УДК 531.36

©2013. **В.В. Грушковская, А.Л. Зуев**

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Изучается поведение решений нелинейной системы при $t \to +\infty$ в критическом случае при условии, что асимптотическая устойчивость обеспечивается членами не выше третьего порядка. Предполагается, что система имеет частоты, удовлетворяющие резонансному соотношению типа $1:1:2$ либо $1:1:1:1$, при этом другие резонансы вплоть до четвертого порядка отсутствуют. В случае существования знакоопределенного первого интеграла резонансной подсистемы предложены достаточные условия асимптотической устойчивости и построена функция Ляпунова. Основным результатом статьи является степенная оценка нормы решений исходной системы с начальными условиями из некоторой окрестности нуля. В качестве иллюстрации рассмотрен пример механической системы с четырьмя степенями свободы.

Ключевые слова: *асимптотическая оценка, критический случай, резонанс.*

Введение. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения
$$\dot{x} = Ax + R(x), \tag{1}$$
где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – фазовый вектор системы, A – вещественная постоянная $[n \times n]$-матрица, $R(x)$ – аналитическая в некоторой окрестности нуля функция, $R(x) = O(\|x\|^2)$ при $x \to 0$. Известно, что если асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (1) обеспечивается линейным приближением, то для начальных условий из некоторой окрестности нуля все решения удовлетворяют экспоненциальной оценке. В критическом же случае экспоненциальную оценку решений построить не удается. Отметим результаты В.И. Зубова и Н.Н. Красовского, относящиеся к нелинейным системам, для которых асимптотическая устойчивость обеспечивается приближением r-го порядка [1,2]. В этом случае для решений исходной системы справедлива оценка по степеням t. Аналогичная степенная оценка для систем, асимптотическая устойчивость которых обеспечивается членами до третьего порядка включительно, построена в работе [3] для критического случая q пар чисто мнимых корней.

Предположим, что матрица A имеет q пар чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_1, ..., \pm i\omega_q$, $q \geq 3$, и $p = n - 2q$ собственных значений с отрицательными вещественными частями. Будем говорить, что в системе (1) присутствует *резонанс m-го порядка*, если существуют целые взаимно простые числа $c_1, \ldots, c_q$, $|c_1| + ... + |c_q| = m$, с которыми $c_1\omega_1 + ... + c_q\omega_q = 0$.

Работа выполнена при поддержке проекта Ф53.1/010 в рамках совместного конкурса Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (ДФФД) и Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ).

Отметим, что условия устойчивости систем с резонансами в критических случаях являются предметом исследований многих авторов. В частности, в работах Я.М. Гольцера, В.Э. Жавнерчика, А.Л. Куницина, С.В. Медведева и др. получен ряд условий устойчивости и неустойчивости критической подсистемы с одним или несколькими резонансами. Эти результаты доказаны в терминах условий существования неограниченного решения на инвариантном луче для соответствующих модельных уравнений, а также в терминах "сильных" и "слабых" резонансов [4–7]. Для случая резонанса четвертого порядка, в статьях [8] предложен метод построения функции Ляпунова для модельной системы, резонансная часть которой имеет знакоопределенный первый интеграл. П.С. Красильниковым построены алгебраические критерии асимптотической устойчивости системы (1) при резонансах типа $1:1$ и $1:3$ [9, 10].

В данной статье рассматривается случай, когда вопрос об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1) решается членами не выше третьего порядка, в системе присутствует трех- или четырехчастотный резонанс четвертого порядка, а все другие резонансы порядков $m \le 4$ отсутствуют. Предполагается, что резонансная подсистема имеет знакоопределенный первый интеграл. Основной целью работы является изучение асимптотического поведения решений системы (1) при сделанных предположениях.

Статья построена следующим образом. В п. 1 получена модельная система для уравнений (1). Достаточные условия асимптотической устойчивости этой системы при наличии резонанса четвертого порядка предложены в п. 2. Для исследования устойчивости применяется подход, подобный используемому в статье [8], однако допускающий более широкое множество коэффициентов модельной системы. Доказательству степенной оценки нормы решений системы (1) с начальными условиями из некоторой окрестности нуля при $t \to +\infty$ посвящен п. 3. Применение полученных результатов к исследованию движения механических систем отражено в п. 4.

1. Построение модельной системы. Согласно принципу сведения [11], с помощью невырожденных преобразований система (1) может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot z_s &= i\omega_s z_s + \sum_{|k_1|+|k_2|=2}^{3} Y_s^{(k_1,k_2)} {z_1}^{k_{11}} \ldots z_q^{k_{1q}} \bar z_1^{k_{21}} \ldots \bar z_q^{k_{2q}} + H_s(z,\bar z,\zeta), \quad s=\overline{1,q}, \\ \dot\zeta_j &= \sum_{l=1}^{p} b_{jl}\zeta_l + E_j\left(z,\bar z,\zeta\right), \quad j=\overline{1,p}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $z=(z_1,\ldots,z_q)\in\mathbb{C}^q$, $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)\in\mathbb{R}^p$; b_{jl}, $Y_s^{(k_s,l_s)}$ – постоянные коэффициенты; функции $H_s(z,\bar z,\zeta)$, $E_j(z,\bar z,\zeta)$ равны нулю при $z=0$, $\zeta=0$ и не содержат членов ниже четвертого порядка по совокупности переменных; $k_l=(k_{l1},...,k_{lq})$, $|k_l|=\sum\limits_{s=1}^{q} k_{ls}$, $l=1,2$. Уравнения для $\dot z$ являются комплексно-сопряженными к уравнениям для $\dot{z}$.

