УДК 681:513

Л.А. АКСЕНОВА

СВОЙСТВА БЕСПЕРСПЕКТИВНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ

Введение

В данной статье мы рассмотрим свойства бесперспективных максимальных замкнутых множеств (МЗМ). Построение МЗМ необходимо для получения оптимального решения при решении задачи «Максимальное независимое множество» (МНМ).

Задача МНМ является классической труднорешаемой задачей теории графов и имеет историческую ценность, так как ее принадлежность к классу NP-трудных была показана одной из первых в уже классической работе Р. Карпа по вычислительной сложности.

Математическая постановка задачи МНМ имеет ряд важных практических приложений в таких разнообразных областях, как теория кодирования, задержка информации, допустимость ошибок, теория классификаций и т. д. Важность определения эффективного способа точного решения данной задачи также определяется легкостью сводимости к ней ряда известных труднорешаемых задач, как, например, задача Булевая Выполнимость.

Рассмотрим постановку задачи МНМ. На протяжении статьи мы будем рассматривать $G=(V,E)$ – простой неориентированный граф, где V – множество вершин; E – множество ребер.

Независимым множеством является подмножество вершин V попарно несмежных в графе G. Задача нахождения Максимального независимого множества требует определения независимого множества наибольшей размерности. Принадлежность задачи МНМ к классу труднорешаемых определяет тот факт, что в следствие вычислительной сложности точные алгоритмы получают ее оптимальное решение за время, которое растет экспоненциально от размерности задачи.

Исследованию данной задачи и созданию точных алгоритмов ее решения в настоящее время уделяется пристальное внимание. Рекурсивный алгоритм Тараяна и Троянского определяет Максимальное независимое множество в n-вершинном графе за время $O(2^{n/3})$, последние исследования по решению данной задачи включают также различные версии алгоритма ветвей и границ [4], [5], [6].

В [1] был предложен оригинальный точный алгоритм решения задачи МНМ, базирующийся на новых свойствах оптимального решения. Данный алгоритм является итерационным и имеет следующую структуру:

1. Построение приближенным алгоритмом допустимого независимого множества $V^{доп}$ и упорядочивание остатка вершин по их связности с построенным допустимым независимым множеством в линейный массив $V^{уп}$=V\\$V^{доп}$={$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$}.

2. Проведение итерационной процедуры определения максимального независимого множества.

2.1. На первом этапе мы рассматриваем подграф $G^1=(V^1,E^1)$, где V^1 =$V^{доп}\cup\{a_1\}$ и $E^1=V^1\times V^1\cap E$.

2.2. На k-й итерации мы рассматриваем подграф $G^k=(V^k,E^k)$, где V^k =$V^{доп}\cup\{a_1,...,a_k\}$ и в результате проведения итерации получаем максимальное независимое множество для данного подграфа.

2.3. На $k+1$-й итерации мы добавляем вершину a_{k+1} и проводим поиск решения для подграфа G^{k+1}.

Суть работы алгоритма заключается в проверке теоретической возможности увеличения на каждой итерации текущего допустимого независимого множества либо в доказательстве факта, что полученное текущее допустимое независимое множество и есть решение задачи на рассматриваемом множестве вершин. В случае положительного результата выполняется коррекция текущего допустимого независимого множества и, как следствие, его мощность увеличивается на единицу. Допустимое независимое множество, полученное на последней итерации, и есть решение задачи МНМ.

1. Теоретические свойства оптимального решения

Рассмотрим теоретические свойства задачи, позволяющие определять оптимальное решение задачи на каждой итерации.

Введем следующие обозначения:

$V^{\text{тk}}$ – текущее независимое множество на k-й итерации, являющееся оптимальным решением задачи для k-1-й итерации на множестве вершин $V^{доп} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}\}$;

V_k – первые k вершин упорядоченного множества $V^{уп}$.

На k-й итерации в рассмотрение включена вершина α_k. Таким образом, множество вершин на k-й итерации имеет следующий вид: $V^k = V^{\text{тk}} \cup V_k$.

$V^{\text{тk}}_{\alpha_i}$ – подмножество вершин из $V^{\text{тk}}$, каждая из которых связана в графе G с вершиной α_i: $V^{\text{тk}}_{\alpha_i} = \{u \in V^{\text{тk}} : (u, \alpha_i) \in E\}$.

