

УДК 530.12

**В. Д. Гладуш, М. В. Галаджий**

Днепропетровский национальный университет  
49010 Днепропетровск, пр. Гагарина, 72

**Радиальные движения нейтральных  
и заряженных пробных частиц в поле  
заряженного сферически-симметричного объекта в ОТО**

*Исследуются радиальные движения заряженных и нейтральных пробных частиц в поле Рейсснера — Нордстрема и проводится их классификация. Изучаются условия зависания этих частиц над центральным источником и условия устойчивости таких равновесных статических состояний. Показано, что устойчивые состояния возможны только для связанных состояний слабо заряженных частиц в поле аномально заряженного центрального источника.*

**РАДІАЛЬНІ РУХИ НЕЙТРАЛЬНИХ І ЗАРЯДЖЕНИХ ПРОБНИХ ЧАСТИНОК У ПОЛІ ЗАРЯДЖЕНОГО СФЕРИЧНО-СИМЕТРИЧНОГО ОБ'ЄКТА У ЗТВ, Гладуш В. Д., Галаджій М. В. — Досліджуються радіальні рухи заряджених і нейтральних пробних частинок у полі Рейсснера — Нордстрема та проводиться їхня класифікація. Вивчаються умови зависання цих частинок над центральним джерелом і умови стійкості таких рівноважних статичних станів. Показано, що стійкі стани можливі тільки для зв'язаних станів слабо заряджених частинок у полі аномально зарядженого центрального джерела.**

**RADIAL MOTIONS OF NEUTRAL AND CHARGED TEST PARTICLES IN THE FIELD OF AN CHARGED SPHERICALLY SYMMETRICAL OBJECT IN GENERAL RELATIVITY, by Gladush V. D., Galadgyi M. V. — The radial motions of charged and neutral test particles in the Reissner — Nordström field are investigated and their classification is built. The hovering conditions of these particles over the central source and stability conditions of such equilibrium static states are studied. It is shown that stable states are only possible for the bound states of the weakly charged particles in the field of the abnormally charged central source.**

**ВВЕДЕНИЕ**

Современные данные наблюдательной астрономии и достижения астрофизики свидетельствуют о том, что черные дыры (ЧД) играют важную роль во многих астрофизических явлениях, происходящих во Вселенной. В связи с

этим важное значение имеют вопросы всестороннего исследования свойств ЧД. Классическим методом ОТО, позволяющим исследовать структуру и свойства пространства-времени вблизи гравитирующей массы, а также понять физические процессы, происходящие вокруг центрального объекта, является изучение движения пробных частиц. Наличие у источника гравитационного поля электрического заряда существенным образом влияет на геометрию пространства-времени и характер движения пробных тел. Выявление особенностей движения заряженных частиц в таких пространствах является неотъемлемой частью общего исследования поведения заряженных конфигураций в ОТО.

Здесь рассматриваются радиальные движения пробных частиц в гравитационном поле сферически-симметричного источника массы  $M$  и заряда  $Q$ , которое описывается метрикой Рейсснера — Нордстрема

$$ds^2 = Fc^2dT^2 - F^{-1}dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где

$$F = 1 - \frac{2\gamma M}{c^2 R} + \frac{\gamma Q^2}{c^4 R^2},$$

$\gamma$  — гравитационная постоянная,  $c$  — скорость света. Заряд  $Q$  порождает также электрическое поле с потенциалом

$$\varphi = \frac{Q}{R}.$$

Отметим, что в зависимости от соотношения между массой и зарядом выделяют следующие типы заряженных релятивистских объектов: черная дыра ( $\sqrt{\gamma}M > |Q|$ ), экстремально заряженная черная дыра ( $\sqrt{\gamma}M = |Q|$ ), аномально заряженный объект ( $\sqrt{\gamma}M < |Q|$  — голая сингулярность).

Стандартный метод анализа динамики частиц основан на изучении поведения «скоростного потенциала»  $U_V$ , вытекающего из «радиального» уравнения движения  $(mc^2 dR/ds)^2 \equiv -U_V = -U_V(M, Q, m, q, E, L, R)$  (см., например, [2, 7, 6, 11, 15]), где параметры  $m$  и  $q$  — масса и заряд частицы,  $E$  и  $L$  — полная энергия и орбитальный момент частицы в поле Рейсснера — Нордстрема с параметрами  $M$  и  $Q$ . При этом неравенство  $U_V \leq 0$  определяет области допустимых радиальных движений частицы, а корни уравнения  $U_V = 0$  относительно  $R$  задают точки поворота. Естественно, этот метод применим, когда существует полная система первых интегралов уравнений движения, позволяющих построить «радиальное» уравнение движения первого порядка.

Для уменьшения размерности пространства параметров можно использовать масштабную инвариантность динамической системы (если она имеет место), а также метод введения дополнительного потенциала. К новому потенциалу можно прийти, разрешая уравнение  $U_V(M, Q, m, q, E, L, R) = U_V$  относительно некоторого параметра. Выбор параметра диктуется постановкой задачи и соображениями удобства. Например, разрешая указанное уравнение относительно центральной массы  $M$ , приходим к «массовому потенциалу»  $U_M(Q, m, q, E, L, R)$ , относительно энергии частицы  $E$  — к «энергетическому потенциалу»  $U_E(M, Q, m, q, L, R)$ , а относительно заряда частицы  $q$  — к «зарядовому потенциалу»  $U_q(M, Q, m, E, L, R)$  и т. д. Так, изучение радиального движения заряженных пробных частиц в поле Рейсснера — Нордстрема с помощью «энергетического потенциала»  $U_E$  проводилось в работе [12], а подход с использованием «зарядового потенциала»  $U_q$  фактически содержится в работе [11].