Следуя подходу работы [11], рассмотрим критическую и устойчивую подсистемы

$$\dot{z}_s = i\omega_s z_s + \sum_{|k_1|+|k_2|=2}^{3} Y_s^{(k_1,k_2)} {z_1}^{k_{11}} \dots z_q^{k_{1q}} \bar{z}_1^{k_{21}} \dots \bar{z}_q^{k_{2q}}, \tag{3}$$

$$\dot{\zeta}_j = \sum_{l=1}^{p} p_{jl}\zeta_l, \quad j = \overline{1,p}. \tag{4}$$

Лемма 1 [3, 11]. *Пусть $V_1(z)$ – определенно-положительная непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности нуля функция, для которой производная в силу системы (3) $V_1^{'}$ – определенно-отрицательная функция. Предположим также, что $V_2(\zeta)$ – определенно-положительная квадратичная форма, а ее производная в силу системы (4) равна*

$$V_2^{'} = -M^2 \sum_{j=1}^{p} \zeta_j^2, \quad M \neq 0. \tag{5}$$

Тогда

$$V(z,\zeta) = V_1(z) + V_2(\zeta)$$

является функцией Ляпунова для системы (2), и для любого $\delta_1 \in (0,1)$ существует $\varepsilon_1 > 0$, с которым для всех (z,ζ) из ε_1-окрестности нуля $B_{\varepsilon_1}(0) \subseteq \mathbb{C}^q \times \mathbb{R}^p$ выполнена оценка

$$\dot{V} \leq -(1-\delta_1)\left(\left|V_1^{'}\right| + \left|V_2^{'}\right|\right). \tag{6}$$

Для нахождения функции Ляпунова V_1 исследуем систему (3) с помощью метода нормальных форм [12, 13]. Введем новые переменные u_s по формулам

$$u_s = z_s + \sum_{l=2}^{3} Q_s^{(l)}(z,\bar{z}), \tag{7}$$

где $Q_s^{(l)}(z,\bar{z})$ определяются по коэффициентам правой части системы (3) и являются формами l-го порядка (явные формулы приведены в [3, 13]). Запишем систему (3) в переменных (7):

$$\dot{u}_s = i\omega_s u_s + \sum_{|k_1|+|k_2|=2}^{3} \mathcal{B}_s^{(k_1,k_2)} u_1^{k_{11}} ... u_q^{k_{1q}} \bar{u}_1^{k_{21}} ... \bar{u}_q^{k_{2q}} + \dots, \tag{8}$$

где правая часть содержит только те слагаемые $\mathcal{B}_s^{(k_1,k_2)} u_1^{k_{11}} ... u_q^{k_{1q}} \bar{u}_1^{k_{21}} ... \bar{u}_q^{k_{2q}}$, коэффициенты которых удовлетворяют резонансным соотношениям. Введем вещественные переменные r_s и θ_s по формулам

$$u_s = r_s e^{i\theta_s}, \quad s = \overline{1,q}.$$

Тогда (8) примет вид

$$
\begin{aligned}
\dot r_s &= r_s\sum_{j=1}^{q} A_{sj}r_j^2 + R_s(r,\theta) + F_{1s}(r,\theta),\\
r_s\dot\theta_s &= \omega_s r_s + r_s\sum_{j=1}^{q} B_{sj}r_j^2 + \Theta_s(r,\theta) + F_{2s}(r,\theta), \quad s=\overline{1,q},
\end{aligned} \tag{9}
$$

где A_{sj}, B_{sj} – вещественные коэффициенты, $R_s(r,\theta)$, $\Theta_s(r,\theta)$ – резонансные члены, $R_s(\theta)=O(\|r\|^3)$ при $r\to 0$, а $F_{1s}(r,\theta)$ и $F_{2s}(r,\theta)$ являются формами порядка $O\left(\|r\|^4\right)$.

Следующую систему в переменных $\rho_s{=}r_s^2\ge 0$ будем называть модельной:

$$
\dot\rho_s = 2\rho_s\sum_{j=1}^{q} A_{sj}\rho_j + \sqrt{\rho_s}R_s(\rho,\theta), \quad s=\overline{1,q}. \tag{10}
$$

Будем говорить, что решение $\rho=0$ системы (10) *асимптотически устойчиво в конусе $\rho_s\ge 0$ при постоянно действующих возмущениях* (п.д.в.), если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при любой непрерывно-дифференцируемой функции $\theta:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^q$ и начальных значениях $\rho(0)=$ $=\rho^0$: $\rho_1^0\ge 0,\dots,\rho_q^0\ge 0$, $\|\rho^0\|<\delta$, соответствующее решение $\rho(t)$ системы (10) определено для всех $t\in[0,+\infty)$ и $\|\rho(t)\|<\varepsilon$ при $t\in[0,+\infty)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\|\rho(t)\|=0$.

2. Достаточные условия асимптотической устойчивости модельной системы. Предположим, что в системе (1) есть трехчастотный резонанс четвертого порядка и отсутствуют прочие резонансы до четвертого порядка включительно. Можем считать, что резонансное соотношение имеет вид

$$
\omega_1+\omega_2=2\omega_3. \tag{11}
$$

Тогда модельная система (10) представима в форме

$$
\begin{aligned}
\dot\rho_l &= 2\rho_l\sum_{j=1}^{q} A_{lj}\rho_j + 2(a_l\cos(\theta_1{+}\theta_2{-}2\theta_3) + b_l\sin(\theta_1{+}\theta_2{-}2\theta_3))\rho_3\sqrt{\rho_1\rho_2},\\
\dot\rho_k &= 2\rho_k\sum_{j=1}^{q} A_{kj}\rho_j; \qquad a_l,b_l\in\mathbb{R}, \quad l=\overline{1,3}, \quad k=\overline{4,q}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Теорема 1. *Пусть выполнено соотношение* (11), $A_{ss}<0$ *для всех* $s=\overline{1,q}$, *и пусть существуют положительные постоянные* $\gamma_1,\dots\gamma_q$, *удовлетворяющие следующим условиям:*

1)

$$
a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3=0, \quad b_1\gamma_1+b_2\gamma_2+b_3\gamma_3=0; \tag{13}
$$

2) уравнение

$$\sum_{j,k=1}^{q} A_{jk}\gamma_j\rho_j\rho_k = 0 \tag{14}$$

не имеет решений в конусе $\rho_s \geq 0$.