$V^{\text{тk}}_S$ – множество вершин из $V^{\text{тk}}$, связанных ребрами в графе G с хотя бы одной вершиной множества S: $V^{\text{тk}}_S = \{u \in V^{\text{тk}} :\ \exists v \in S,\ (u, v) \in E\}$.

$$\Delta(S) = |V^{\text{тk}}_S| - |S|.$$

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием для выполнения неравенства $|V^{\text{тk+1}}| > |V^{\text{тk}}|$ является существование независимого множества $V' \subseteq V_k \backslash \{\alpha_k\}$ такого, что:

1. $(v, \alpha_k) \notin E,\ \forall v \in V'$.

2. $V^{\text{тk}}_{\alpha_k} \subseteq V^{\text{тk}}_{V'}$.

3. $\Delta(V') = 0$.

ISSN 1028-9763. Математичні машини і системи, 2003, № 3, 4

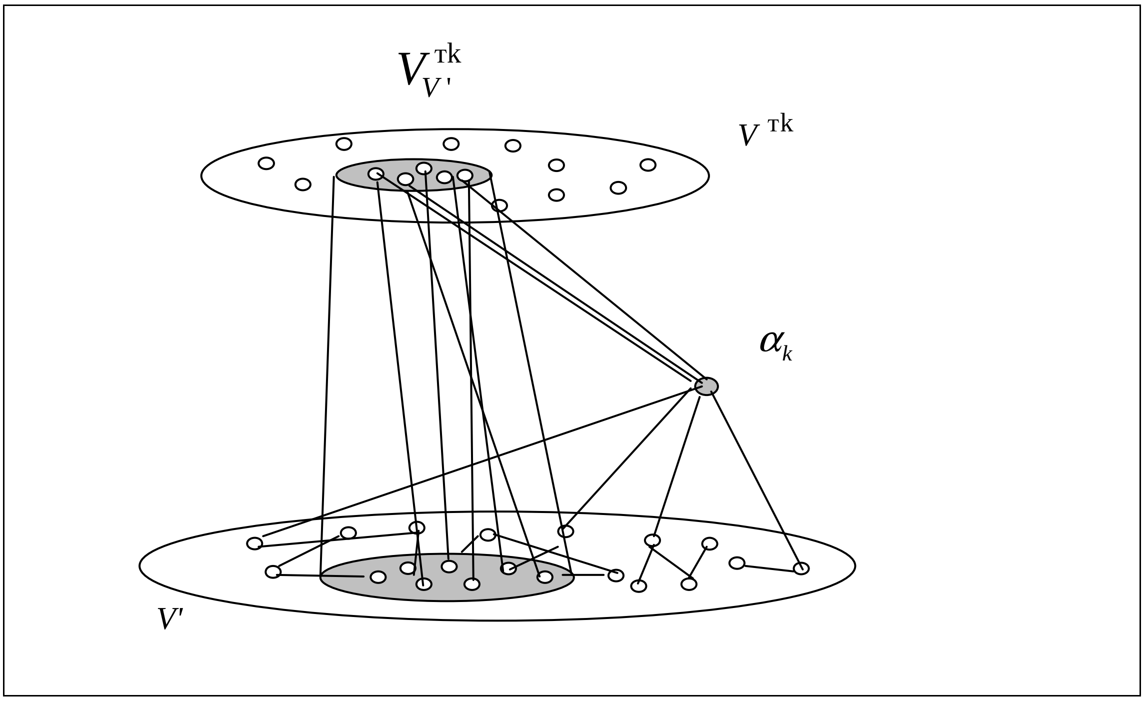

Рис. 1

Определение 1. Вершина α_k имеет покрытие на k-й итерации, если существует множество V', удовлетворяющее условиям теоремы 1.

Обозначим $\Pi(\alpha_k)$ – покрытие вершины α_k.