Оказывается, что для исследования одномерного радиального движения нейтральных и заряженных пробных частиц ( $L = 0$ ) в поле заряженного сферически-симметричного источника удобным является «массовый потенциал». Использование этого потенциала позволяет построить наглядную картину движений и приводит к простой и естественной классификации траекторий частиц.

Отметим, что изучение радиальных траекторий частиц в поле Рейсснера — Нордстрема проводилось в работах [9, 11, 12, 14]. Подробное описание движения нейтральных и заряженных частиц в поле Рейсснера — Нордстрема можно также найти в работе [8]. Особенностью движения в поле заряженного источника является то, что как для нейтральных, так и для заряженных пробных частиц в некоторых случаях имеет место отталкивание от гравитирующего центра [1, 13, 17]. Это явление тесным образом связано с вопросом устойчивости заряженных релятивистских конфигураций относительно гравитационного коллапса и нахождения условий, при которых гравитационное сжатие останавливается. Поэтому одним из важнейших мотивов исследований является получение условий, при которых падение на центр не происходит (условия зависания или равновесия заряженной частицы) и нахождение условий устойчивости этого состояния в поле заряженного объекта. Этой задаче посвящена, например, работа [10]. Заметим, что здесь указанная задача рассматривалась без учета закона сохранения и была решена не до конца. В работе [11] найдены условия устойчивого, безразличного и неустойчивого равновесия для заряженных частиц в поле заряженного гравитирующего центра. Однако полученные в этой работе условия зависания определены не в замкнутой форме, т. е. не только через параметры частицы и гравитирующего центра.

В данной работе строится классификация радиальных движений заряженных пробных частиц в сферически-симметричных гравитационном и электрическом полях центрального источника, которая естественным образом вытекает из метода «массового потенциала». В замкнутой форме получены условия зависания (или условия равновесия) частиц и условия стабильности этих статических состояний.

#### УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ПРОБНЫХ ЧАСТИЦ

Действие для заряженной пробной частицы массы  $m$  и заряда  $q$  в поле Рейсснера — Нордстрема берем в виде

$$S = - \int (mc ds + q\varphi dT) = \int L dT. \quad (1)$$

Здесь  $L$  — лагранжиан частицы, который для радиальных движений принимает вид

$$L = -mc \sqrt{Fc^2 - F^{-1}\dot{R}^2} - qQ/R, \quad (2)$$

где точка означает дифференцирование по  $T$ . Действие (1) можно получить, например, обобщая действие для заряженной частицы в электромагнитном поле СТО [3].

Легко видеть, что полная энергия заряженной частицы сохраняется и равна

$$E = \frac{mc^2 F}{\sqrt{F - F^{-1}\dot{R}^2/c^2}} + \frac{qQ}{R} = mc^3 F \frac{dT}{ds} + \frac{qQ}{R} = \text{const}. \quad (3)$$

Отсюда следует уравнение мировой линии:

$$\left( mc^2 \frac{dR}{ds} \right)^2 = \left( E - \frac{qQ}{R} \right)^2 - m^2 c^4 \left( 1 - \frac{2\gamma M}{c^2 R} + \frac{\gamma Q^2}{c^4 R^2} \right) \equiv -U_V, \quad (4)$$

$$mc^2 \frac{dT}{ds} = \frac{1}{cF} \left( E - \frac{qQ}{R} \right).$$

В соотношении (4) величина

$$U_V = U_V(M, Q, m, q, E, R) = m^2 c^4 - E^2 - (\gamma m^2 c^2 M - EqQ) \frac{2}{R} + (\gamma m^2 - q^2) \frac{Q^2}{R^2}$$

— «скоростной потенциал». Допустимые движения определяются неравенством  $U_V(M, Q, m, q, E, R) \leq 0$ . Корни уравнения  $U_V(M, Q, m, q, E, R) = 0$  относительно  $R$  определяют точки поворота. Для ускорения частицы из (4) находим выражение

$$\frac{d^2 R}{ds^2} = \frac{1}{m^2 c^4} \left[ (EqQ - \gamma m^2 c^2 M) \frac{1}{R^2} + (\gamma m^2 - q^2) \frac{Q^2}{R^3} \right]. \quad (5)$$

#### КЛАССИФИКАЦИЯ РАДИАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Объектом нашей классификации является совокупность центрального источника с параметрами  $M, Q$  и пробной частицы с параметрами  $m, q, E$ , движущейся в поле этого источника. Классификация движений по скоростному потенциалу  $U_V(M, Q, m, q, E, R)$  здесь затруднительна из-за большого количества параметров.