Тогда решение $\rho = 0$ *системы* (12) *асимптотически устойчиво в конусе* $\rho_s \geq 0$ *при п.д.в.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V_1(\rho) = \sum_{s=1}^{q} \gamma_s\rho_s. \tag{15}$$

Поскольку $\gamma_1 > 0, \ldots, \gamma_q > 0$, то функция (15) является определенно-положительной в конусе $\rho_s \geq 0$. Производная этой функции в силу системы (12) и равенств (13) равна

$$\dot{V}_1 = 2\sum_{j,k=1}^{q} A_{jk}\gamma_j\rho_j\rho_k. \tag{16}$$

Из условия отрицательности коэффициентов A_{ss} и условия 2) доказываемой теоремы следует, что функция (16) отрицательно определена в конусе $\rho_s \geq 0$. Утверждение теоремы следует из того факта, что для любой непрерывно-дифференцируемой функции $\theta : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^q$ функция $V_1(\rho)$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. $\square$

Обозначим $\Delta_1 = a_1b_2 - a_2b_1$, $\Delta_2 = a_2b_3 - a_3b_2$, $\Delta_3 = a_3b_1 - a_1b_3$.

Лемма 2. *Условие существования* $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\gamma_3 > 0$, *удовлетворяющих системе* (13), *эквивалентно выполнению одного из следующих условий:*

$$\operatorname{sign}(\Delta_1) = \operatorname{sign}(\Delta_2) = \operatorname{sign}(\Delta_3) \neq 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{sign}(\Delta_1) = \operatorname{sign}(\Delta_2) = \operatorname{sign}(\Delta_3) = 0, \\ \exists j \neq k,\ j,k = \overline{1,3} :\ \operatorname{sign}(a_j) = -\operatorname{sign}(a_k) \neq 0, \quad \operatorname{sign}(b_j) = -\operatorname{sign}(b_k) \neq 0; \end{cases}$$

$$a_j = b_j = 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Доказательство. Предположим, что $\Delta_s \neq 0$ для всех $s = \overline{1,3}$. Тогда общее решение γ^* системы (13) можно записать в виде $\gamma^* = \left\{\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\gamma_3, \dfrac{\Delta_3}{\Delta_1}\gamma_3, \gamma_3\right\}$, и для существования положительных постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ необходимо и достаточно, чтобы знаки всех определителей Δ_s совпадали.

В случае, когда один или два из Δ_s равны нулю, существует по крайней мере одна нулевая компонента решения γ^*.

Предположим теперь, что $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$. Тогда $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$. Пусть существует $a_i \neq 0$. Для определенности положим $a_1 \neq 0$. Тогда $\gamma^* = \left\{-\dfrac{a_2}{a_1}\gamma_2 - \dfrac{a_3}{a_1}\gamma_3, \gamma_2, \gamma_3\right\}$, следовательно, для существования положительных постоянных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{sign}(a_1) = -\operatorname{sign}(a_2)$, либо $\operatorname{sign}(a_1) = -\operatorname{sign}(a_3)$. Аналогичные рассуждения справедливы, если существует $b_i \neq 0$.

В случае, когда $a_j = b_j = 0$, $j = \overline{1,3}$, т. е. все коэффициенты при резонансных слагаемых равны нулю, уравнения (13) справедливы для всех $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, в том числе и для положительных. □

***Замечание* 1.** В случае, когда в системе (1) есть один четырехчастотный резонанс четвертого порядка вида

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \omega_4 \tag{17}$$

и отсутствуют другие резонансы меньшего либо равного порядков, модельная система (10) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\dot\rho_l = 2\rho_l\sum_{j=1}^{q} A_{lj}\rho_j + 2\big[a_l\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_4) + b_l\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3-\theta_4)\big]\sqrt{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4},\\
&\dot\rho_k = 2\rho_k\sum_{j=1}^{q} A_{kj}\rho_j, \qquad a_l, b_l \in \mathbb{R}, \quad l = \overline{1,4}, \quad k = \overline{5,q}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Для системы (18) также справедливо утверждение теоремы 1, при этом условие 1) принимает вид

$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + a_4\gamma_4 = 0, \qquad b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 + b_4\gamma_4 = 0.$$

3. Оценка нормы решений. Пусть в системе (1) есть один резонанс вида (11) либо (17) и отсутствуют другие резонансы до четвертого порядка включительно. Тогда при выполнении условий теоремы 1 для системы (10) может быть построена функция Ляпунова вида $V_1(\rho) = \sum\limits_{s=1}^{q}\gamma_s\rho_s$, производная которой в силу системы (10) равна $\dot V_1 = 2\sum_{j,k=1}^{q} A_{jk}\gamma_j\rho_j\rho_k$. Поскольку $\dot V_1(\rho)$ является определенно-отрицательной квадратичной формой в конусе $\rho_s \geq 0$, то существует постоянная $\lambda > 0$ такая, что:

$$\dot V_1 \leq -\lambda V_1^2(\rho), \quad \forall \rho_s \geq 0. \tag{19}$$

Возвращаясь к переменным r_s, получаем функцию Ляпунова для системы (9), $V_1(r) = \sum\limits_{s=1}^{q}\gamma_s r_s^2$, и оценку для ее производной в силу системы (9):

$$\dot V_1 \leq -\lambda V_1^2 + 2\sum_{s=1}^{q} r_s F_{1s}.$$

Поскольку $F_{1s}(r,\theta)$ – формы порядка $O(\|r\|^4)$, то для любого $\delta_2 > 0$ существует $\varepsilon_2 > 0$:

$$\dot{V}_1 \le -\lambda(1-\delta_2)V_1^2 \quad \text{при} \quad \|r\| \le \varepsilon_2.$$

Соответственно, функция Ляпунова для системы (3) имеет вид

$$V_1(z) = \sum_{s=1}^{q} \gamma_s \left| z_s + Q_s^{(1)}(z,\bar{z}) + Q_s^{(2)}(z,\bar{z}) \right|^2,$$

и для ее производной в силу системы (3) справедлива оценка

$$\left| V_1' \right| \ge -\lambda(1-\delta_2)V_1^2 \quad \text{при} \quad \|z\| < \varepsilon_2. \tag{20}$$