Определение 2. Независимое множество $S \subseteq V_k$ называется замкнутым, если для любого $w \in V_S^{\text{тk}}$ выполняется следующее условие:

$$\exists\, u \in S, v \in S : (u,w) \in E; (v,w) \in E, u \neq v .$$

Определение 3. Замкнутое множество S называется максимальным замкнутым множеством, если для любого допустимого замкнутого множества $S' = S \cup F$, $S' \subseteq V_k$ выполняется условие $V_S^{\text{тk}} \cap V_F^{\text{тk}} = \varnothing$.

Теорема 2. Если на k-й итерации существует покрытие вершины α_k — $\Pi(\alpha_k)$, тогда существует и $\Pi'(\alpha_k)$ – замкнутое множество, которое также является покрытием вершины α_k.

Выше изложенные теоретические свойства легли в основу следующего алгоритма.

2. Структура алгоритма решения задачи МНМ

Алгоритм определения оптимального решения на k-й итерации строит все максимальные замкнутые множества, которые теоретически могут содержать покрытие, и проводит поиск покрытия вершины α_k в максимальных замкнутых множествах.

Рассмотрим его структуру на произвольной k-й итерации [1].

1. Построение массивов связности $U_i(\alpha_k)$. Для каждой вершины $v \in V_{\alpha_k}^{\text{тk}}$ мы строим массив U_v, содержащий вершины V_k, смежные v:

$$U_v = \{w \in V_k : (w, v) \in E,\ v \in V_{\alpha_k}^{\text{тk}}\}.$$

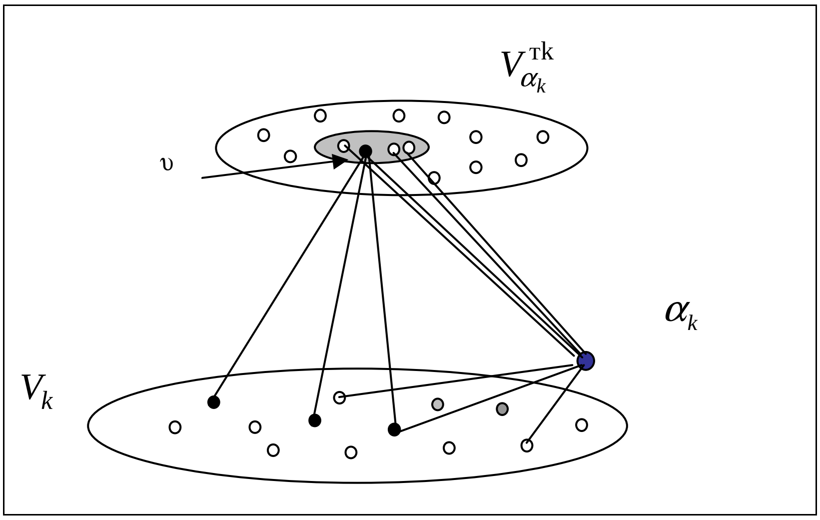

Рис. 2

2. Определения подмножества вершин, для которых доказано их вхождение или отсутствие в покрытии вершины α_k; определение $ES(\alpha_k)$ – множества существенных вершин, т.е. вершин, без принадлежности которых покрытия на данной итерации не существует.

3. Построения массивов связности вершин из текущего допустимого независимого множества с вершинами конструируемого максимального замкнутого множества.

$$U_v = \{w \in V_k : (w, v) \in E,\ v \in V_{ES(\alpha_k)}^{\text{тk}}\}.$$

4. Декомпозиция массивов связности, последовательные процедуры выбора массива U^1 и его множества вершин, включаемых в конструируемое максимальное замкнутое множество с последующим анализом и исключением из рассмотрения избыточных вершин:

$$\overline{U}^1 = \{ w_1^1(u), \ldots, w_j^1(u) \}.$$

Примечание. Выбор массива U^1 проводится только среди непокрытых массивов. Массив является покрытым, если в конструируемой начальной части максимального замкнутого множества содержится как минимум две вершины данного массива.

5. Построение первого замкнутого множества $S_{\text{зм}}^1$ и всех максимальных замкнутых множеств, его содержащих.

