УДК 531.38

©2012. **А.В. Мазнев**

ЛИНЕЙНОЕ ИНВАРИАНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Установлены условия существования линейного инвариантного соотношения у уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Показано, что при выполнении найденных условий ось, относительно которой задано линейное инвариантное соотношение, ортогональна круговому сечению гирационного эллипсоида. При условии, что гиростатический момент зависит от времени, найдены асимптотически–равномерные движения гиростата относительно вертикали.

Ключевые слова: *гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение, магнитное поле.*

Введение. Современные подходы в моделировании движений сложных механических систем приводят к рассмотрению новых задач динамики твердого тела. Из множества этих задач выделим две: задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом и задачу о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона.

Постановка первой задачи и вывод уравнений движения гиростата рассмотрены в работах [1–4]. В статьях [5–8] изучен случай, когда на гиростат действует сила тяжести, а случай движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил – в [9–12].

Уравнения движения во второй задаче, а также эффекты, возникающие при вращении нейтрального ферромагнетика или сверхпроводящего тела в магнитном поле, обсуждены в работах [13–15]. Случаи интегрируемости этой задачи найдены либо при условии постоянного гиростатического момента [16], либо при наличии дополнительных предположений на распределение масс гиростата [12, 17].

Данная статья посвящена исследованию условий существования линейного инвариантного соотношения у уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом в магнитном поле сил. С помощью первого метода А.М. Ляпунова [18] в предположении, что гиростатический момент является линейной функцией компонент единичного вектора вертикали, построены асимптотические решения приведенной системы.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом, используя обозначения, принятые в [16]:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times a\boldsymbol{x} - L\boldsymbol{\alpha} + Ba\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times a\boldsymbol{x}, \qquad \dot{\lambda} = L. \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) введены обозначения: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, указывающий направление магнитного поля; $\lambda = \lambda(t)$ – величина гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – постоянный единичный вектор; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – постоянный вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $B = (B_{ij}),\ C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; L – функция времени, определяющая взаимодействие тела-носителя и ротора; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t. Матрица B характеризует магнитный момент $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{\omega}$, который возникает при вращении нейтрального ферромагнетика в магнитном поле, $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость гиростата. Последние два слагаемых в правой части уравнения (1) определяют потенциальные силы, действующие на гиростат.

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы: геометрический

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1 \tag{3}$$

и интеграл момента количества движения

$$(\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{4}$$

где k – произвольная постоянная.

Поставим задачу об определении условий существования у системы (1), (2) инвариантного соотношения (ИС)

$$x_1 - (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) = 0. \tag{5}$$

Здесь b_i $(i = \overline{0,3})$ – параметры, подлежащие определению.

Запишем компоненты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x}$, используя соотношение (5):

$$\omega_i = a_{1i}(b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad a_{23} = a_{32}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{6}$$

Уравнения Пуассона (2) в скалярной форме примут вид

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2\omega_3 - \nu_3\omega_2, \quad \dot{\nu}_2 = \nu_3\omega_1 - \nu_1\omega_3, \quad \dot{\nu}_3 = \nu_1\omega_2 - \nu_2\omega_1. \tag{7}$$

Подставим $L = \dot{\lambda}$ в уравнение (1) и запишем проекцию его правой и левой части на первую координатную ось

$$\begin{gathered}\dot{x}_1 = x_2\omega_3 - x_3\omega_2 + \lambda(t)(\alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2) - \dot{\lambda}(t)\alpha_1 + \\ + \nu_3(B\boldsymbol{\omega})_2 - \nu_2(B\boldsymbol{\omega})_3 + s_2\nu_3 - s_3\nu_2 + \nu_2(C\boldsymbol{\nu})_3 - \nu_3(C\nu)_2,\end{gathered} \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered}(B\boldsymbol{\omega})_i = B_{1i}\omega_1 + B_{i2}\omega_2 + B_{i3}\omega_3, \quad (C\boldsymbol{\nu})_i = C_{1i}\nu_1 + C_{i2}\nu_2 + C_{i3}\nu_3, \\ B_{23} = B_{32}, \quad C_{23} = C_{32}, \quad i = 2,3.\end{gathered} \tag{9}$$