Функцию Ляпунова для системы (4), следуя условиям леммы 1, возьмем в виде $V_2(\zeta) = (T\zeta,\zeta)$, где T – матрица определенно-положительной квадратичной формы. Из (5) $V_2' = -M^2 \sum\limits_{j=1}^{p} \zeta_j^2$, следовательно, $V_2' \le -\dfrac{M^2}{\mu_{max}} V_2$, где μ_{max} – максимальное собственное значение матрицы T. Таким образом,

$$\left| V_2' \right| \ge \frac{M^2}{\mu_{max}} V_2. \tag{21}$$

Тогда по лемме 1, функция

$$V(z,\zeta) = \sum_{s=1}^{q} \gamma_s \left| z_s + Q_s^{(1)}(z,\bar{z}) + Q_s^{(2)}(z,\bar{z}) \right|^2 + (T\zeta,\zeta) \tag{22}$$

является функцией Ляпунова для системы (2). Используя неравенства (6), (20) и (21), получаем оценку для производной функции (22) в силу системы (2):

$$\dot{V} \le -(1-\delta_1)\left(\lambda(1-\delta_2)V_1^2 + \frac{M^2}{\mu_{max}} V_2 \right).$$

Заметим, что существует такая ε_3-окрестность нуля, что $\dot{V} \le -\alpha V^2$ при $\|(z,\zeta)\| < \varepsilon_3$, где $\alpha = \dfrac{1-\delta_1}{2} \min\left\{ \lambda(1-\delta_2), \dfrac{M^2}{\mu_{max}} \right\}$. Решением соответствующего уравнения сравнения является функция

$$\widehat{V}(t) = \left(\alpha\,(t-t_0) + V_0^{-1} \right)^{-1}, \quad V_0 = \widehat{V}(t_0).$$

Таким образом,

$$V \le \left(\alpha\,(t-t_0) + V_0^{-1} \right)^{-1} \quad \forall t \ge t_0. \tag{23}$$

Возвращаясь к переменным x с помощью обратных преобразований, получим функцию Ляпунова для системы (1): $V = (Gx,x) + \widetilde{R}\,(x)$, где $\left| \widetilde{R}\,(x) \right| \le \tilde{\delta}\|x\|^2$ в некоторой ε_4-окрестности нуля, а (Gx, x) – определенно-положительная квадратичная форма, для которой

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \le (Gx, x) \le \lambda_{\max}\|x\|^2, \tag{24}$$

где $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ – минимальное и максимальное собственные значения матрицы G. Отсюда следует, что

$$V(x) \ge \lambda_{\min}\left(1-\tilde{\delta}\right)\|x\|^2, \quad V_0 = V(x_0) \le \lambda_{\max}\left(1+\tilde{\delta}\right)\|x_0\|^2. \tag{25}$$

В совокупности с неравенством (23), неравенства (25) позволяют оценить решения $x(t)$ системы (1) в ε-окрестности нуля ($\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$):

$$\|x(t)\| \le \left(\alpha_1 (t-t_0) + \alpha_2\|x(t_0)\|^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \ge t_0, \tag{26}$$

где $\alpha_1 = \dfrac{(1-\delta_1)(1-\tilde{\delta})\lambda_{\min}}{2}\min\left\{\lambda(1-\delta_2), \dfrac{M^2}{\mu_{max}}\right\}$, $\alpha_2 = \dfrac{\lambda_{\min}(1-\tilde{\delta})}{\lambda_{\max}(1+\tilde{\delta})}$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для всех решений системы* (1) *с начальными условиями* $\|x(t_0)\| < \varepsilon$ *выполнена оценка* (26).

4. Исследование механической системы с частичной диссипацией. Рассмотрим механическую систему, состоящую из диска, который вращается вокруг точки O (см. рис. 1).

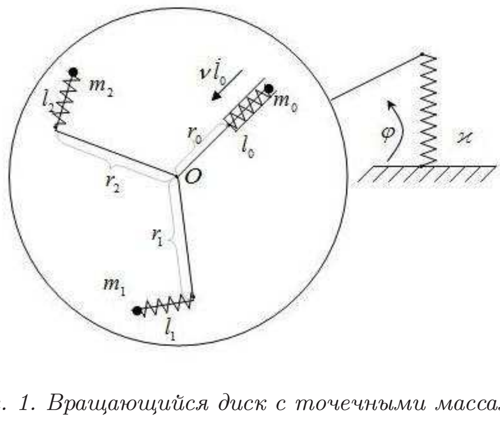

Рис. 1. Вращающийся диск с точечными массами.

Обозначим через φ угол поворота диска относительно фиксированного направления и предположим, что на диск действует восстанавливающий момент, пропорциональный углу φ. Точечная масса m_0 перемещается вдоль радиального направления относительно центра диска, а две точечные массы m_1

и m_2 совершают колебания в направлениях, перпендикулярных радиальным, как показано на рисунке. Конфигурация механической системы определяется обобщенными координатами φ, l_0, l_1, l_2. Предполагается также, что на точечную массу m_0 действует сила вязкого трения, пропорциональная относительной скорости движения. При сделанных предположениях кинетическая (T) и потенциальная (V) энергии имеют следующий вид:

$$2T = \left(I_0 + m_1(l_1^2 + r_1^2) + m_2(l_2^2 + r_2^2) + m_0(r_0 + l_0)^2\right)\dot\varphi^2 + m_1\dot l_1^2 + m_2\dot l_2^2 + \\ + m_0\dot l_0^2 - (m_1 r_1 \dot l_1 + m_2 r_2 \dot l_2)\dot\varphi, \qquad 2V = \varkappa\varphi^2 + \frac{\varkappa_1}{2} l_1^2 + \varkappa_2 l_2^2 + \varkappa_0 l_0^2.$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой механической системы:

$$\begin{aligned}
&\left(I_0 + m_1(l_1^2 + r_1^2) + m_2(l_2^2 + r_2^2) + m_0(r_0 + l_0)^2\right)\ddot\varphi - m_1 r_1 \ddot l_1 - m_2 r_2 \ddot l_2 + \\
&+ 2(m_1 l_1 \dot l_1 + m_2 l_2 \dot l_2 + m_0(r_0 + l_0)\dot l_0)\dot\varphi + \varkappa\varphi = 0, \\
&m_1 \ddot l_1 - m_1 r_1 \ddot\varphi - m_1 l_1 \dot\varphi^2 + \varkappa_1 l_1 = 0,\ m_2 \ddot l_2 - m_2 r_2 \ddot\varphi - m_2 l_2 \dot\varphi^2 + \varkappa_2 l_2 = 0, \\
&m_0 \ddot l_0 - m_0(r_0 + l_0)\dot\varphi^2 + \varkappa_0 l_0 = -\nu \dot l_0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Будем исследовать поведение системы (27) в окрестности положения равновесия $l_0 = l_1 = l_2 = 0, \varphi = 0$. Запишем уравнения возмущенного движения системы с точностью до членов третьего порядка:

$$\begin{aligned}
&\dot x_1 = x_5, \quad \dot x_2 = x_6, \quad \dot x_3 = x_7, \quad \dot x_4 = x_8, \\
&J\dot x_5 = -\varkappa x_1 - r_1\varkappa_1 x_2 - r_2\varkappa_2 x_3 + \mathcal{A}(x), \\
&J\dot x_6 = -r_1\varkappa x_1 - \varkappa_1(m_1 r_1^2 + J)x_2 - r_1 r_2 \varkappa_2 x_3 + r_1\mathcal{A}(x) + J x_2 x_5^2, \\
&J\dot x_7 = -r_2\varkappa x_1 - r_1 r_2 \varkappa_1 x_2 - \varkappa_2(r_2^2 m_2 + J)x_3 + r_2\mathcal{A}(x) + J x_3 x_5^2, \\
&\dot x_8 = -\frac{\varkappa_0}{m_0}x_4 - \frac{\nu}{m_0}x_8 + r_0 x_5^2 + x_4 x_5^2.
\end{aligned} \tag{28}$$

Здесь $x_1 = \varphi$, $x_2 = l_1$, $x_3 = l_2$, $x_4 = l_0$, $x_5 = \dot\varphi$, $x_6 = \dot l_1$, $x_7 = \dot l_2$, $x_8 = \dot l_0$,

$$J = I_0 + m_0 r_0^2, \quad \mathcal{A}(x) = (2\varkappa m_0 r_0 x_1 x_4 + 2\varkappa_1 m_0 r_0 r_1 x_2 x_4 + 2\varkappa_2 m_0 r_0 r_2 x_3 x_4 -$$

$$-2J m_0 r_0 x_5 x_8 + \varkappa m_1 x_1 x_2^2 + \varkappa m_2 x_1 x_3^2 - (4 m_0 r_0^2/J - 1)\varkappa m_0 x_1 x_4^2 +$$

$$+\varkappa_1 m_1 r_1 x_2^3 + \varkappa_2 m_1 r_2 x_2^2 x_3 + \varkappa_1 m_1 r_1 x_2 x_3^2 - (4 m_0 r_0^2/J - 1)\varkappa_1 m_0 r_1 x_2 x_4^2 +$$

$$+J m_1 r_1 x_2 x_5^2 - 2J m_1 x_2 x_5 x_6 + \varkappa_2 m_2 r_2 x_3^3 - (4 m_0 r_0^2/J - 1)\varkappa_2 m_0 r_2 x_3 x_4^2 +$$

$$+J m_2 r_2 x_3 x_5^2 - 2J m_2 x_3 x_5 x_7 + 2(2 m_0 r_0^2 - J) m_0 x_4 x_5 x_8\big)/J.$$

Матрица A линейного приближения системы (28) имеет три пары чисто мнимых корней: $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$, и пару корней с отрицательными вещественными частями $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4m_0\varkappa_0}}{2m_0}$. Предположим, что $\omega_1 = 0.3\ c^{-1}$,

$\omega_2 = 0.5\ c^{-1}$, $\omega_3 = 0.4\ c^{-1}$, т. е. выполнено резонансное соотношение (11). Такие значения частот достигаются, например, при

$$\begin{aligned}
&I_0 \approx 0.012 \text{ кг·м}^2, \quad m_0 = 1 \text{ кг}, \quad m_1 = m_2 \approx 0.59 \text{ кг},\\
&\varkappa \approx 0.004 \text{ Н·м}, \quad \varkappa_0 = 0.1 \text{ Н/м}, \quad \varkappa_1 = 2\varkappa_2 \approx 0.12 \text{ Н/м},\\
&r_0 = 0.1 \text{ м}, \quad r_1 = 0.45 r_0 = 0.045 \text{ м}, \quad r_2 = 0.6 r_0 = 0.06 \text{ м}.
\end{aligned} \tag{29}$$

В силу громоздкости вычислений, для дальнейшего исследования системы (28) будем использовать численные значения механических параметров (29). Посредством линейной невырожденной замены переменных

$$\begin{aligned}
\xi_s &= \frac{\omega_s \varkappa r_2(\omega_s^2 m_1 - \varkappa_1)x_1 + \omega_s^3 \varkappa_1 m_1 r_1 r_2 x_2}{-\omega_s^4 J m_1 + \omega_s^2(\varkappa_1 m_1 r_1^2 + J\varkappa_1 + \varkappa m_1) - \varkappa\varkappa_1} - \omega_s x_3,\\
\eta_s &= \frac{-\varkappa r_2(\omega_s^2 m_1 - \varkappa_1)x_5 - \omega_s^2 \varkappa_1 m_1 r_1 r_2 x_6}{-\omega_s^4 J m_1 + \omega_s^2(\varkappa_1 m_1 r_1^2 + J\varkappa_1 + \varkappa m_1) - \varkappa\varkappa_1} + x_7,\ s = 1,2,3,\\
&w_1 = x_4, \quad w_2 = x_8
\end{aligned} \tag{30}$$