α_k, $ES(\alpha_k)$;

$w_1^1(u)$, $ES(w_1^1(u))$; $\qquad\qquad \overline{U}^1 = \{w_1^1(u), \ldots, w_j^1(u)\}$;

… $\qquad\qquad$ …

ISSN 1028-9763. Математичні машини і системи, 2003, № 3, 4

$w_1^i(u)$, $ES(w_1^i(u))$; $\qquad\qquad\qquad \bar{U}^i = \{w_1^i(u), \ldots, w_l^i(u)\}$.

6. Построение замкнутых и максимальных замкнутых множеств, которые теоретически могут содержать покрытие с учетом применения правил отсечения построения подмножеств ранее построенных максимальных замкнутых множеств и определения бесперспективных ветвей. Во всех предлагаемых правилах отсечения их реализация является полиномиальной.

Примечание. Данный алгоритм является версией алгоритма ветвей и границ, ветвление которого осуществляется по вершинам выбранных массивов $\bar{U}^i$.

Для данной процедуры выведены условия, при выполнении которых алгоритм строит:

– полиномиальное число максимальных замкнутых множеств;

– произвольное максимальное замкнутое множество за полиномиальное время.

Данные условия определяются ограничениями на структуру построения максимальных замкнутых множеств, определяемых после проведения всех правил отсечения, и связностью максимальных замкнутых множеств. При реализации данных условий реализуется полиномиальная составляющая данного алгоритма.

7. Полиномиальные процедуры построения покрытия вершины α_k либо доказательства невозможности его определения для каждого построенного максимального замкнутого множества.

Теорема 3. Определение покрытия вершины в произвольном максимальном замкнутом множестве – полиномиально разрешимая задача [3].

Целью данной статьи является определение свойств максимальных замкнутых множеств и формулировании на их основе дополнительных правил отсечения избыточных ветвей.

3. Правила отсечения вариантов

Рассмотрим ряд терминов и обозначений, введенных в [3], позволяющих определять отношения произвольных максимальных замкнутых множеств.

Пусть на рассматриваемом шаге работы алгоритма построено множество $S' \subset V_k$.

$V_k(S')$ – подмножество вершин V_k, полученное в результате исключения из V_k вершин, которые не могут принадлежать покрытию α_k, при условии, что S' ему принадлежит.

Определим следующие подмножества вершин:

$$V_{S'}^{S^*} = \{u \in S' : (u,v) \in E, v \in S^*\};\ V_{V_k(S')}^{S'} = \{v \in V_k(S') : (v,w) \in E,\ w \in S'\}.$$

$M(S')$ – произвольное максимальное замкнутое множество, содержащее S'.

Пусть алгоритм находится на этапе конструирования максимального замкнутого множества, начальной последовательностью которого является множество S', S^* – произвольное замкнутое или максимальное замкнутое множество, построенное на предыдущих шагах данной итерации. В [2], [3] были рассмотрены взаимозависимости максимальных замкнутых множеств и предложены правила отсечения бесперспективных вариантов. Данные теоретические результаты сделали статистически значимой полиномиальную ветвь предложенного алгоритма и позволили эффективно решать задачи достаточно большой размерности. Рассмотрим дальнейшее развитие предложенных результатов. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть множества S^* и S', $V_{S'}^{S^*} \neq \varnothing$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $V^{S^*}_{V_k(S')} = \varnothing$.

2. $V^{\text{тk}}_{V^{S^*}_{S'}} \subseteq V^{\text{тk}}_{S^*}$.

Тогда $\forall\, M(S')\, \exists\, M(S^*):\ M(S') \subseteq (M(S^*) \cup V^{S^*}_{S'}) \backslash V^{S'}_{S^*}$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть $\exists M(S')$: $M(S') \not\subset (M(S^*) \cup V^{S^*}_{S'}) \backslash V^{S'}_{S^*}$. Следовательно, $\exists v \in M(S') \backslash V^{S^*}_{S'}$: $v \notin M(S^*)$, $\forall M(S^*)$. Но из условия $V^{S^*}_{V_k(S')} = \varnothing$ следует, что $(u,v) \notin E, u \in M(S^*)$. Таким образом, вершина $v \in V_k(M(S^*))$. Таким образом, ее включение в $M(S^*)$ приводит к нарушению замкнутости. Но в силу того, что v не нарушает замкнутость $M(S')$ и т.к. $V^{M(S^*)}_{M(S')} = V^{S^*}_{S'}$, имеет место следующее условие: $\exists\ w \in V^{S^*}_{S'}:\ V^{\text{тk}}_{w} \setminus V^{\text{тk}}_{S^*} \neq \varnothing$. Пришли к противоречию, т.к. $V^{\text{тk}}_{V^{S^*}_{S'}} \subseteq V^{\text{тk}}_{S^*}$.