Если вычислять производную от ИС (5) в силу уравнений (7), (8) с обозначениями (9), она будет содержать переменные $x_2, x_3, \nu_i \quad (i = \overline{1,3})$, функцию $\lambda(t)$ и ее производную $\dot{\lambda}(t)$. Требование того, чтобы производная от ИС (5) обращалась в нуль для любых $\lambda(t), \dot{\lambda}(t)$, приводит к противоречию с предположением о переменности гиростатического момента. Следовательно, необходимо задать класс функций $\lambda(t)$. Естественно считать, что функция λ зависит только от ν_i $(i = \overline{1,3})$. Будем предполагать, что эта функция является многочленом по переменным ν_i. Нетрудно показать, что производная от ИС (5) в силу (7), (8) обращается в нуль для всех значений $x_2, x_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, например, в случае, когда функция λ имеем вид

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1\nu_1 + \lambda_2\nu_2 + \lambda_3\nu_3. \tag{10}$$

Предполагая наличие зависимости (10), выпишем общий вид производной от ИС (5) в силу уравнений (7), (8)

$$(a_{33} - a_{22})x_2x_3 + a_{23}(x_2^2 - x_3^2) + F_1^{(2)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)x_2 + \\ + F_1^{(3)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)x_3 + F_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0, \tag{11}$$

где функции $F_1^{(2)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3), F_1^{(3)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – многочлены по ν_i $(i = \overline{1,3})$ первого порядка; $F_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – многочлен по ν_i $(i = \overline{1,3})$ второго порядка. В общем случае коэффициенты этих многочленов имеют достаточно громоздкий вид и поэтому их не выписываем. Из равенства (11) вытекает

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = a_{22}, \tag{12}$$

$$F_1^{(2)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0, \quad F_1^{(3)}(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0, \quad F_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 0. \tag{13}$$

Условия (12) аналогичны условиям Гесса для классической задачи [19].

Потребуем, чтобы первое и второе равенства из (13) были тождествами по ν_1, ν_2, ν_3. Тогда получим условия на параметры соотношений (5), (10) и параметры задачи (1)

$$\begin{gathered} a_{13}b_1 - a_{22}(b_3 + \alpha_3\lambda_1 + \alpha_1\lambda_3) = 0, \quad a_{13}b_2 - a_{22}(\alpha_3\lambda_2 + B_{23}) = 0, \\ a_{13}b_3 + a_{22}(b_1 + \alpha_1\lambda_1 - \alpha_3\lambda_3 + B_{22}) = 0, \quad a_{13}b_0 - a_{22}\alpha_3\lambda_0 = 0, \\ a_{13}(b_3 + \alpha_1\lambda_3 - B_{13}) - a_{22}(b_1 + \alpha_1\lambda_1 - \alpha_2\lambda_2 - B_{33}) = 0, \\ b_2 + \alpha_2\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 = 0, \quad \alpha_2\lambda_0 = 0. \end{gathered} \tag{14}$$

В дальнейшем рассматриваем вариант

$$\alpha_2 = 0, \tag{15}$$

при выполнении которого система (14) упрощается.

Потребуем, чтобы функция $F_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ из (13) обращалась в нуль для любых значений ν_1, ν_2, ν_3. Тогда должны выполняться равенства

$$\begin{gathered} a_{13}b_0 - a_{22}\alpha_3\lambda_0 = 0, \quad C_{23} = -b_2\mu_1, \quad C_{23} = b_3\mu_2, \\ C_{13} = -b_1\mu_1, \quad C_{12} = b_1\mu_2, \quad C_{22} - C_{33} = b_3\mu_1 + b_2\mu_2, \\ s_2 = -b_0\mu_1, \quad s_3 = b_0\mu_2, \end{gathered} \tag{16}$$

