

УДК 531.38

©2012. И.Н. Гашененко, Г.В. Мозалевская, Д.Н. Ткаченко

## ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ХАРЛАМОВОЙ–МОЗАЛЕВСКОЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

Получены необходимые и достаточные условия существования семейства степенных решений уравнений движения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки. Рассматриваемое решение, в соответствии с результатами [1], описывается алгебраическими инвариантными соотношениями и дополнительной гиперэллиптической квадратурой. Выполнена классификация возможных движений гиростата. Исследованы случаи вырождения гиперэллиптической квадратуры в эллиптическую.

**Ключевые слова:** гириостат с неподвижной точкой, дифференциальные уравнения движения, частное решение, алгебраические инвариантные соотношения.

**Введение.** Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает движение тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки:

$$A\dot{\omega} = (A\omega + \lambda) \times \omega + \mu(\mathbf{r} \times \gamma), \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (1)$$

где  $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$  – тензор инерции,  $\omega$  – угловая скорость тела-носителя в подвижных осях,  $\gamma$  – единичный вектор вертикали,  $\lambda$  – постоянный гириостатический момент,  $\mu$  – вес гириостата,  $\mathbf{r}$  – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс гириостата.

Уравнения (1) допускают три первых интеграла:

$$\frac{1}{2} A\omega \cdot \omega - \mu \mathbf{r} \cdot \gamma = h, \quad (A\omega + \lambda) \cdot \gamma = g, \quad \gamma \cdot \gamma = 1. \quad (2)$$

В [2] показано, что при ограничениях

$$A_2 \neq A_3, \quad \mathbf{r} = (r_1, 0, 0), \quad \lambda = (\lambda_1, 0, 0) \quad (3)$$

уравнения (1) могут быть записаны в виде системы уравнений Н. Ковалевского [3]:

$$\begin{aligned} f_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + a_1 + a_2 \sigma + (a_3 p + a_0) \tau' + a_4 \tau + a_5 p^2 + 2a_0 p = 0, \\ f_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \sigma \tau'' + \frac{1}{2} \sigma' \tau' + b_1 + b_2 \sigma + (b_3 p - b_0) \sigma' + b_4 \tau + b_5 p^2 + 2b_0 p = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $p \equiv \omega_1$  – независимая переменная,  $' \stackrel{\text{def}}{=} d/dp$ , зависимыми переменными являются

$$\sigma = \frac{(A_2 - A_3) \omega_2^2}{A_1}, \quad \tau = \frac{(A_2 - A_3) \omega_3^2}{A_1}.$$

Коэффициенты  $a_i, b_i$  суть рациональные функции параметров  $A_1, A_2, A_3, \lambda_1$  и постоянной интеграла энергии  $h$  :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\lambda_1}{A_2}, \quad a_1 = -\frac{2h}{A_2}, \quad a_2 = b_4 = \frac{A_1}{A_2 - A_3}, \quad a_3 = \frac{A_1 - 2A_3}{A_2}, \\ a_4 &= \frac{2(A_1 - A_3)}{A_2} + \frac{A_1 A_3}{A_2(A_2 - A_3)}, \quad a_5 = \frac{3A_1 - 2A_2}{A_2}, \quad b_0 = \frac{\lambda_1}{A_3}, \quad b_1 = -\frac{2h}{A_3}, \\ b_2 &= \frac{2(A_2 - A_1)}{A_3} + \frac{A_1 A_2}{A_3(A_2 - A_3)}, \quad b_3 = \frac{2A_2 - A_1}{A_3}, \quad b_5 = \frac{3A_1 - 2A_3}{A_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения (4) имеют симметрию

$$(p, \sigma, \tau, A_1, A_2, A_3, \lambda_1, h) \rightarrow (\bar{p}, -\bar{\tau}, -\bar{\sigma}, \bar{A}_1, \bar{A}_3, \bar{A}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{h}). \quad (6)$$

