рис. 6). Если транспортный пробег увеличивается при увеличении энергии частицы ($\lambda > 0$), показатель спектра КЛ уменьшается при всех значениях кинетической энергии (рис. 6). Таким образом, при увеличении энергии частиц спектр КЛ становится все более крутым и не является степенным даже для ультрарелятивистских частиц.

В данной работе выход частиц из области ускорения предполагался диффузионным. В таком приближении время утечки частиц определяется соотношением (12) и уменьшается при увеличении энергии частицы [9, 14, 29]. Во многих работах исследование процесса статистического ускорения КЛ проводилось при постоянном значении времени утечки частиц (параметр t_e в уравнении переноса (7)) [18, 25, 27, 29]. Постоянное время утечки КЛ может быть обусловлено, например, конвективным выносом частиц из области ускорения. При диффузионном выходе частиц из области ускорения спектр КЛ в области низких энергий оказывается более жестким по сравнению как с некоторыми наблюдавшимися спектрами солнечных КЛ, так и с энергетическими распределениями, рассчитанными в предположении конвективного выноса частиц из зоны ускорения. Заметим, что приближение $t_e = \text{const}$ лучше описывает форму энергетических спектров солнечных космических лучей в целом ряде протонных событий [18, 25, 29]. Так, например, вспышки космических лучей 28 ноября 1972 г., 5 ноября 1974 г., 7 мая 1978 г., 3 июня 1982 г., 15 июня 1991 г. вполне могут быть обусловлены статистическим ускорением КЛ в корональных магнитных петлях [14, 18, 25, 27, 29].

Альтернативным механизмом генерации солнечных КЛ является процесс ускорения частиц на фронтах ударных волн [2, 15, 22, 27]. При ускорении КЛ на ударных волнах концентрация частиц оказывается степенной функцией импульса, причем спектральный индекс определяется сжатием среды. Именно такой вид жесткого спектра солнечных КЛ наблюдался в ряде протонных событий, для которых ускорение частиц ударной волной, распространяющейся в плазме солнечной короны, играет определяющую роль [15, 22].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен процесс статистического ускорения космических лучей в турбулентной среде. Получено точное аналитическое решение уравнения переноса КЛ, описывающего процесс статистического ускорения Ферми частиц с постоянным транспортным пробегом. При степенной зависимости транспортного пробега от импульса частицы получены приближенные решения уравнения переноса КЛ, соответствующего ускорению Ферми и δ -ускорению. Показано, что при δ -ускорении энергетические спектры КЛ в области низких энергий оказываются более жесткими по сравнению со спектрами частиц, ускоренными механизмом Ферми. Напротив, для КЛ высоких энергий процессу δ -ускорения соответствуют более крутые спектры, то есть более мягкие энергетические распределения частиц.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1965.—296 с.
2. Бережко Е. Г., Танеев С. Н. Ускорение солнечных космических лучей ударными волнами // Письма в астроном. журн.—2003.—**29**, № 8.—С. 601—615.
3. Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А. Турбулентное динамо в астрофизике. — М.: Наука, 1980.—352 с.
4. Кичатинов Л. Л. Новый механизм ускорения космических лучей при наличии отражательно неинвариантной турбулентности // Письма в ЖЭТФ.—1983.—**37**, № 1.—С. 43—45.
5. Краузе Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. — М.: Мир, 1984.—320 с.
6. Тверской Б. А. К теории статистического ускорения Ферми // ЖЭТФ.—1967.—**52**, № 2.—С. 483—497.
7. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. — М.: Наука, 1983.—302 с.
8. Aschwanden M. J. Particle acceleration and kinematics in solar flares // Space Sci. Rev.—2002.—**101**.—P. 1—227.
9. Becker P. A., Le T., Dermer C. D. Time-dependent stochastic particle acceleration in astrophysical plasmas // Astrophys. J.—2006.—**647**, N 1.—P. 539—551.
10. Bieber J. W., Evenson P. A., Matthaeus W. H. Magnetic helicity of the Parker field // Astrophys. J.—1987.—**315**, N 2.—P. 700—705.
11. Bruno R., Dobrowolny M. Spectral measurements of magnetic energy and magnetic helicity between 0.29 and 0.97 AU // Ann. Geophys.—1986.—**4**, N 1.—P. 17—22.
12. Demoulin P. Recent theoretical and observational developments in magnetic helicity studies // Adv. Space Res.—2007.—**39**.—P. 1674—1693.
13. Droege W. The rigidity dependence of solar particle scattering mean free paths // Astrophys. J.—2000.—**537**, N 2—P. 1073—1079.
14. Droege W., Schlickeiser R. Particle acceleration in solar flares // Astrophys. J.—1986.—**305**, N 2.—P. 909—912.
15. Ellison D. C., Ramaty R. Shock acceleration of electrons and ions in solar flares // Astrophys. J.—1985.—**298**, N 1.—P. 400—408.
16. Fedorov Yu. I., Katz M. E., Kichatinov L. L., Stehlik M. Cosmic-ray kinetics in a random anisotropic reflective non-invariant magnetic field // Astron. and Astrophys.—1992.—**260**.—P. 499—509.