где

$$\mu_1 = a_{11}(b_3 + \alpha_1\lambda_3 - B_{13}) - a_{13}(b_1 + \alpha_1\lambda_1 + B_{33}), \quad \mu_2 = a_{11}B_{12} + a_{13}B_{23}. \tag{17}$$

2. Анализ системы уравнений (14)–(17). Нетрудно показать, что данная система уравнений имеет решение, в котором матрицы B и C имеют вид

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & -aB_{33} & -aB_{33} \\ -aB_{33} & -B_{33} & B_{33} \\ -aB_{33} & B_{33} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & C_{23} & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где

$$a = \frac{a_{22}}{a_{13}}, \qquad C_{23} = -\frac{a\beta_0 B_{33}^2}{a_{13}}, \qquad \beta_0 = a_{11}a_{22} - a_{13}^2, \qquad a_{13} \neq 0. \tag{19}$$

При этом вектор $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0)$, параметры инвариантных соотношений (5), (10) имеют значения

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = b_3 = aB_{33}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -aB_{33}, \tag{20}$$

а у вектора $\boldsymbol{s}$

$$s_2 = 0, \quad s_3 = 0. \tag{21}$$

Следовательно, в силу условий (20), ИС (5) и (10) таковы:

$$x_1 = aB_{33}(\nu_2 + \nu_3), \quad \lambda = -aB_{33}(\nu_2 + \nu_3). \tag{22}$$

На основании (21), (22) и условий $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$ выполняется равенство

$$(\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{s} = 0, \tag{23}$$

т. е. проекция общего момента количества движения гиростата на барицентрическую ось гиростата равна нулю. Это же свойство характеризует и решение В. Гесса [19].

Запишем компоненты вектора угловой скорости (6) с учетом условий (12):

$$\omega_1 = -a_{11}\lambda + a_{13}x_3, \quad \omega_2 = a_{22}x_2, \quad \omega_3 = -a_{13}\lambda + a_{22}x_3. \tag{24}$$

При наличии равенств (24) уравнения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_2(a_{22}x_3 - a_{13}\lambda) - a_{22}\nu_3x_2, \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_3(a_{13}x_3 - a_{11}\lambda) - \nu_1(a_{22}x_3 - a_{13}\lambda), \\ \dot{\nu}_3 &= a_{22}\nu_1x_2 - \nu_2(a_{13}x_3 - a_{11}\lambda). \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь λ определяется второй формулой из (22).

Первое скалярное уравнение, вытекающее из (1), при выполнении условий (18)–(22) становится тождеством. Запишем два других скалярных уравнения, которые следуют из (1):

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_3(a_{13}x_3 - a_{11}\lambda) + \nu_1(B\boldsymbol{\omega})_3 - \nu_3(B\boldsymbol{\omega})_1 - s_1\nu_3 + \\ &\qquad + (C_{11} - C_{22})\nu_1\nu_3 - C_{23}\nu_1\nu_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_2(a_{13}x_3 - a_{11}\lambda) + \nu_2(B\boldsymbol{\omega})_1 - \nu_1(B\boldsymbol{\omega})_2 + s_1\nu_2 + \\ &\qquad + (C_{22} - C_{11})\nu_1\nu_2 + C_{23}\nu_1\nu_3, \end{aligned} \tag{26}$$

где в силу (18), (24)

$$\begin{aligned} (B\boldsymbol{\omega})_1 &= \lambda(B_{33}a_{22} - B_{11}a_{11}) - \frac{a_{22}^2 B_{33}}{a_{13}}x_2 + \frac{B_{11}a_{13}^2 - B_{33}a_{22}^2}{a_{13}}x_3, \\ (B\boldsymbol{\omega})_2 &= \frac{B_{33}}{a_{13}}(\lambda\beta_0 - a_{13}a_{22}x_2), \quad (B\boldsymbol{\omega})_3 = \frac{B_{33}}{a_{13}}(\lambda\beta_0 + a_{13}a_{22}x_2). \end{aligned} \tag{27}$$

Уравнения (26) имеют первый интеграл

$$x_2\nu_2 + x_3\nu_3 = k,$$

который можно определить из (4) на основании условий $\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ и равенств (22).

