

**ПРАВИЛО КОНТРАРНОГО ЗАКРЫТИЯ И ПОЛНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЛОГИЧЕСКОГО АППАРАТА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПРАВИЛОМ ВХОДНОЙ РЕЗОЛЮЦИИ****Введение**

Применение логики в интеллектуальных системах, как правило, предполагает создание и/или применение уже известных и достаточно эффективных методов поиска вывода в классической логике первого порядка. К числу последних относится входная резолюция, часто выбираемая в качестве базового дедуктивного аппарата разнообразных систем логического программирования. Для множеств хорновых дизъюнктов входная резолюция является корректным и полным методом, которая для достижения полноты в случае более широких классов дизъюнктов требует подключения дополнительных логических механизмов. Был получен ряд результатов [1–3] показывающих, что, в общем случае, за счет использования некоторой вспомогательной информации, можно получить полные расширения входной резолюции при построении линейных выводов.

Параллельно, в целях повышения эффективности поиска вывода, изучался вопрос построения древовидного вывода с правилом входной резолюции. В результате входная резолюция приобрела вид так называемой SLD-резолюции, в ходе применения которой строятся SLD-деревья [4,5] и которая широко используется в интеллектуальных системах типа систем логического программирования. SLD-резолюция является корректной и полной для множеств хорновых дизъюнктов, но не сохраняет полноту для множеств произвольных дизъюнктов. Поскольку в текущее время стала актуальной способность интеллектуальных систем проводить формальные рассуждения, используя формулы произвольного вида, естественно, что возник вопрос о том, какими максимально простыми средствами необходимо дополнить SLD-резолюцию для получения полного метода поиска вывода в общем случае. Одно из возможных его решений предлагается в данной работе<sup>1</sup>: полное расширение SLD-резолюции достигается за счет встраивания в SLD-резолюцию достаточно простого правила вывода, названного здесь правилом контрарного закрытия.

Специфической чертой данной работы является то, что упомянутое выше полное расширение SLD-резолюции появляется как «сужение» на дизъюнкты специальных машинно-ориентированных секвенциальных исчислений, разработанных в целях получения корректных и полных методов установления выводимости в классической логике первого порядка, которые, в некотором смысле, сравнимы по эффективности с широко используемыми резолюционными методами [6]. В этой связи секвенциальные исчисления, рассматриваемые здесь, могут выступать в качестве «естественных» полных расширений SLD-резолюции на секвенциальный случай. Сама же ориентация на развитие специальных секвенциальных исчислений была вызвана тем обстоятельством, что использование генценовского подхода [7] к проведению дедукции является намного более естественным и удобным при поиске доказательства, предусматривающего вмешательство человека в процесс дедукции. Заметим, что оптимизация перебора, возникающего из-за возможности разных порядков применения обычных кванторных правил, достигается в работе за счет предварительной сколемизации, впервые предложенной в [8] для формул первого порядка и позже перенесенной в [9] на секвенции. Современное состояние этих проблем подробно изложено в [10].

---

<sup>1</sup> Исследования, представленные в данной работе, поддержаны Intas-проектом 2000-447.

## Предварительные сведения

Рассматривается *секвенциальная форма классической логики первого порядка без равенства*. Известно [9], что установление выводимости любой секвенции может быть сведено к установлению подходящей замкнутой секвенции с элиминированными положительными кванторами. Следовательно, можно считать, что любая секвенция состоит из бескванторных формул, вместо переменных которых могут быть подставлены любые термы, а сами формулы секвенций попарно не имеют общих переменных.

Считаются известными понятия *литеры, терма, формулы и дизъюнкта*. Если  $L$  – литера, то через  $\sim L$  обозначается её *дополнение*. Выражение  $F^\neg$  обозначает результат одношагового внесения отрицания в формулу  $F$ , а  $\#$  – пустую формулу. Также отметим, что мы понимаем положительное  $(P[F^+])$  и отрицательное  $(P[F^-])$  вхождения формулы  $F$  в формулу  $P$  в обычном смысле.