система (28) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&\dot\xi_s = -\omega_s \eta_s,\\
&\dot\eta_s = \omega_s \xi_s + (a_{s1}\xi_1 + a_{s2}\xi_2 + a_{s3}\xi_3)w_1 + (b_{s1}\eta_1 + b_{s2}\eta_2 + b_{s3}\eta_3)w_2 +\\
&\quad + (a_{s4}\xi_1 + a_{s5}\xi_2 + a_{s6}\xi_3)w_1^2 + (b_{s4}\eta_1 + b_{s5}\eta_2 + b_{s6}\eta_3)w_1 w_2 + \widetilde{Y}_s(\xi,\eta),\\
&\dot w_1 = w_2, \qquad \dot w_2 = -\frac{\varkappa_0}{m_0}w_1 - \frac{\nu}{m_0}w_2 + W_1(\eta) + w_1 W_2(\eta),
\end{aligned} \tag{31}$$

где $a_{sj} \in \mathbb{R}$, $b_{sj} \in \mathbb{R}$ (j=1,..,6), $\widetilde{Y}_s(\xi,\eta)$ – формы третьего порядка; $W_1(\eta)$, $W_2(\eta)$ – квадратичные формы. Преобразуем (31) так, чтобы уравнения для $\dot w_1$, $\dot w_2$ содержали только слагаемые, обращающиеся в нуль при $w_1 = w_2 = 0$. Для этого введем переменные ζ_1, ζ_2 (подробней эта замена описана в [3, 11]):

$$\zeta_j = w_j - \mathcal{V}_j(\xi,\eta), \quad j = 1,2, \tag{32}$$

где $\mathcal{V}_j(\xi,\eta)$ – квадратичные формы. Переходя к комплексно-сопряженным переменным по формулам

$$y_s = \xi_s + i\eta_s, \quad \bar y_s = \xi_s - i\eta_s, \quad s = 1,2,3, \tag{33}$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\dot y_s &= i\omega_s y_s + Y_s(y,\bar y) + \sum_{k=1}^{3}\left(P_{s1}^{(k)}(\zeta)y_k + P_{s2}^{(k)}(\zeta)\bar y_k\right) + Y_{s1}(y,\bar y,\zeta),\\
\dot\zeta_1 &= \zeta_2 + \sum_{|k_1|+|k_2|=2} Z_1^{(k_1,k_2)}(\zeta)\prod_{s=1}^{3} y_s^{k_{1s}}\bar y_s^{k_{2s}},\\
\dot\zeta_2 &= -\frac{\varkappa_0}{m_0}\zeta_1 - \frac{\nu}{m_0}\zeta_2 + \sum_{|k_1|+|k_2|=2} Z_2^{(k_{1s},k_{2s})}(\zeta)\prod_{s=1}^{3} y_s^{k_{1s}}\bar y_s^{k_{2s}},
\end{aligned} \tag{34}$$

где $Y_s(y,\bar{y})$ – формы третьего порядка, $P_{sj}^{(k)}(\zeta)$, $Z_j^{(k_1,k_2)}(\zeta)$ – линейные формы, $Y_{s1}(y,\bar{y},\zeta)$ не содержат членов ниже третьего порядка, $Y_{s1}(y,\bar{y},0)=0$. Для того, чтобы получить систему уравнений вида (2), положим

$$y_s = z_s + \sum_{k=1}^{3}\left(\psi_{s1}^{(k)}(\zeta)\, y_k + \psi_{s2}^{(k)}(\zeta)\,\bar{y}_k\right), \quad s=1,2,3, \tag{35}$$

где $\psi_{sj}^{(k)}(\zeta)$ – линейные формы, определяемые из уравнений

$$i\,(\omega_s-\omega_k)\,\psi_{sj}^{(k)}(\zeta) + P_{sj}^{(k)}(\zeta) - \frac{\partial\psi_{sj}^{(k)}}{\partial\zeta_1}\zeta_2 + \frac{\partial\psi_{sj}^{(k)}}{\partial\zeta_2}\left(\frac{\varkappa_0}{m_0}\zeta_1 + \frac{\nu}{m_0}\zeta_2\right) = 0.$$

В новых переменных система (34) может быть записана в форме (2):

$$\dot{z}_s = i\omega_s z_s + Y_s(z,\bar{z}) + H_s(z,\bar{z},\zeta), \quad s=1,2,3,$$
$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2 + E_1(z,\bar{z},\zeta), \qquad \dot{\zeta}_2 = -\frac{\varkappa_0}{m_0}\zeta_1 - \frac{\nu}{m_0}\zeta_2 + E_2(z,\bar{z},\zeta),$$

где функции $H_s(z,\bar{z},\zeta)$, $E_j(z,\bar{z},\zeta)$ равны нулю при $\zeta=0$ и не содержат членов ниже третьего порядка. Таким образом, системы (3) и (4) можно записать как

$$\dot{z}_s = i\omega_s z_s + Y_s(z,\bar{z}), \quad s=1,2,3, \tag{36}$$

$$\dot{\zeta}_1 = \zeta_2, \qquad \dot{\zeta}_2 = -\frac{\varkappa_0}{m_0}\zeta_1 - \frac{\nu}{m_0}\zeta_2. \tag{37}$$

Переходя к переменным u_s по формулам (7), получаем нормальную форму системы (36) (с точностью до членов третьего порядка):

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= q_{11}u_1^2\bar{u}_1 + q_{12}u_1u_2\bar{u}_2 + q_{13}u_1u_3\bar{u}_3 + q_{14}u_3^2\bar{u}_2,\\ \dot{u}_2 &= q_{21}u_1u_2\bar{u}_1 + q_{22}u_2^2\bar{u}_2 + q_{23}u_2u_3\bar{u}_3 + q_{24}u_3^2\bar{u}_1,\\ \dot{u}_3 &= q_{31}u_1u_3\bar{u}_1 + q_{32}u_2u_3\bar{u}_2 + q_{33}u_3^2\bar{u}_3 + q_{34}u_1u_2\bar{u}_3. \end{aligned} \tag{38}$$