3. Преобразование уравнений (25), (26). Введем вместо переменных ν_i новые переменные θ, φ

$$\nu_1 = \cos\theta, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \sin\theta\sin\varphi. \tag{28}$$

Тогда геометрический интеграл (3) становится тождеством. Редукцию уравнений (25), (26) будем проводить при условии $k = 0$. Тогда $x_2\cos\varphi + x_3\sin\varphi = 0$ (считаем $\sin\theta \neq 0$). Данное уравнение параметризуем следующим образом:

$$x_2 = u\sin\varphi, \quad x_3 = -u\cos\varphi. \tag{29}$$

Запишем формулы (22) в переменных (28)

$$x_1 = aB_{33}(\sin\varphi + \cos\varphi)\sin\theta, \quad \lambda = -aB_{33}(\sin\varphi + \cos\varphi)\sin\theta. \tag{30}$$

Используя равенства (28)–(30), преобразуем уравнения (25) к новым переменным θ, φ, u. В силу обозначений (27) имеем

$$\dot{\theta} = a_{22}[u - B_{33}(\sin\varphi + \cos\varphi)\sin\theta\cos\varphi], \tag{31}$$

$$\dot{\varphi} = a_{13}u\cos\varphi + aB_{33}(\sin\varphi + \cos\varphi)(a_{13}\cos\theta\sin\varphi - a_{11}\sin\theta), \tag{32}$$

$$\dot{u} = \frac{u}{a_{13}}[a_{22}a_{13}B_{33}(3\sin^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - 1)\cos\theta + a_{22}^2 B_{33}\sin\theta\sin\varphi +$$
$$+ (B_{11}a_{13}^2 - B_{33}a_{22}^2)\sin\theta\cos\varphi] + \Big[\Big(C_{11} - C_{22} - a\beta_0 B_{33}^2\Big)\cos\theta - s_1\Big]\sin\theta. \quad (33)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (31)–(33) является редуцированной системой, полученной из уравнений (1), (2) на инвариантном соотношении (5), равенстве (10), которые имеют место при выполнении условий (12), (18)–(21).

4. Асимптотические решения уравнений (31)–(33). Поскольку в общем случае установить решение системы (31)–(33) затруднительно, то рассмотрим класс асимптотически-стационарных решений этой системы.

Нетрудно убедиться в том, что система (31)–(33) допускает решение

$$u_* = 0, \quad \theta_* = 0, \quad \varphi_* = -\frac{\pi}{4}. \quad (34)$$

Введем возмущения для переменных u, θ, φ, учитывая (34)

$$u = x, \quad \theta = y, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} + z. \quad (35)$$

Подставим выражения (35) в уравнения (31)–(33) и выпишем линейную часть полученной системы

$$\dot{x} = -a_{22}B_{33}x + \mu_0 y, \quad \dot{y} = a_{22}x, \quad \dot{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}a_{13}x - a_{22}B_{33}z, \quad (36)$$

где

$$\mu_0 = C_{11} - C_{22} - a\beta_0 B_{33}^2 - s_1. \quad (37)$$

Составим характеристическое уравнение системы (36)

$$\beta(\beta^2 + a_{22}B_{33}\beta - \mu_0 a_{22}) = 0. \quad (38)$$

Выпишем ненулевые корни уравнения (38)

$$\beta_{1,2} = \frac{-a_{22}B_{33} \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = a_{22}^2 B_{33}^2 + 4\mu_0 a_{22}. \quad (39)$$

Известно, что характеристичные числа σ_1, σ_2 системы (36) связаны с корнями характеристического уравнения (38) следующими равенствами:

$$\sigma_i = -\mathrm{Re}\,\beta_i \quad (i = 1, 2). \quad (40)$$

Пусть $\mu_0 > 0$, т. е. в силу (37), (39) выполняется условие

$$\Delta = a_{22}\Big[4\Big(C_{11} - C_{22} - \frac{a_{22}\beta_0 B_{33}^2}{a_{13}} - s_1\Big) + a_{22}B_{33}^2\Big] > 0, \quad (41)$$