В дальнейшем будет использоваться определение (одновременного) *наиболее общего унификатора* в формулировке из [11]. Под *равенством* понимается упорядоченная пара термов  $\langle s, t \rangle$ , записываемая в виде  $s \approx t$ .

Пусть  $L$  является литерой вида  $R(t_1, \dots, t_n)(\neg R(t_1, \dots, t_n))$  и  $M$  – литерой вида  $R(s_1, \dots, s_n)(\neg R(s_1, \dots, s_n))$ , где  $R$  есть предикатный символ и  $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n$  есть термы. Тогда через  $\Sigma(L, M)$  обозначается множество равенств  $\{t_1 \approx s_1, \dots, t_n \approx s_n\}$ . В этом случае будем говорить, что литеры  $L$  и  $M$  являются *эквивалентными по модулю  $\Sigma(L, M)$*  ( $L \approx M \text{ mod } \Sigma(L, M)$ ).

Мы будем придерживаться обычного понятия *секвенции*. Формулы из антецедента секвенции будут называться её *посылками*, а формулы из сукцедента – её *целями*.

В дальнейшем будут рассматриваться только секвенции с одной целью в сукцеденте секвенции. При этом понятие секвенции распространяется на выражения вида  $\Gamma \rightarrow \#$ , где  $\#$  обозначает пустую формулу. Секвенции  $\Gamma \rightarrow \#$  будут называться *аксиомами* рассматриваемых секвенциальных исчислений.

Деревья понимаются в обычном смысле. Деревья растут «сверху вниз». В дальнейшем мы будем рассматривать так называемые *секвенциальные деревья*. *Секвенциальное дерево* – это дерево, каждая вершина которого помечена некоторой секвенцией. Часто вершина дерева будет отождествляться с секвенцией, приписанной ей в качестве метки.

В процессе поиска вывода начальной секвенции  $S$  строится так называемое *дерево вывода  $Tr$*  относительно  $S$ . В начальный момент процесса поиска дерево  $Tr$  состоит только из корня, помеченного  $S$ , и называется *инициальным деревом*. Если на некотором этапе  $Tr$  уже сгенерировано, то последующие вершины дерева порождаются в соответствии с тем или иным правилом вывода, примененным к некоторому листу  $Tr$  в случае, когда такое применение правила возможно.

С каждым деревом вывода связывается специальное множество равенств  $Eq(Tr)$ .  $Eq(Tr)$  полагается равным пустому множеству  $\emptyset$  для каждого инициального дерева вывода. Если же дерево вывода  $Tr$  отлично от инициального, то  $Eq(Tr)$  полагается равным  $Eq(Tr') \cup \Sigma(L, M)$ , где  $Tr'$  – такое дерево вывода, что  $Tr$  «выводится» из  $Tr'$  применением некоторого подходящего правила вывода, генерирующим соответствующее  $\Sigma(L, M)$  (см. ниже).

Дерево вывода  $Tr$  относительно секвенции  $S$  называется *деревом доказательства* относительно  $S$  тогда и только тогда, когда каждый лист  $Tr$  помечен аксиомой и существует одновременный наиболее общий унификатор всех равенств из  $Eq(Tr)$ .

Пусть  $P_1, \dots, P_n$  и  $G$  есть формулы ( $n \geq 0$ ), и  $S$  обозначает секвенцию  $P_1, \dots, P_n \rightarrow G$ . Тогда формульным образом  $\varphi(S)$  называется формула  $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \supset G$ , когда  $n > 0$ , и  $\varphi(S)$  есть  $G$ , когда  $n = 0$ . Если  $G$  есть  $\#$ , то  $\varphi(S)$  есть  $\#$ . Заметим, что  $\#$  всегда полагается общезначимой формулой.

### Целеориентированное исчисление секвенций

Описываемое ниже исчисление  $GS$  предназначено для установления того, что формула  $G$  является логическим следствием формул  $P_1, \dots, P_n$  (в этом случае  $P_1, \dots, P_n$  и  $G$  называются инициальными формулами). Ясно, что для задания  $GS$  нам требуется только определить его правила вывода.