Условия данной теоремы позволяют избежать проведения избыточных ветвей алгоритма, т.к. мы можем получить множество максимальных замкнутых множеств, содержащих S', путем замены $V^{S'}_{S^*}$ на $V^{S^*}_{S'}$ в множестве ранее построенных максимальных замкнутых множеств, содержащих S^*.

Примечание. При условии нарушения замкнутости S^* дополнительно к требованиям теоремы 4 проверяется условие $\overline{U}^n(S') \subseteq \overline{U}^n(S^*)$, где $\overline{U}^n(S')$ – множество непокрытых массивов, порожденных набираемым множеством S'.

Рассмотрим следующую теорему, также позволяющую определять ветви, приводящие к построению бесперспективных максимальных замкнутых множеств.

Теорема 5. Пусть множества S^* и S', $V^{S^*}_{S'} = \varnothing$ удовлетворяют следующим условиям:

1. $V^{S^*}_{V_k(S')} = \{v\}$.

2. $\forall\ M(S^*)$, построенное на множестве S^*, удовлетворяет условию $V^{\text{тk}}_{v} \notin V^{\text{тk}}_{M(S^*)}$, и при построении $M(S^*)$ не использовались массивы U': $u' \in V^{\text{тk}}_{v}$.

Тогда произвольное максимальное замкнутое множество $M(S')$ удовлетворяет условию $\exists \mathrm{M}(\mathrm{S}^*) : \mathrm{M}(\mathrm{S}') \subseteq \mathrm{M}(\mathrm{S}^*)$.

Рассмотрим доказательство от противного. Пусть $\exists$ $M(S')$ такое, что $M(S') \not\subset M(S^*)$. Возможны два случая:

1. Пусть для любого теоретически возможного $M(S')$ выполняется условие $v \notin M(S')$. Выбрасываем вершину v из рассмотрения. Получаем подграф, для которого справедливы условия $V_{S'}^{S^*} = \varnothing$, $V_{V_k(S')}^{S^*} = \varnothing$, и, следовательно, в следствие теоремы 3 [2], условия теоремы выполнены.

2. $\exists\ M(S'): v \in M(S')$. Тогда существует вершина $w \in V_k$ либо множество несмежных S^* вершин $\{w, w_i\}: (w_i, w_j) \notin E$, $V_{w_i}^{\text{тk}} \cap V_{w_j}^{\text{тk}} \neq \varnothing$, $V_{\{w_i\}}^{\text{тk}} \cap V_w^{\text{тk}} \neq \varnothing$: $V_w^{\text{тk}} \cap V_v^{\text{тk}} \neq \varnothing$, $V_w^{\text{тk}} \cap V_{M(S^*)}^{\text{тk}} \neq \varnothing$. Таким образом, условие $V_v^{\text{тk}} \notin V_{M(S^*)}^{\text{тk}}$ нарушено. Пришли к противоречию, теорема доказана.

Следствие. Пусть для множеств S^* и S', $V_{S'}^{S^*} = \varnothing$ выполняется $V_{V_k(S')}^{S^*} = \bar{V}$ и $\forall v_i \in \bar{V}$ удовлетворяет $V_{v_i}^{\text{тk}} \notin V_{M(S^*)}^{\text{тk}}$ для $\forall\ M(S^*)$, построенного на множестве S^*, причем при построении $M(S^*)$ не использовались массивы U': $u' \in V_v^{\text{тk}}$. Тогда множества S^* и S' также удовлетворяют условиям теоремы 5.

Рассмотрим формулировку данного отсечения для смежных множеств S^* и S'.