В переменных r_s, θ_s система (38) принимает вид (9). Запишем в переменных $\rho_s = r_s^2$, $s=1,2,3$, соответствующую модельную систему

$$\dot{\rho}_s = 2\rho_s\sum_{s=j}^{3} A_{sj}\rho_j + 2(a_s\cos(\theta_1+\theta_2-2\theta_3) + b_s\sin(\theta_1+\theta_2-2\theta_3))\rho_3\sqrt{\rho_1\rho_2}; \tag{39}$$

коэффициенты при выборе механических параметров (29) имеют следующие значения:

$$A_{11} \approx -\frac{0.0075\nu}{\nu^2+0.81}, \quad A_{22} \approx -\frac{0.019\nu}{(\nu^2+0.188)}, \quad A_{33} \approx -\frac{0.0297\nu}{\nu^2+0.456},$$

$$A_{12} \approx -0.9401\nu\left(\nu^2+0.382\right)G_1G_2, \quad A_{13} \approx -0.782\nu\left(\nu^2+0.641\right)G_3G_4,$$

$$A_{21} \approx 0.0086\nu\left(\nu^2+0.5775\right)G_1G_2,\ A_{23} \approx 0.092\nu\left(\nu^2+0.227\right)G_3G_5,$$

$$A_{31} \approx 0.091\nu\left(\nu^2+0.599\right)G_3G_4,\ A_{32} \approx -1.168\nu\left(\nu^2+0.373\right)G_3G_5,$$

$$a_1 \approx 2.367\nu\left(\nu^2+0.476\right)G_1G_3,\ a_2 \approx 2-0.032\nu\left(\nu^2+0.432\right)G_1G_3,$$

$$a_3 \approx 0.04\nu G_1,\ b_1 \approx -4.482G_6, b_2 \approx -0.068G_6,\ b_3 \approx 1.3G_6,$$

где $G_1 = \nu^2+0.456$, $G_2 = \nu^2+0.09$, $G_3 = \nu^2+0.81$, $G_4 = \nu^2+0.622$, $G_5 = \nu^2+0.31$, $G_6 = \left(\nu^4+0.839\nu^2+0.182\right)G_1G_3$. Для краткости записи в приведенных выражениях опущены размерности соответствующих величин.

Проверим выполнение условий теоремы 1. Очевидно, что $A_{11} < 0$, $A_{22} < 0$, $A_{33} < 0$ при всех значениях параметра ν. Одним из решений системы уравнений (13) является

$$\gamma_1 \approx 0.464(\nu^2+0.405), \quad \gamma_2 \approx 39.24(\nu^2+0.495), \quad \gamma_3 \approx 3.66(\nu^2+0.456). \quad (40)$$

В качестве функции Ляпунова для системы (39) используем функцию вида (15):

$$V_1(\rho) = \gamma_1\rho_1+\gamma_2\rho_2+\gamma_2\rho_3, \quad (41)$$

в которой $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются по формулам (40) и положительны при всех ν. Производная функции (41) в силу системы (39) равна

$$\frac{\dot V_1}{2} = \gamma_1A_{11}\rho_1^2+(\gamma_1A_{12}+\gamma_2A_{21})\rho_1\rho_2+(\gamma_1A_{13}+\gamma_3A_{31})\rho_1\rho_3+\gamma_2A_{22}\rho_2^2+$$
$$+(\gamma_2A_{23}+\gamma_3A_{32})\rho_2\rho_3+\gamma_3A_{33}\rho_3^2.$$

Будем предполагать, что $\nu > 0.8$. Тогда все коэффициенты в (14) отрицательны, следовательно, уравнение (14) не имеет корней в конусе $\rho_s \geq 0$. Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, и решение $\rho = 0$ системы (39) асимптотически устойчиво в конусе $\rho_s \geq 0$ при п.д.в.

Для функции $\dot V_1$ справедлива оценка (19) с

$$-\lambda = \max_{i,j=\overline{1,3}}\left\{\frac{\gamma_iA_{ij}+\gamma_jA_{ji}}{\gamma_i\gamma_j}\right\} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_1A_{12}+\gamma_2A_{21}}{\gamma_1\gamma_2} & \text{при } 0.8 < \nu \leq 0.91, \\ \dfrac{2A_{22}}{\gamma_2} & \text{при } \nu > 0.91. \end{cases}$$

Функцией Ляпунова для (36) является

$$V_1(z,\bar z)=\sum_{s=1}^{3}\gamma_s\left|z_s+Q_s^{(2)}(z,\bar z)\right|^2.$$

Функция Ляпунова для системы (37) при выбранных параметрах имеет вид

$$V_2\,(\zeta) = (\nu^2 + 0.11)\zeta_1^2 + 1.1\zeta_2^2 + 2\nu\zeta_1\zeta_2. \tag{42}$$

Производная функции (42) в силу системы (37) равна

$$V_2' = -0.2\nu\left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2\right) \le -\frac{2\nu}{6.05 + 5\nu^2 + 5\sqrt{(\nu^2 + 1.21)(\nu^2 + 0.81)}} V_2.$$

Тогда функция (22) такова:

$$V(z, \bar{z}, \zeta) = \sum_{s=1}^{3} \gamma_s \left| z_s + Q_s^{(2)}(z, \bar{z}) \right|^2 + (\nu^2 + 0.11)\zeta_1^2 + 1.1\zeta_2^2 + 2\nu\zeta_1\zeta_2,$$

и справедливо неравенство (23), в котором

$$\alpha = \frac{1 - \delta_1}{2} \min\left\{\lambda(1 - \delta_2), \frac{2\nu}{6.05 + 5\nu^2 + 5\sqrt{(\nu^2 + 1.21)(\nu^2 + 0.81)}}\right\} = \\ = -(1 - \delta_1)(1 - \delta_2)\frac{\lambda}{2}.$$

Поскольку преобразования (32), (33), (35) сохраняют линейную часть, то квадратичная часть функции Ляпунова для системы (31) имеет вид

$$V(\xi, \eta, w) = \sum_{s=1}^{3} \gamma_s(\xi_s^2 + \eta_s^2) + (\nu^2 + 0.11)w_1^2 + 1.1w_2^2 + 2\nu w_1 w_2.$$