1. *Правила расщепления цели.* Эти правила предназначены для элиминации главной логической связи рассматриваемой цели. Результатом применения каждого такого правила является новая секвенция (секвенции) с новой целью (целями) и, возможно, новыми посылками. Отметим, каждое правило расщепления цели генерирует  $\Sigma(L, M)$ , равное пустому множеству  $\emptyset$ .

$$\frac{\Gamma \rightarrow F \supset G}{\Gamma, F \rightarrow G}; \quad \frac{\Gamma \rightarrow F \supset G}{\Gamma, G^\neg \rightarrow F};$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow F \vee G}{\Gamma, F^\neg \rightarrow G}; \quad \frac{\Gamma \rightarrow F \vee G}{\Gamma, G^\neg \rightarrow F};$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow F \wedge G}{\Gamma \rightarrow F \Gamma \rightarrow G}; \quad \frac{\Gamma \rightarrow \neg F}{\Gamma \rightarrow F^\neg}.$$

2. *Правило дублирования посылки.*

$$\frac{\Gamma_1, F[M^+], \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, F', F[M^+], \Gamma_2 \rightarrow L},$$

где  $L \approx M \text{ mod } \Sigma(L, M)$  и  $F'$  есть вариант формулы  $F$ .

3. *Правила расщепления цели.* Порядок применения правил этого типа "управляется" литерой  $L$  из сукцедента. Отметим, что везде ниже  $M$  обозначает литеру, удовлетворяющую условию:  $L \approx M \text{ mod } \Sigma(L, M)$ .

$$\frac{\Gamma_1, F[M^-] \supset G, \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, (F[M^+])^\neg, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow G^\neg}; \quad \frac{\Gamma_1, F \supset G[M^+], \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, (G[M^+])^\neg, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow F};$$

$$\frac{\Gamma_1, F \vee G[M^+], \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, G[M^+], \Gamma_2 \rightarrow L \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \neg F}; \quad \frac{\Gamma_1, F[M^+] \vee G, \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, F[M^+], \Gamma_2 \rightarrow L \Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \neg G};$$

$$\frac{\Gamma_1, F \wedge G[M^+], \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, G[M^+], F, \Gamma_2 \rightarrow L}; \quad \frac{\Gamma_1, F[M^+] \wedge G, \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, F[M^+], G, \Gamma_2 \rightarrow L};$$

$$\frac{\Gamma_1, \neg(F[M^-]), \Gamma_1 \rightarrow L}{\Delta_1, F^-[M^+], \Delta_2 \rightarrow L}; \quad \frac{\Gamma_1, M, \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma_1, M, \Gamma_2 \rightarrow \#}.$$

4. *Правило контрарного закрытия (CC-правило)*. Пусть  $Tr$  – некоторое дерево вывода и  $Br$  – его ветвь с листом  $Lf$ , помеченная секвенцией  $\Gamma \rightarrow L$ , где  $\Gamma$  – последовательность формул и  $L$  – литера. Пусть ветвь  $Br$  содержит секвенцию  $\Gamma' \rightarrow M$ , где  $\Gamma'$  является последовательностью формул и  $M$  – такая литера, что  $\sim L \approx M \bmod \Sigma(\sim L, M)$ . Если дерево  $Tr'$  получено из  $Tr$  с помощью присоединения к  $Lf$  одного наследника, помеченного секвенцией  $\Gamma \rightarrow \#$ , то говорится, что  $Tr'$  выводимо из  $Tr$  с помощью *правила контрарного закрытия (CC-правила)*. При этом множество  $Eg(Tr')$  определяется равным  $Eg(Tr) \cup \Sigma(\sim L, M)$ .

Относительно исчисления  $GS$  имеет место следующее утверждение.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Пусть формулы  $P_1, \dots, P_n$  образуют конечное непротиворечивое множество формул. Тогда формула  $G$  является логическим следствием формул  $P_1, \dots, P_n$  в том и только том случае, когда существует дерево доказательства относительно секвенции  $P_1, \dots, P_n, \neg G \rightarrow G$  в исчислении  $GS$ .