Отметим, что лагранжиан (2), энергия (3) и уравнение движения (4) частицы инвариантны относительно масштабного преобразования

$$(M, Q, m, q, E, R, T, s) \longrightarrow (aM, aQ, am, aq, aE, aR, aT, as).$$

Поэтому один из параметров, например  $Q$ , можно зафиксировать. Дальнейшее уменьшение размерности пространства параметров достигается введением «массового потенциала». Рассматривая  $U_V$  как новую переменную, разрешим уравнение  $U_V = U_V(M, Q, m, q, E, R)$  относительно  $M$ :

$$M = U_M - \frac{R}{2\gamma m^2 c^2} U_V. \quad (6)$$

Здесь величина  $U_M = U_M(Q, m, q, E, R)$  определяется следующим образом:

$$U_M = \frac{1}{2\gamma m^2 c^2} \left[ (m^2 c^4 - E^2) R + 2EqQ + (\gamma m^2 - q^2) \frac{Q^2}{R} \right]. \quad (7)$$

Эту величину назовем «массовым потенциалом». Условие  $U_V \leq 0$  приводит к неравенству  $U_M(Q, m, q, E, R) \leq M$ , которое определяет область допустимых движений частицы в терминах массового потенциала. Корни уравнения  $U_M(Q, m, q, E, R) = M$  относительно  $R$  задают точки поворота.

Выбор потенциала  $U_M$  обусловлен тем, что он имеет вид дробно-линейной функции, поведение которой определяется ее асимптотиками при  $R \rightarrow 0$  и  $R \rightarrow \infty$ , т. е. коэффициентами при  $R$  и  $1/R$ . Эти коэффициенты зависят только от энергетических и электрических параметров, определяющих тип динамики частиц.

Оказывается, что поведение массового потенциала  $U_M$  при  $R \rightarrow 0$  зависит только от электрических характеристик частицы:

$$U_M \rightarrow +\infty, \text{ когда } \gamma m^2 > q^2 \text{ (слабо заряженная частица);}$$

$$U_M \rightarrow EqQ/\gamma m^2 c^2, \text{ когда } \gamma m^2 = q^2 \text{ (экстремально заряженная частица);}$$

$$U_M \rightarrow -\infty, \text{ когда } \gamma m^2 < q^2 \text{ (аномально заряженная частица),}$$

тогда как поведение  $U_M$  при  $R \rightarrow \infty$  зависит только от энергетических характеристик частицы:

$$U_M \rightarrow +\infty, \text{ когда } E^2 < m^2 c^4 \text{ (связанные состояния частицы);}$$

$$U_M \rightarrow EqQ/\gamma m^2 c^2, \text{ когда } E^2 = m^2 c^4 \text{ (частица критической массы);}$$

$$U_M \rightarrow -\infty, \text{ когда } E^2 > m^2 c^4 \text{ (несвязанные состояния частицы).}$$

В координатах  $R, U$  график массового потенциала при фиксированных параметрах  $Q, m, q, E$  представляется кривой  $U = U_M(Q, m, q, E, R)$ . Области допустимых движений соответствуют отрезкам горизонтальных прямых  $U = M = \text{const}$ , точки которых лежат выше точек кривой  $U = U_M(Q, m, q, E, R)$ . Точки пересечения кривой  $U = U_M(Q, m, q, E, R)$  и прямой  $U = M = \text{const}$  дают радиусы поворота  $R_M$ .

Полную историю частиц можно проследить на диаграммах Пенроуза для метрики Рейсснера — Нордстрема. Эта задача изучалась в работах [8, 9, 14, 16] и здесь не рассматривается. Однако для сохранения некоторой информации о структуре пространства-времени здесь строятся кривые горизонтов метрики Рейсснера — Нордстрема. Для этого введем дополнительно функцию  $U_g(Q, R)$  как решение уравнения

$$F(M, Q, R) = 1 - 2\gamma M/c^2 R + \gamma Q^2/c^4 R^2 = 0$$

относительно  $M$ :

$$M = \frac{1}{2} \left( \frac{Rc^2}{\gamma} + \frac{Q^2}{Rc^2} \right) \equiv U_g(Q, R). \quad (8)$$

Функция  $U_g(Q, R)$  определяет значение массы черной дыры, имеющей заряд  $Q$  и радиус горизонта  $R$ . В координатах  $R, U$  точки пересечения кривой  $U = U_g(Q, R)$  и прямой  $U = M = \text{const}$  дают радиусы горизонтов  $R_{\pm}$ , через которые частица проходит при движении в поле Рейсснера — Нордстрема.

Сравнивая  $U_M(Q, m, q, E, R)$  и  $U_g(Q, R)$ , приходим к соотношению

$$U_g(Q, R) = U_M(Q, m, q, E, R) + \frac{1}{2\gamma m^2 c^2} \left( E\sqrt{R} - \frac{qQ}{\sqrt{R}} \right)^2.$$