Теорема 5'. Пусть множества S^* и S', $V_{S'}^{S^*} \neq \varnothing$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $V_{V_k(S')}^{S^*} = \{v\}$, $V_v^{\text{тk}} \notin V_{M(S^*)}^{\text{тk}}$ $\forall\ M(S^*)$, построенного на множестве S^*, и при построении $M(S^*)$ не использовались массивы U': $u' \in V_v^{\text{тk}}$;

2) $V_{V_{S'}^{S^*}}^{\text{тk}} \subseteq V_{S^*}^{\text{тk}}$.

Тогда $\forall\ M(S') \exists\ M(S^*)$: $M(S') \subseteq (M(S^*) \cup V_{S'}^{S^*}) \backslash V_{S^*}^{S'}$.

Аналогично формулируется следствие теоремы 5' для случая $V_{V_k(S')}^{S^*} = \bar{V}$.

Примечание. Условия теорем 5, 5' позволяют определять бесперспективные максимальные замкнутые множества и избежать построения избыточных ветвей алгоритма для разреженных графов.

4. Критерии эффективности

Предложенный алгоритм принадлежит к классу ПДС-алгоритмов, т.е. для него определены условия, выполнение которых в процессе решения индивидуальной задачи гарантирует получение ее точного решения за полиномиальное от ее размерности время (p-условия). Данные условия определены на процедуры получения максимального замкнутого множества и определения полиномиального числа максимальных замкнутых множеств. Выполнение p-условий анализируется на каждой итерации и в случае их выполнения на каждой итерации алгоритм гарантирует получение точного решения за полиномиальное время.

Если на произвольной k-й итерации при построении максимальных замкнутых множеств после реализации правил отсечения р-условия оказались нарушены, но объем вычислений экспоненциального алгоритма построения максимальных замкнутых множеств оказался реализуем, то декомпозиционная составляющая предложенного ПДС-алгоритма является эффективной на данной итерации.

Очевидно, что чем больше в алгоритме введено правил отсечения, тем выше вероятность реализации р-условий либо больше эффективность его декомпозиционной составляющей.

Статистический анализ эффективности предложенного алгоритма показал следующую зависимость. При относительной заполненности графа d, определяемой как математическое ожидание степени вершины графа, отнесенное к n – общему количеству вершин, лежащей в диапазоне:

$d < 20$ и $d > 40$ при $n < 150$;

$d < 12$ и $d > 35$ при $150 < n < 250$;

$d < 9$ и $d > 25$ при $250 < n < 400$.

ПДС-алгоритм статистически эффективно решает задачу МНМ. Рассмотренные статистические исследования были проведены без учета предложенных в статье теоретических свойств МЗМ. Данные исследования показали, что при средне слабой заполнености вершин графа р-условия рассмотренного алгоритма слабо реализуемы. Причем с увеличением n – общего количества вершин диапазон неэффективного решения смещается в область слабо заполненных графов.

Условия теорем 5 и 5', определяющие отсечения избыточных и бесперспективных ветвей, и условия построения избыточных МЗМ статистически эффективны для слабо заполненных графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксенова Л.А. Общая схема ПДС-алгоритма решения задачи Максимальное независимое множество // Математические машины и системы. – 2000. – № 2. – С. 44 – 58.
2. Аксьонова Л.О. Нові властивості оптимального рішення задачі "Максимальна незалежна множина" та правила відсікання надлишкових гілок // Вісник Київського університету. Фізико-математичні науки. – 2000. – Вип. 4.
3. Аксенова Л.А. Дополнительные свойства правил отсечения алгоритма решения задачи "Максимальное независимое множество" и схема их реализации // Математические машины и системы. – 2001. – № 1, 2. – С. 25 – 34.
4. Babel L. Finding maximum clique in arbitrary and special graphs // Computing. – 1991. – Vol. 46. – P. 321 – 341.
5. Carraghan R. and Pardalos P.M. An exact algorithm for the maximum clique problem // Oper. Res. Lett. – 1990. – Vol. 9. – P. 375 – 382.
6. Pardalos P.M. and Rodgers G.P. A branch and bound algorithm for the maximum clique problem // Computers Oper. Res. – 1992. – Vol. 19(5). – P. 363 – 375.
7. Pavlov A., Pavlova L. PDC-algorithms for intractable combinatorial problems. Theory and methodology of design. – Uzhhorod: Karpatskij region shelf. – 1997. – P. 320.