*Схема доказательства.* Прежде всего заметим, что теорема Эрбрана в формулировке работы [9] и некоторые другие результаты из [9] позволяют ограничиться рассмотрением только пропозиционального случая выводимости в исчислении  $GS$ , т.е. рассмотрением только таких деревьев вывода  $Tr$ , у которых  $\Sigma(Tr) = \emptyset$ . Для пропозиционального случая полнота исчисления  $GS$  может быть доказана индукцией по числу бинарных логических связей в инициальной секвенции, исследуемой на выводимость, а корректность может быть легко проверена с помощью понятия формульного образа  $\varphi(S)$  секвенции  $S.Q.E.D.$

### Модификации исчисления $GS$

Отдельного обсуждения заслуживает случай, когда мы рассматриваем секвенции вида  $M_{1,1} \vee \dots \vee M_{1,r_1}, \dots, M_{n,1} \vee \dots \vee M_{n,m} \rightarrow L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ , где  $M_{1,1}, \dots, M_{n,m}, L_1, \dots, L_k$  – литеры. Поскольку каждая формула первого порядка может быть приведена к конъюнктивной (дизъюнктивной) нормальной форме такими преобразованиями, которые сохраняют логическую эквивалентность, то на основании результатов из [9] легко показать, что установление выводимости любой секвенции произвольного вида эквивалентно установлению выводимости некоторой подходящей секвенции вида  $M_{1,1} \vee \dots \vee M_{1,r_1}, \dots, M_{n,1} \vee \dots \vee M_{n,m} \rightarrow L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ . Вот почему в данном разделе мы рассматриваем только секвенции такого вида. В этой связи отметим, что если  $G$  есть  $L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ , то  $G^\neg$  есть  $\sim L_1 \vee \dots \vee \sim L_k$ .

Учитывая вышесказанное, исчисление  $GS$  может быть трансформировано в исчисление  $LS$  “литеральных” секвенций, которое имеет следующие правила:

1. *Правило расщепления цели.* Приводимое ниже правило обобщает правило “расщепления конъюнкции в цели” исчисления  $GS$ , если рассматривать  $\wedge$  как *многоместную операцию*:

$$\frac{\Gamma \rightarrow L \wedge \dots \wedge L_m}{\Gamma \rightarrow L_1, \dots, \Gamma \rightarrow L_m}.$$

2. *Правило расщепления посылки.* Это правило может быть применено, когда цель рассматриваемой секвенции является литерой:

$$\frac{\Gamma_1, A_1 \vee \dots \vee A_n \vee M \vee B_1 \vee \dots \vee B_r, \Gamma_2 \rightarrow L}{\Gamma' \rightarrow -A_1', \dots, \Gamma' \rightarrow -A_n', \Gamma' \rightarrow -B_1', \dots, \Gamma' \rightarrow -B_r'}$$

где  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_r, L$  и  $M$  – литеры,  $L \approx M \text{ mod } \Sigma(L, M)$  и  $A_1', \dots, A_n', B_1', \dots, B_r'$  – новые варианты литер  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_r$  соответственно и  $\Gamma'$  является последовательностью  $\Gamma_1, A_1 \vee \dots \vee A_n \vee M \vee B_1 \vee \dots \vee B_r, \Gamma_2$ .

Исчисление  $LS$  имеет такое же  $\#$ -правило и  $CC$ -правило, как и исчисление  $GS$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Пусть дизъюнкты  $P_1, \dots, P_n$  образуют конечное непротиворечивое множество дизъюнктов. Конъюнкция литер  $G$  является логическим следствием дизъюнктов  $P_1, \dots, P_n$  в том и только том случае, когда существует дерево доказательства относительно секвенции  $P_1, \dots, P_n, G^\neg \rightarrow G$  в исчислении  $LS$ .

*Схема доказательства.* В соответствии с предложением 1, существует дерево доказательства  $Tr$  относительно секвенции  $P_1, \dots, P_n, G^\neg \rightarrow G$  в исчислении  $GS$ . Очевидно, что  $Tr$  содержит применение только таких правил вывода исчисления  $GS$ , которые имеют соответствующие аналоги в исчислении  $LS$ . *Q.E.D.*

Особенностью исчисления  $LS$  является то, что antecedentes выводимых секвенций совпадают с antecedentом соответствующей инициальной секвенции. Это позволяет рассматривать antecedent этой инициальной секвенции как множество входных дизъюнктов и преобразовывать каждое дерево вывода  $Tr$  исчисления  $LS$  в дерево  $\gamma(Tr)$ , листья которого совпадают с листьями дерева  $Tr$ , и помеченные целями соответствующих секвенций (и только ими). Мы будем называть такое дерево  $\gamma(Tr)$  деревом целей, соответствующим дереву  $Tr$ . Таким образом, имеется простой способ перехода от исчисления  $LS$  к SLD-резолюции.