тогда уравнение (39) имеет два действительных корня: $\beta_1 > 0,\ \beta_2 < 0$. В силу (40) и согласно первому методу Ляпунова [18], нелинейная система (31)–(33) допускает решение

$$\theta(t) = \sum_{m=1}^{\infty} L_\theta^{(m)}(t) c^m e^{m\beta_2 t}, \quad \varphi(t) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} L_\varphi^{(m)}(t) c^m e^{m\beta_2 t},$$
$$u(t) = \sum_{m=1}^{\infty} L_u^{(m)}(t) c^m e^{m\beta_2 t}, \tag{42}$$

где c – произвольная постоянная, $m \in \mathbb{N}$. Ряды (42) сходятся абсолютно, характеристичные числа функций $L_\theta^{(m)}(t), L_\varphi^{(m)}(t), L_u^{(m)}(t)$ не менее нуля. Решение (42) обладает свойством асимптотичности: $\theta(t) \to 0, \varphi(t) \to -\frac{\pi}{4},\ u(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

При $\mu_0 < 0,\ B_{33} > 0$ и выполнении неравенства (41) уравнение (38) допускает два отрицательных корня ($\beta_1 < 0,\ \beta_2 < 0$). Система (36) имеет два положительных характеристичных числа $\sigma_1 = -\beta_1,\ \sigma_2 = -\beta_2$. Следовательно, система (31)–(33) имеет решение

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \sum_{\binom{m_1+m_2=m}{m=1}}^{\infty} M_\theta^{(m_1,m_2)}(t) c_1^{m_1} c_2^{m_2} e^{(m_1\beta_1+m_2\beta_2)t}, \\ \varphi(t) &= -\frac{\pi}{4} + \sum_{\binom{m_1+m_2=m}{m=1}}^{\infty} M_\varphi^{(m_1,m_2)}(t) c_1^{m_1} c_2^{m_2} e^{(m_1\beta_1+m_2\beta_2)t}, \\ u(t) &= \sum_{\binom{m_1+m_2=m}{m=1}}^{\infty} M_u^{(m_1,m_2)}(t) c_1^{m_1} c_2^{m_2} e^{(m_1\beta_1+m_2\beta_2)t}, \end{aligned} \tag{43}$$

где c_1 и c_2 – произвольные постоянные; m_1 и m_2 – натуральные числа, или нули. Функции $M_\theta^{(m_1,m_2)}(t), M_\varphi^{(m_1,m_2)}(t), M_u^{(m_1,m_2)}(t)$ имеют неотрицательные характеристичные числа. Ряды (43) сходятся абсолютно и $\theta(t) \to 0,\ \varphi(t) \to \to -\frac{\pi}{4},\ u(t) \to 0$ при $t \to 0$.

При $\mu_0 < 0,\ B_{33} < 0$ и выполнении неравенства (41) оба корня β_1 и β_2 положительны и линейная система (36) имеет отрицательные характеристичные числа. В этом случае первый метод Ляпунова не дает асимптотических решений системы (31)–(33).

Если дискриминант Δ из (39) отрицателен, что возможно при наличии неравенства $\mu_0 < 0$, то корни (39) комплексные. В силу (40) положительными характеристичные числа системы (36) будут при условии $B_{33} > 0$. Тогда опять нелинейная система (31)–(33) будет допускать решение в виде рядов Ляпунова, которые формально можно получить путем замены в формулах (42) величины β_2 на $-a_{22}B_{33}/2$.

Для получения решения исходной системы (1), (2) необходимо подставить выражения (42) или (43) в соотношения (28)–(30) и $L = \dot{\lambda}$. Построенное решение характеризуется линейным инвариантным соотношением (5).