Используя формулы (30), получаем функцию Ляпунова для системы (28), соответствующую выбранным механическим параметрам (29):

$$\begin{aligned} V(x) = {} & (0.2\nu^2 + 0.09)x_1^2 - (0.35\nu^2 + 0.2)x_1x_2 - (0.39\nu^2 + 0.22)x_1x_3 + \\ & + (5.09\nu^2 + 2.19)x_2^2 - (0.12\nu^2 + 0.06)x_2x_3 + (4.23\nu^2 + 2.06)x_3^2 + \\ & + (\nu^2 + 0.11)x_4^2 + 2\nu x_4x_8 + (1.48\nu^2 + 0.69)x_5^2 - (4.51\nu^2 + 2.26)x_5x_6 - \\ & - (7.55\nu^2 + 3.9)x_5x_7 + (26.21\nu^2 + 11.44)x_6^2 + (2.18\nu^2 + 1.25)x_6x_7 + \\ & + (43.37\nu^2 + 21.28)x_7^2 + 1.1x_8^2 + \tilde{R}(x). \end{aligned} \tag{43}$$

Коэффициенты $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ в неравенствах (24) являются наименьшим и наибольшим собственными значениями матрицы квадратичной формы в (43).

Таким образом, для решений системы (28) с начальными условиями из некоторой ε-окрестности нуля справедлива оценка (26):

$$\|x(t)\| \le \left(\alpha_1\,(t - t_0) + \alpha_2\|x(t_0)\|^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t \ge t_0,$$

где

$$\alpha_1 = \begin{cases} -(1-\delta)\,\lambda_{\min}\dfrac{\gamma_1 A_{12}+\gamma_2 A_{21}}{2\gamma_1\gamma_2} & \text{при } \nu \le 0.91, \\ -(1-\delta)\,\lambda_{\min}\dfrac{A_{22}}{\gamma_2} & \text{при } \nu > 0.91, \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}(1-\delta)$$

с некоторым $\delta > 0$. Так, при $\nu = 1 \quad \alpha_1 = 0.00003$.

Выводы. Основным результатом статьи является асимптотическая оценка решений нелинейной системы в критическом случае при наличии резонансного соотношения четвертого порядка. Предложенный конструктивный метод вычисления коэффициентов оценки и построения функции Ляпунова для исходной системы продемонстрирован на примере механической системы с частичной диссипацией энергии.

1. *Зубов В.И.* Методы А.М. Ляпунова и их применение. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. – 263 с.
2. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
3. *Grushkovskaya V., Zuyev A.* Asymptotic Behavior of Solutions of a Nonlinear System in the Critical Case of q Pairs of Purely Imaginary Eigenvalues// Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2013. – **80**. – С. 156–178.
4. *Куницын А.Л.* Об устойчивости в критическом случае трех пар чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // Прикл. математика и механика. – 1971. – **35**, вып. 1. – С.164–167.
5. *Гольцер Я.М, Куницын А.Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе // Прикл. математика и механика. – 1975. – **39**, вып. 6. – С. 974–984.
6. *Куницын А.Л., Медведев С.В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // Прикл. математика и механика. – 1977. – **41**, вып. 3. – С. 422–429.
7. *Жавнерчик В.Э.* О неустойчивости при наличии нескольких резонансов // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, вып. 6. – С. 970–974.
8. *Куницын А.Л.* О резонансной стабилизации одного класса неустойчивых систем // Прикл. математика и механика. – 2011. – **75**, вып. 5. – С. 727–730.
9. *Красильников П.С.* Об алгебраических критериях асимптотической устойчивости при резонансе 1:1 // Прикл. математика и механика. – 1993. – **57**, вып. 4. – С. 5–11.
10. *Красильников П.С.* Об асимптотической устойчивости при резонансе 1:3 // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, вып. 1. – С. 23–29.
11. *Каменков Г.В.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1972. – 214 с.
12. *Веретенников В.Г.* Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
13. *Молчанов А.М.* Разделение движений и асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // Докл. АН СССР. – 1961. – **136**, № 5. – С. 1030–1033.

V.V. Grushkovskaya, A.L. Zuyev

Asymptotic properties of the trajectories of a nonlinear system in a case of the fourth order resonance

This paper is devoted to the study of the behavior of solutions of a nonlinear system as $t \to +\infty$ in a critical case, under the assumption that the stability is ensured by third order forms. It is supposed that the system has frequencies satisfying the resonance relation of form $1:1:2$ or $1:1:1:1$, and there are no other resonances up to the fourth order. In a case when the resonance subsystem has a sign-definite first integral, sufficient conditions for the asymptotic stability are proposed, and a Lyapunov function is obtained. The main result of the paper is a power estimate for the solutions with initial conditions from a neighborhood of the origin. As an illustration, we consider an example of a mechanical system with four degrees of freedom.

Keywords: *asymptotic estimate, critical case, resonance.*

В.В. Грушковська, О.Л. Зуєв

Асимптотичні властивості траєкторій нелінійної системи у випадку резонансу четвертого порядку

У статті досліджується поводження розв'язків нелінійної системи при $t \to +\infty$ у критичному випадку, якщо асимптотична стійкість забезпечується членами не вище третього порядку. Припускається, що система має частоти, які задовольняють резонансне співвідношення типу $1:1:2$ або $1:1:1:1$, при цьому інші резонанси до четвертого порядку включно відсутні. У випадку існування знаковизначеного першого інтеграла запропоновано достатні умови асимптотичної стійкості і побудовано функцію Ляпунова. Основним результатом статті є степенева оцінка норми розв'язків системи з початковими умовами із деякого околу нуля. Як ілюстрацію розглянуто приклад механічної системи з чотирма степенями вільності.

Ключові слова: *асимптотична стійкість, критичний випадок, резонанс.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 07.10.13

v_grushkovskaya@mail.ru, al_zv@mail.ru