Отсюда следует, что  $U_g(Q, R) \geq U_M(Q, m, q, E, R)$ . Это значит, что в координатах  $R, U$  кривая  $U = U_g(Q, R)$  всегда лежит выше кривой  $U = U_M(Q, m, q, E, R)$ , и точки пересечения прямой  $U = M = \text{const}$  с кривой горизонтов  $U = U_g(Q, R)$  находятся внутри области допустимых движений  $U_M(Q, m, q, E, R) \leq M$ . Последнее соответствует тому, что радиусы поворота не могут находиться в Т-области ( $R_- \leq R \leq R_+$ , где  $R_{\pm} = c^{-2}(\gamma M \pm \sqrt{\gamma^2 M^2 - \gamma Q^2})$  — внешний и внутренний горизонты Рейсснера — Нордстрема), в которой радиальная координата становится временной. Для нейтральных частиц с  $E = 0$  потенциал  $U_M(Q, m, q, E, R)$  совпадает с функцией  $U_g(Q, R)$ . Равенство  $U_g(Q, R) = U_M(Q, m, q, E, R)$  при  $E \neq 0$ ,  $q > 0$  определяет точку касания этих кривых  $R_t = qQ/E$ . Эта же точка для частицы с энергией  $E = qQ/R_+$  является точкой поворота на горизонте

событий [8], так что  $R_t = R_+$ . Отметим, что кривые массовых потенциалов нейтральной и положительно заряженной частиц одинаковой энергии пересекаются в точке  $R = R_t/2 = qQ/2E$ .

Рассмотрим ускорение частиц (5). Оно обращается в нуль при

$$R = R_a \equiv \frac{(\gamma m^2 - q^2)Q^2}{\gamma m^2 c^2 M - EqQ}.$$

Для положительно слабо заряженных частиц ( $q > 0$ ) притяжение реализуется при  $R > R_a$ , когда выполняется неравенство  $Mc^2/Q > Eq/\gamma m^2$ , и для anomalно заряженных частиц при  $R < R_a$ , когда  $Mc^2/Q < Eq/\gamma m^2$ .

Для отрицательно заряженных частиц ( $q < 0$ ) отталкивание возможно в области  $R < R_a$  только для слабозаряженных частиц ( $|q| < m\sqrt{\gamma}$ ).

В случае экстремально заряженных частиц знак ускорения, а значит и характер результирующего взаимодействия (притяжение или отталкивание), не зависит от расстояния, а только от параметров системы:

$$\frac{d^2R}{ds^2} = \frac{\gamma}{c^4 R^2} \left( E \frac{Q}{q} - Mc^2 \right).$$

При  $E/q < Mc^2/Q$  имеет место притяжение, а при  $E/q > Mc^2/Q$  — отталкивание. Когда отношение энергии частицы к ее заряду равно отношению «полной энергии» центрального объекта к его заряду ( $E/q = Mc^2/Q$ ), то гравитационное и электрическое взаимодействия полностью скомпенсированы.

Для построения графиков  $U_M(R)$  и  $U_g(R)$  введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \tilde{U}_M &= \sqrt{\gamma} U_M / Q, & \tilde{U}_g &= \sqrt{\gamma} U_g / Q, & \tilde{x} &= Rc^2 / \sqrt{\gamma} Q, \\ \varepsilon &= E / mc^2, & \beta &= q / \sqrt{\gamma} m, & M &= \sqrt{\gamma} M / Q. \end{aligned}$$

Тогда выражения (7) и (8) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{U}_M(\varepsilon, \beta, x) &= \frac{1}{2} \left[ (1 - \varepsilon^2)x + 2\varepsilon\beta + (1 - \beta^2) \frac{1}{x} \right], \\ \tilde{U}_g(x) &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

Графики функций  $\tilde{U}_M(x)$  и  $\tilde{U}_g(x)$  в безразмерных координатах  $x$ ,  $\tilde{U}$  представлены на рис. 1 сплошными и штрих-пунктирными линиями соответственно. Области допустимых движений удовлетворяют неравенству  $\tilde{U}_M(\varepsilon, \beta, x) \leq M$  и соответствуют отрезкам пунктирных прямых  $\tilde{U} = M = \text{const}$ . При этом случаи  $\tilde{U} = M > 1$ ,  $\tilde{U} = M = 1$  и  $\tilde{U} = M < 1$  описывают движения частиц в поле черной дыры, экстремально заряженной черной дыры и anomalно заряженного объекта (голой сингулярности) соответственно.

Точки пересечения кривой массового потенциала  $\tilde{U} = \tilde{U}_M(\varepsilon, \beta, x)$  и прямой  $\tilde{U} = M = \text{const}$  дают радиусы поворота  $R_M$ . Кривые  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответствуют массовым потенциалам для случаев  $q > 0$ ,  $q < 0$  и  $q = 0$ , а кривая  $d$  — массовому потенциалу частицы с  $E = 0$ .

В зависимости от соотношения между параметрами частицы  $m$ ,  $q$ ,  $E$  и массой центрального источника  $M$  возможны следующие основные типы движений частиц.

1. Слабо заряженные частицы:  $\gamma m^2 > q^2$  или  $\beta^2 < 1$  (рис. 1, а—в). По энергетическим характеристикам различаем следующие подтипы движений.

1.1. Связанные состояния слабо заряженных частиц:  $E^2 < m^2 c^4$ , или  $\epsilon^2 < 1$ . Движение происходит в ограниченной области  $R_1 \leq R \leq R_2$  (рис. 1, а), где точки поворота определяются равенствами

$$R_{1,2} = \frac{\gamma M m^2 c^2 - EqQ \mp m\sqrt{\Delta}}{m^2 c^4 - E^2}.$$

Здесь

$$\Delta = [\gamma^2 M^2 m^2 c^4 - 2EqQ\gamma M c^2 + Q^2(q^2 c^4 - \gamma(m^2 c^4 - E^2))].$$

Для нейтральных частиц с  $E = 0$ , когда функции  $U_M(Q, m, q, E, R)$  и  $U_g(Q, R)$  совпадают, движение происходит в области  $R_- \leq R \leq R_+$ .