Заключение. В статье установлены условия существования у уравнений движения гиростата в магнитном поле сил с учетом эффекта Барнетта–Лондона линейного инвариантного соотношения. При этом была принята линейная зависимость гиростатического момента от компонент единичного вектора вертикали. Показано, что при выполнении найденных условий ось, относительно которой задано линейное инвариантное соотношение, ортогональна круговому сечению гирационного эллипсоида. Установлено, что проекция общего гиростатического момента на барицентрическую ось равна нулю. Изучен один класс стационарных решений приведенной системы дифференциальных уравнений и на его основе с помощью первого метода Ляпунова построены асимптотические решения этой системы. Им отвечают два класса асимптотически-равномерных движений гиростата. Первый класс описывается однопараметрическими рядами Ляпунова, а для второго класса ряды Ляпунова зависят от двух произвольных постоянных.

1. *Liouville J.* Developpements sur un chapitre de la Mecanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1–25.
2. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.
3. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. – Собр. соч. М.;Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 2. – С. 152-309.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.
5. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Там же. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
6. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
7. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
8. *Волкова О.С.* О движениях гиростата, характеризующихся линейными по компонентам угловой скорости инвариантными соотношениями // Там же. – 2011. – Вып. 41. – С. 39-50.
9. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Там же. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
10. *Мазнев А.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Там же. – Донецк. – 2011. – Вып. 41. – С. 51-60.
11. *Мазнев А.В.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Вісн. Одеського нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2011. – **16**, вип. 16. – С. 158–165.
12. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О движении симметричного гиростата с переменным гиростатическим моментом в двух задачах динамики // Нелинейная динамика. – Ижевск, 2012. – **8**, № 2. – С. 369–376.
13. *Урман Ю.М.* Динамические эффекты, обусловленные вращательным движением сверхпроводника в магнитном подвесе // Докл. АН СССР. – 1984. – **276**, № 6. – С. 1402–1404.

14. *Barnett S.I.* Gyromagnetic and Electron-Inertia Effects // Rev. Modern Phys. – 1935. – **7**(2). – P. 129–166.
15. *London F.* Superfluids. – New-York: Weley, 1950. – 372 p.
16. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
17. *Скрыпник С.В., Щетинина Е.К.* О трех инвариантных соотношениях уравнений движения симметричного гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 61-67.
18. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Собр. соч. в 5 т. – М.;Л.: Изд-во СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7–263.
19. *Hess W.* Uber die Eulerchen Bewegungsgleichungen und uber eine neue partikulare Losung des Problems der Bewegung eines starren schweren Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann.– 1890. – B. 37, H. 2. – S. 153–181.

A.V. Maznev

Linear invariant relation for equations of motion of a gyrostat with variable gyrostatic moment in the magnetic field

The author studies equations of motion of a heavy gyrostat in the magnetic field in the presence of Barnet-London effect. Existence conditions are obtained for one invariant relation, linear in the state variables (they are the components of the angular velocity vector and the components of the vertical unit vector in the body axis). It is shown that, under these conditions, the axis determined by the linear invariant relation is orthogonal to the circular cross-section of the gyratory ellipsoid. Asymptotically steady motions of the gyrostat relative to the vertical line are obtained in the case, when the gyrostatic moment depends on time.

Keywords: *gyrostat, gyrostatic moment, invariant relation, magnetic field.*

О.В. Мазнєв

Лінійне інваріантне співвідношення рівнянь руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом у магнітному полі

Встановлено умови існування лінійного інваріантного співвідношення для рівнянь руху гіростата у магнітному полі з урахуванням ефекту Барнетта–Лондона. Показано, що при виконанні знайдених умов вісь, відносно якої задано лінійне інваріантне співвідношення, ортогональна круговому перерізу гіраційного еліпсоїда. За умови, що гіростатичний момент залежить від часу, знайдено асимптотично-рівномірні рухи гіростата відносно вертикалі.

Ключові слова: *гіростат, гіростатичний момент, інваріантне співвідношення, магнітне поле.*

Донецкий национальный ун-т

Получено 01.10.12

maznev_av@rambler.ru