Система уравнений (4) имеет два первых интеграла [4], которые следуют из (2):

$$\begin{aligned} f_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \tau \sigma' - \sigma \tau' + c_0 + (a_1 - b_1)p - (b_3p - b_0)\sigma + (a_3p + a_0)\tau + \\ &\quad + \frac{1}{3}(a_5 - b_5)p^3 + (a_0 - b_0)p^2 = 0, \\ f_4 &\stackrel{\text{def}}{=} d_1\tau(\sigma')^2 + \sigma(\tau')^2 + d_0 + (d_2p + d_3)\tau\sigma' + d_4\sigma^2 + (d_5p + d_6)\sigma\tau' + \\ &\quad + (d_7\tau + d_8p^2 + d_9p + d_{10})\sigma + d_{11}\tau^2 + (d_{12}p^2 + d_{13}p + d_{14})\tau + \\ &\quad + d_{15}p^4 + d_{16}p^2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Нахождение интегрируемых случаев и частных решений уравнений движения тела вокруг неподвижной точки составляет основу классических исследований по динамике твердого тела. П.В. Харламов в работе [2] выписал условия существования полиномиальных решений уравнений (4) и нашел два новых решения, которые обобщают решения В.А. Стеклова и Н. Ковалевского. Новые возможности для изучения уравнений движения твердого тела открывает степенная геометрия. Разработанные А.Д. Брюно общие методы и алгоритмы степенной геометрии получили успешное применение в вычислениях степенных, степенно-логарифмических и более сложных разложений решений систем дифференциальных уравнений Н. Ковалевского. В работах А.Д. Брюно и его учеников при отсутствии гиросtatического момента ( $\lambda = 0$ ) были вычислены все степенные асимптотики и степенные разложения этой системы в случаях, когда независимая переменная  $p$  стремилась к нулю, к бесконечности и к отличной от нуля и бесконечности константе [5, 6]. В [7] были найдены все точные решения системы Н. Ковалевского, представляемые конечными суммами рациональных степеней переменной  $p$ . Аналогичная проблема нахождения степенных асимптотик и степенных разложений системы уравнений (4), описывающих движение гиростата, частично решена в [8].

Несколько семейств частных решений уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки было получено в результате систематического исследования интегродифференциального уравнения Е.И. Харламовой. Подробное

описание этих решений можно найти в [9]. Так, например, интегрируемость интегродифференциального уравнения при условиях (3) и дополнительном ограничении

$$4(A_1 - 2A_2)(A_1 - 2A_3) + A_2A_3 = 0 \quad (8)$$

в классе тригонометрических и экспоненциальных полиномов была доказана в [1, 10]. В случае, когда главные моменты инерции гиростата (системы “тело-носитель+ротор”) удовлетворяют неравенствам треугольника

$$A_1 + A_2 > A_3, \quad A_2 + A_3 > A_1, \quad A_3 + A_1 > A_2, \quad (9)$$

в [1] показано, что решения в виде тригонометрических полиномов с двумя гармониками могут существовать при условиях

$$\frac{A_3}{A_1} \in \left( \frac{17 - \sqrt{17}}{34}, \frac{4}{9} \right] \cup \left[ 0.4458, \frac{\sqrt{273} - 1}{34} \right) \cup \left( \frac{17 + \sqrt{17}}{34}, \frac{2}{3} \right] \cup [0.6875, 1). \quad (10)$$

Имеющее механический смысл частное решение интегродифференциального уравнения с инвариантным соотношением в виде экспоненциального полинома с показателем  $n = 2$ , как указано в [10], существует при выполнении условия

$$1 < \frac{A_3}{A_1} < \frac{33 + \sqrt{273}}{34} \approx 1.456550342408.$$

Кинематическое представление движения гиростата в рассматриваемом случае интегрируемости обсуждалось в [11], при этом для построения аксоидов использовались компьютерные программы, разработанные А.П. Харламовым.