Из рис. 1, а видно, что частица находится внутри потенциальной ямы. Масса центрального источника, совместимая с условиями  $\gamma m^2 > q^2$  и  $E^2 < m^2 c^4$ , лежит в области  $(U_M)_{\min} \leq M < \infty$ , где

$$(U_M)_{\min} = U_M(R_{\text{extr1}}) = \frac{Q}{\gamma m^2 c^2} \left[ Eq + \sqrt{(m^2 c^4 - E^2)(\gamma m^2 - q^2)} \right] < \frac{Q}{\sqrt{\gamma}}.$$

Если  $M = (U_M)_{\min}$ , то частица находится на дне «потенциальной ямы». При этом  $dR/ds = 0$  и  $d^2R/ds^2 = 0$ , и частица зависает над аномально заряженным объектом на расстоянии

$$R_{\text{extr1}} = Q \sqrt{\frac{\gamma m^2 - q^2}{m^2 c^4 - E^2}}. \quad (9)$$

При  $M > (U_M)_{\min}$  уравнение (4) приводит к траектории движения  $R = R(s)$  в неявной форме:

$$s(R) - s_0 = \frac{2mc^2(\gamma M m^2 c^2 - EqQ)}{(m^2 c^4 - E^2)^{3/2}} \arctg \sqrt{\frac{R - R_1}{R_2 - R}} - \frac{mc^2 \sqrt{(E^2 - m^2 c^4)R^2 + 2(\gamma M m^2 c^4 - EqQ)R - Q^2(\gamma m^2 - q^2)}}{(m^2 c^4 - E^2)}.$$

Частица совершает ангармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2}{c} [s(R_2) - s(R_1)] = 2\pi mc(\gamma M m^2 c^2 - EqQ)$$

по собственному времени.

1.2. Слабо заряженные частицы критической массы:  $E^2 = m^2 c^4$ , или  $\epsilon^2 = 1$  (рис. 1, б). Массовый потенциал имеет простой вид

$$U_M(Q, m, q, R) = \frac{1}{2\gamma m^2 c^2} \left[ 2mqQc^2 + (\gamma m^2 - q^2) \frac{Q^2}{R} \right]. \quad (10)$$

Масса центрального источника, совместная с условиями  $\gamma m^2 > q^2$  и  $E^2 = m^2 c^4$ , лежит в области  $qQ/\gamma m \leq M < \infty$ . При массах  $M > qQ/\gamma m$  область движения ограничена условием

$$R \geq R_3 = \frac{Q^2(\gamma m^2 - q^2)}{2mc^2(\gamma m M - qQ)}.$$

Частицы падают из бесконечности с нулевой начальной скоростью, достигают радиуса поворота  $R = R_3$  и снова уходят на бесконечность. При  $M = qQ/(\gamma m)$  частица покоится на бесконечности.