17. *Fedorov Yu. I., Stehlik M.* Stochastic acceleration of cosmic rays in helical plasma turbulence // Proc. 21-st Europ. Cosmic Ray Symp. — Kosice, 2008.— P. 241—244.
18. *Fedorov Yu. I., Stehlik M.* Cosmic ray energetic spectra and its evolution in helical plasma turbulence // Proc. 21-st Europ. Cosmic Ray Symp. — Kosice, 2008.— P. 297—302.
19. *Fermi E.* On the origin of the cosmic radiation // Phys. Rev.—1949—**75**, N 8.— P. 1169—1174.
20. *Kichatinov L. L.* Turbulent dynamo alpha-effect in the problem of cosmic ray acceleration // Proc. 18-th Intern. Cosmic Ray Conf. — Bangalore, 1983.—Vol. **3**.— P. 145—148.
21. *Krivodubskij V. N., Schultz M.* Complete alpha-tensor for solar dynamo // The Cosmic Dynamo / Eds F. Krause, K.-H. Radler, G. Rudiger. — Dordrecht: Kluwer, 1993.—P. 25—26.
22. *Lockwood J. A., Debrunner H., Fluckiger E. O., Gradel H.* Proton energy spectra at the Sun in the solar cosmic ray events on 1978 May 7 and 1984 February 16 // Astrophys. J.—1990.—**355**, N 1—P. 287—294.
23. *Matthaeus W. H., Goldstein M. L.* Measurement of the rugged invariants of magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind // J. Geophys. Res.—1982.—**87**.— P. 6011.
24. *Miller J. A., Cargill P. I., Emslie A. G., et al.* Critical issues for understanding particle acceleration in impulsive solar flares // J. Geophys. Res.—1997.—**102**.— P. 14631—14659.
25. *Miller J. A., Guessom N., Ramaty R.* Stochastic Fermi acceleration in solar flares // Astrophys. J.—1990.—**361**, N 2.—P. 701—708.
26. *Palmer I. D.* Transport coefficients of low-energy cosmic rays // Rev. Geophys. Space Phys.—1982.—**20**, N 2.—P. 335—361.
27. *Ramaty R., Murphy R. J.* Nuclear processes and accelerated particles in solar flares // Space Sci. Rev.—1987.—**45**.—P. 213.
28. *Rudiger G., Hollerbach R.* The magnetic universe. — Wiley:VCH Verlag GmbH.— 2004.— 332 p.
29. *Steinacker J., Schlickeiser R.* Stochastic acceleration of solar protons in the trans-relativistic region // Astron. and Astrophys.—1989.—**224**.—P. 259—266.
30. *Tian L., Alexander D.* On the origin of magnetic helicity in the solar corona // Astrophys. J.—2008.—**673**, N 1.—P. 532—543.

Поступила в редакцию 09.06.09