Полнота SLD-резолюции для множеств хорновых дизъюнктов является известным результатом логического программирования. Следующее предложение содержит его.

**СЛЕДСТВИЕ (корректность и полнота SLD-резолюции).** Пусть  $P_1, \dots, P_n$  являются положительными хорновыми дизъюнктами, и  $G$  является конъюнкцией атомарных формул. Цель  $G$  является логическим следствием дизъюнктов  $P_1, \dots, P_n$  в том и только в том случае, когда существует дерево доказательства относительно секвенции  $P_1, \dots, P_n \rightarrow G$  в исчислении  $LS$  (без применений  $CC$ -правила).

*Доказательство.* В соответствии с предложением 2 существует дерево доказательства  $Tr$  относительно секвенции  $P_1, \dots, P_n, G^\neg \rightarrow G$  в исчислении  $LS$ . Очевидно, что  $Tr$  не содержит секвенций,

выводимых по СС-правилу. Следовательно,  $\gamma(Tr)\sigma$  является SLD-деревом, где  $\sigma$  есть одновременный наиболее общий унификатор всех равенств из  $Eq(Tr)$ . *Q.E.D.*

## Выводы

Полученные результаты показывают, что исчисление  $LS$  даёт способы построения полных расширений SLD-резолюции для множеств дизъюнктов произвольного вида посредством встраивания в SLD-резолюцию правила контрадного закрытия или его аналогов. Если же мы интересуемся возможностями полного расширения SLD-резолюции на случай установления выводимости секвенций с произвольными формулами, то можно воспользоваться различными модификациями исчисления  $GS$ . Эти свойства исчислений  $GS$  и  $LS$  определяют методы модификации программных средств в целях получения полных в общем случае расширений логического аппарата разнообразных интеллектуальных систем (например, экспертных систем, систем логического программирования, дедуктивных баз данных и т.д.), использующих SLD-резолюцию в качестве базовой техники поиска логического вывода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pool D.L., Goeble R. Gracefully Adding Negation and Disjunction to Prolog // Lecture Notes in Computer Science. – 1986. – Vol. 220. – P. 635 – 641.
2. Stickel M. A. Prolog Technology Theorem Prover // New Generation Comp. – 1984. – Vol. 4. – P. 371 – 383.
3. Stickel M. A. Prolog Technology Theorem Prover: Implementation by an Extended Prolog Compiler // Lecture Notes in Computer Science. – 1986. – Vol. 232. – P. 573 – 587.
4. Apt K.R., van Emden M. H. Contributions into the Theory of Logic Programming // JASM. – 1982. – Vol. 3, N 29. – P. 841 – 862.
5. Lloyd J.V. Foundations of Logic Programming. – Berlin, 1987. – 476 p.
6. Robinson J. A machine-oriented logic based on resolution principle // Journal of the ACM. – 1965. – Vol. 12, N 1. – P. 23 – 41.
7. Gentzen G. Untersuchungen uber das Logische Schliessen // Math. Z. – 1934. – Vol. 39. – P. 176 – 210.
8. Skolem T. Logisch-kombinatorische Untersuchungen uber die Erfullbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Satze // Skriftner utgit ar Videnskapsselskaper i Kristiania. – 1920. – Vol. 4. – P. 4 – 36.
9. Минц Г.Е. Теорема Эбрана // Математическая теория логического вывода. – М.: Наука, 1967. – С. 311 – 350.
10. Handbook of Automated Reasoning. – Elsevier Science Publishers, 2001. – Vol. 1: Edited by A.Robinson and A.Voronkov. – 1020 p.
11. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука, 1987. – 358 с.