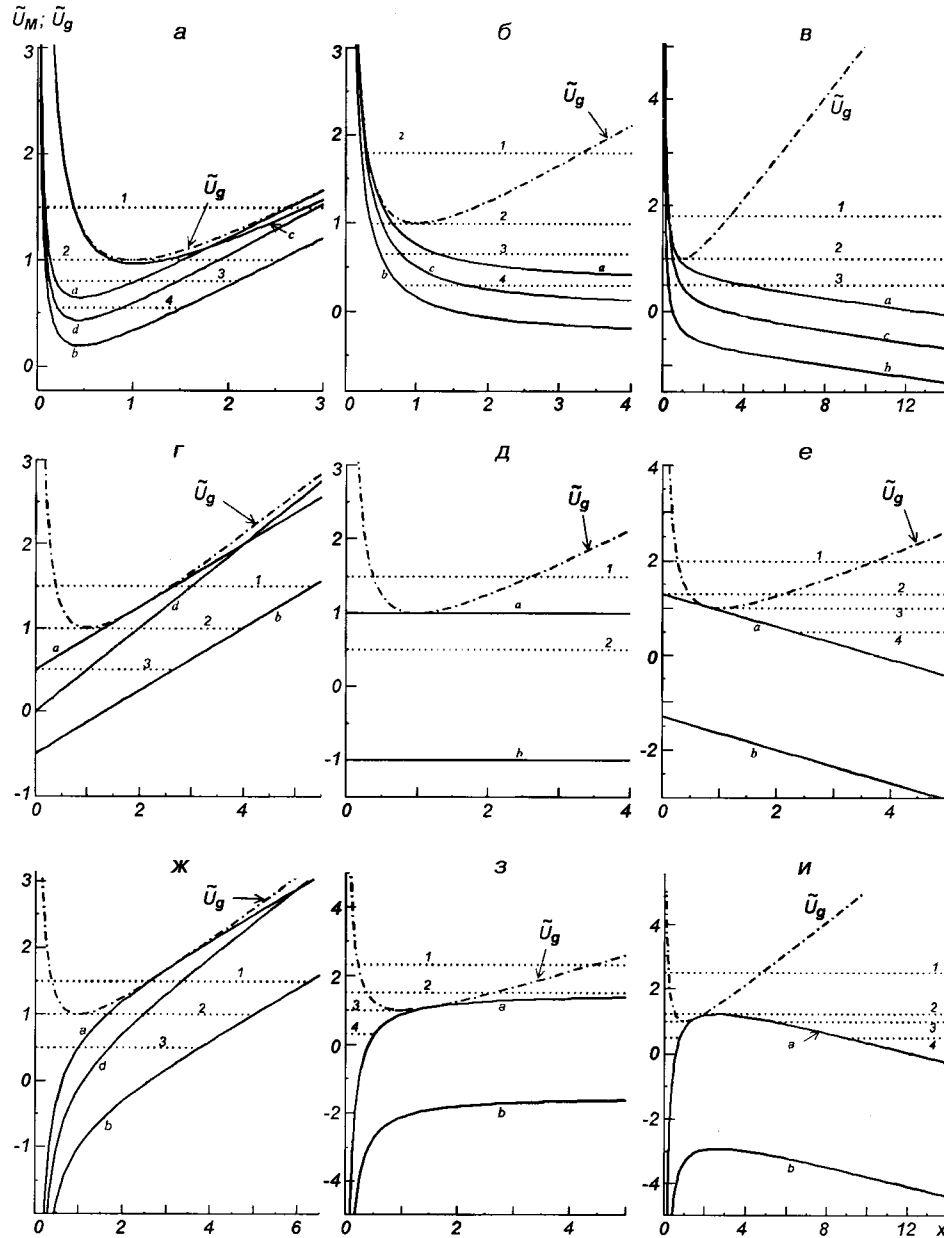


Рис. 1. Поведение функций  $\tilde{U}_M(x)$  и  $\tilde{U}_g(x)$  в безразмерных координатах для слабо заряженных частиц ( $\gamma t^2 > q^2$ , фрагменты а, б, в), экстремально заряженных частиц ( $\gamma t^2 = q^2$ , фрагменты г, д, е) и anomalно заряженных частиц ( $\gamma t^2 < q^2$ , фрагменты ж, з, и). Фрагменты а, г, ж соответствуют случаю связанных состояний частиц ( $E^2 < m^2 c^4$ ), б, д, з — случаю частиц критической массы ( $E^2 = m^2 c^4$ ), в, е, и — случаю несвязанных состояний частиц ( $E^2 > m^2 c^4$ )

1.3. Несвязанные состояния слабо заряженных частиц:  $E^2 > m^2 c^4$ , или  $\epsilon^2 > 1$  (рис. 1, в). Движение происходит в области

$$R \geq R_4 = \frac{EqQ - \gamma M m^2 c^2 + m\sqrt{\Delta}}{E^2 - m^2 c^4}.$$

Частицы с начальной скоростью  $|dR/ds| = \sqrt{E^2/m^2 c^4 - 1}$  падают из



бесконечности, достигают радиуса поворота  $R = R_4$  и снова уходят на бесконечность.

**2. Экстремально заряженные частицы:**  $\gamma t^2 = q^2$ , или  $\beta^2 = 1$  (рис. 1, з—е). Массовый потенциал имеет простую линейную зависимость

$$U_M(Q, q, E, R) = \frac{1}{2\gamma q^2 c^2} [(q^2 c^4 - \gamma E^2)R + 2\gamma q Q E].$$

**2.1. Связанные состояния экстремально заряженных частиц:**  $E^2 < m^2 c^4$ , или  $\varepsilon^2 < 1$  (рис. 1, з). Масса центрального источника, совместная с условиями  $\gamma t^2 = q^2$  и  $E^2 < m^2 c^4$ , ограничена неравенством  $M \geq EQ/\sqrt{\gamma} m c^2$ . При  $M > EQ/\sqrt{\gamma} m c^2$  движение происходит в области  $0 \leq R \leq R_5$  (пунктирные прямые 1, 2 и 3 для всех частиц, кроме частиц с  $q > 0$  для прямой 3). Здесь

$$R_5 = \frac{2\sqrt{\gamma} m (\sqrt{\gamma} m M c^2 + EQ)}{m^2 c^4 - E^2}.$$

При  $M = EQ/\sqrt{\gamma} m c^2$  частица находится в особенности  $R = 0$  постоянно.

**2.2. Экстремально заряженные частицы критической массы:**  $E^2 = m^2 c^4$ , или  $\varepsilon^2 = 1$  (рис. 1, д). Массовый потенциал не зависит от радиуса:  $U_M(Q, m, q) = mQ/q$ . Частица с начальной нулевой скоростью падает из бесконечности, и со скоростью и ускорением

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 = \left(M - \frac{q}{|q|} \frac{Q}{\sqrt{\gamma}}\right) \frac{2\gamma}{Rc^2},$$

$$\frac{d^2R}{ds^2} = \frac{1}{c^2 R^2} \left(\frac{q}{|q|} Q\sqrt{\gamma} - \gamma M\right)$$

движется к центру или наоборот. Масса центрального источника, совместная с условиями  $\gamma t^2 = q^2$  и  $E^2 = m^2 c^4$ , ограничена неравенством  $M \geq qQ/|q|\sqrt{\gamma}$ .

Для частиц с  $q > 0$  и  $M > Q/\sqrt{\gamma}$  и с  $q < 0$  при любых  $M > 0$  область движений есть  $0 \leq R \leq \infty$ . Во всех случаях ускорение отрицательно, и мы имеем притяжение. Когда  $Q = M\sqrt{\gamma}$  (экстремально заряженная черная дыра), то скорость и ускорение частиц с  $q > 0$  равны нулю. Они находятся в состоянии безразличного равновесия и покоятся при произвольном  $R$ .

**2.3. Несвязанные состояния экстремально заряженных частиц:**  $E^2 > m^2 c^4$ , или  $\varepsilon^2 > 1$  (рис. 1, е). Для частиц с  $q > 0$  при массах  $0 < M < EQ/\sqrt{\gamma} m c^2$  ускорение  $d^2R/ds^2 > 0$ , движение имеет характер отталкивания и происходит в области  $R \geq R_6$  (прямые 3 и 4), где

$$R_6 = \frac{2\sqrt{\gamma} m (EQ - \sqrt{\gamma} M m c^2)}{E^2 - m^2 c^4}.$$

Частица, пришедшая из бесконечности, достигает радиуса остановки  $R_6$  и вновь уходит на бесконечность. При значениях масс  $M \geq EQ/\sqrt{\gamma} m c^2$  ускорение  $d^2R/ds^2 < 0$ , и мы имеем притяжение. Частицы падают из бесконечности и достигают особенности (прямые 1 и 2). Частицы же с  $q < 0$  при всех значениях масс  $M > 0$  падают на сингулярность.

**3. Аномально заряженные частицы:**  $\gamma t^2 < q^2$ , или  $\beta^2 > 1$  (рис. 1, ж—и).

**3.1. Связанные состояния аномально заряженных частиц:**  $E^2 < m^2 c^4$ , или  $\varepsilon^2 < 1$ . Движение происходит в области  $0 \leq R \leq R_7$  (рис. 1, ж), где

$$R_7 = \frac{\gamma M m^2 c^2 - EqQ + m\sqrt{\Delta}}{m^2 c^4 - E^2},$$

причем при всех  $M > 0$  (прямые 1, 2 и 3).

3.2. Аномально заряженные частицы критической массы:  $E^2 = m^2 c^4$ , или  $\epsilon^2 = 1$  (рис. 1, з). Массовый потенциал имеет вид (10). Частицы, двигаясь в поле центрального источника с  $0 < M < qQ/\gamma t$  (прямые 3 и 4), не покидают область  $0 \leq R \leq R_8$ , где

$$R_8 = \frac{(q^2 - \gamma m^2)Q^2}{2mc^2(qQ - \gamma Mm)}.$$

При массах  $M \geq qQ/\gamma t$  все частицы, падая из бесконечности, достигают особенности (прямые 1 и 2).

3.3. Несвязанные состояния аномально заряженных частиц:  $E^2 > m^2 c^4$ , или  $\epsilon^2 > 1$  (рис. 1, и). Массовый потенциал ограничен сверху, так что  $U_M(Q, R) \leq (U_M)_{\max}$ , где

$$(U_M)_{\max} = U_M(Q, R_{\text{extr}2}) = \frac{Q}{\gamma m^2 c^2} (Eq - \sqrt{(E^2 - m^2 c^4)(\gamma m^2 - q^2)}),$$

$$R_{\text{extr}2} = Q \sqrt{\frac{q^2 - \gamma m^2}{E^2 - m^2 c^4}}.$$

При  $M > (U_M)_{\max}$  (прямая 1) частица с  $q > 0$ , приходящая из бесконечности, неизбежно падает на сингулярность. Если  $M = (U_M)_{\max}$  (прямая 2), частица, падая из бесконечности, достигает  $R_{\text{extr}2}$ . В этой точке  $dR/ds = 0$  и  $d^2R/ds^2 = 0$ , а максимум потенциала соответствует положению неустойчивого равновесия. При массах  $M < (U_M)_{\max}$  (отрезки прямых 3 и 4) движение происходит либо в области  $0 \leq R \leq R_9$ , где частица достигает особенности, либо в области  $R \geq R_{10}$ . Здесь

$$R_{9,10} = \frac{EqQ - \gamma M m^2 c^2 \mp m\sqrt{\Delta}}{E^2 - m^2 c^4}.$$

Частица с  $q < 0$ , приходящая из бесконечности, при всех значениях  $M > 0$  падает на особенность.

#### УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Статические равновесные состояния частицы определяются условиями  $dR/ds = 0$  и  $d^2R/ds^2 = 0$ , причем положение будет устойчивым, если  $d^2R/ds^2 > 0$  слева и  $d^2R/ds^2 < 0$  справа от критической точки. Из формулы связи «скоростного» и «массового» потенциалов (6) вытекает, что на дне потенциальной ямы (рис. 1, а), когда  $U(R_{\text{extr}}) = 0$ , или  $U_M(R_{\text{extr}}) = M$ , условия  $(\partial U/\partial R)|_{R_{\text{extr}}} = 0$  и  $(\partial U_M/\partial R)|_{R_{\text{extr}}} = 0$  совпадают и приводят к радиусу зависания частицы  $R_{\text{extr}}$  (9). Учитывая (4) и (5), исключим из уравнений  $dR/ds = 0$  и  $d^2R/ds^2 = 0$  переменную  $R$ . В результате получаем соотношение

$$(m^2 c^4 - E^2)(\gamma m^2 - q^2)Q^2 = (m^2 c^2 \gamma M - EqQ)^2, \quad (11)$$

из которого находим две системы неравенств

$$\begin{aligned} |q| < m\sqrt{\gamma}, & \quad |E| < mc^2, \\ |q| > m\sqrt{\gamma}, & \quad |E| > mc^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Перепишывая (11) в виде

$$(Q^2 - \gamma M^2)(\gamma m^2 - q^2) = \gamma \left( \frac{EQ}{c^2} - qM \right)^2, \quad (13)$$

аналогично получаем

$$\begin{aligned} |q| < m\sqrt{\gamma}, & \quad |Q| > M\sqrt{\gamma}, \\ |q| > m\sqrt{\gamma}, & \quad |Q| < M\sqrt{\gamma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из классификации движений и соотношений (12) и (14) находим следующие условия:  $|E| < mc^2$ ,  $|q| < m\sqrt{\gamma}$ ,  $|Q| > M\sqrt{\gamma}$  для устойчивого равновесия связанных состояний слабо заряженных частиц в поле аномально заряженного объекта;  $|E| > mc^2$ ,  $|q| > m\sqrt{\gamma}$ ,  $|Q| < M\sqrt{\gamma}$  для неустойчивого равновесия несвязанных состояний аномально заряженных частиц в поле заряженной черной дыры. Условия устойчивости (14) получены в работе [10] без использования законов сохранения. Однако там не указывается, какое из условий равновесия устойчиво, и не получен радиус зависания частицы. В работе [4] утверждается, что в случае аномально заряженного объекта  $|Q| > M\sqrt{\gamma}$  устойчивая система невозможна.

Таким образом, устойчивые статические положения возможны только для связанных состояний слабозаряженной частицы в поле аномально заряженного центрального объекта.

Отметим, что уравнение (13) инвариантно относительно масштабного преобразования  $M = aM'$ ,  $Q = aQ'$ ,  $E = aE'$ ,  $m = am'$ ,  $q = aq'$ . При этом согласно (9)  $R = aR'$ , и мы имеем закон подобия. Если заряд и массу центрального источника, а также массу, заряд и энергию частицы увеличить в  $a$  раз, то статическое состояние частицы остается устойчивым, а ее радиус зависания увеличивается в  $a$  раз.

1. Горелик Г. Е. Антигравитация и электрический заряд // Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон.—1972.—13, № 6.—С. 727—728.
2. Дымникова И. Г. Движение частиц и фотонов в гравитационном поле вращающегося тела // Успехи физ. наук.—1986.—148, вып. 3.—С. 393—432.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. — М.: Наука, 1988.—Т. 2: Теория поля.—512 с.
4. Марков М. А., Фролов В. П. О минимальных размерах частиц в общей теории относительности // ТМФ.—1972.—13, № 1.—С. 41—61.
5. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация: В 3 т. / Пер. с англ. — М.: Мир, 1977.—Т. 2.—525 с.
6. Пирагас К. А., Жданов В. И., Александров А. Н. и др. Качественные и аналитические методы в релятивистской динамике. — М.: Энергоатомиздат, 1995.—448 с.
7. Пирагас К. А., Кривенко О. П. Некоторые вопросы качественной теории геодезических линий в поле тяготеющего центра. — Киев, 1971.—26 с.—(Препринт / АН Украины. Ин-т теорет. физики; ИТФ-71-113Р).
8. Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр: В 2 ч. — М.: Мир, 1986.—Ч. 1.—276 с.
9. Bicak J., Stuchlik Z., Balek V. The motion of charged particles in the field of rotating charged black holes and naked singularities // Bull. Astron. Inst. Czech.—1989.—40, N 2.—P. 65—92.
10. Bonnor W. B. The equilibrium of a charged test particle in the field of a spherical charged mass in general relativity // Class. Quantum Grav.—1993.—10.—P. 2077—2082.
11. Cohen J. M., Gautreau R. Naked singularities, event horizons, and charged particles // Phys. Rev. D.—1979.—19, N 8.—P. 2273—2279.
12. de Felice F., Maeda K. Topology of collapse in conformal diagrams // Prog. Theor. Phys.—1982.—68, N 6.—P. 1967—1978.
13. de Leon J. P. Gravitational repulsion in sources of the Reissner-Nordstrom field // J. Math. Phys.—29, N 1.—1988.—P. 197—206.

14. *Finley J. D.* Radial charged particle trajectories in the extended Reissner-Nordstrom manifold // *J. Math. Phys.*—1974.—**15**, N 10.—P. 1698—1701.
15. *Goncalves S. M.* Shell crossing in generalised Tolman-Bondi spacetimes // *Phys. Rev. D.*—2001.—**63**, N 12.—P. 124017—1-10.
16. *Graves J. C., Brill D.* Oscillatory Character of Reissner-Nordstrom metric for an ideal charged wormhole // *Phys. Rev.*—1960.—**120**, N 4.—P. 1507—1513.
17. *Gron O.* Repulsive gravitational and electron models // *Phys. Rev. D.*—1985.—**31**, N 8.—P. 2129—2131.

Поступила в редакцию 30.09.08