В данной работе мы укажем необходимые и достаточные условия существования найденного в [1, 10] семейства частных решений уравнений (1) движения тяжелого гиростата, распределение масс которого подчинено ограничениям (3), (8), (9).

### 1. Семейства точных решений уравнений движения гиростата.

Свяжем главные моменты инерции соотношением (8). При этом ограничении найдем нетривиальные решения следующей проблемы.

*ЗАДАЧА. Для системы уравнений (4) найти условия существования решений вида*

$$p = v^2 + p_0, \quad \sigma = \sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2 + \sigma_1 v + \sigma_0, \quad \tau = \tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0,$$

где константы  $p_0, \sigma_i, \tau_i \in \mathbb{R}$ , и построить соответствующие этим условиям действительные точные решения исходной системы уравнений (1).

В дифференциальных уравнениях (4) сделаем замену независимой переменной  $p$ , полагая  $p = v^2 + p_0$ :

$$\tilde{f}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \tau \frac{d^2 \sigma}{dv^2} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dv} \frac{d\tau}{dv} - \frac{\tau}{v} \frac{d\sigma}{dv} + 2a_3 v^3 \frac{d\tau}{dv} + 2(a_3 p_0 + a_0) v \frac{d\tau}{dv} + 4(a_2 \sigma + a_4 \tau) v^2 +$$

$$+4(a_5p_0^2 + 2a_0p_0 + a_1)v^2 + 8(a_5p_0 + a_0)v^4 + 4a_5v^6 = 0,$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2 \stackrel{\text{def}}{=} & \sigma \frac{d^2\tau}{dv^2} + \frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dv} \frac{d\tau}{dv} - \frac{\sigma}{v} \frac{d\tau}{dv} + 2b_3v^3 \frac{d\sigma}{dv} + 2(b_3p_0 - b_0)v \frac{d\sigma}{dv} + 4(b_2\sigma + b_4\tau)v^2 + \\ & + 4(b_5p_0^2 + 2b_0p_0 + b_1)v^2 + 8(b_5p_0 + b_0)v^4 + 4b_5v^6 = 0. \end{aligned}$$

Подстановкой выражений  $\sigma(v), \tau(v)$  в (4) найдем коэффициенты  $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$ .

Введем безразмерные параметры  $u = A_3/A_1$ ,  $\eta = \lambda_1/A_3$ . Отождествлением коэффициентов при одинаковых степенях  $v$  получим уравнение

$$\begin{aligned} P_7(u)(3u - 2)^2(17u - 8)^4(2u - 1)^6\tau_3^4 - 4P_9(u)(u - 1)(5u - 2)(3u - 2) \times \\ \times (9u - 4)(17u - 8)^2(2u - 1)^3\tau_3^2\eta + 8P_{10}(u)(9u - 4)^2(u - 1)^2(5u - 2)^3\eta^2 = 0, \end{aligned}$$

из которого находим

$$\eta = \frac{(P_9(u) + \eta_1)(2u - 1)^3(17u - 8)^2(3u - 2)\tau_3^2}{4(u - 1)(9u - 4)(5u - 2)^2P_{10}(u)}. \quad (11)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_7 = & 437511u^7 - 1822945u^6 + 3227896u^5 - 3146990u^4 + 1823596u^3 - \\ & - 627920u^2 + 118960u - 9568, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_9 = & 7378782u^9 - 38152199u^8 + 87579879u^7 - 117006116u^6 + 100150840u^5 - \\ & - 56902736u^4 + 21444880u^3 - 5166528u^2 + 721792u - 44544, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{10} = & 8282451u^{10} - 47358124u^9 + 123147463u^8 - 191234850u^7 + 195844936u^6 - \\ & - 137850832u^5 + 67386864u^4 - 22548256u^3 + 4935424u^2 - 637440u + 36864, \end{aligned}$$

$$\eta_1^2 = 9(9u - 4)(17u^2 - 16u + 4)(3u - 2)^3P_{12}(u), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_{12} = & 489786966u^{12} - 3461790042u^{11} + 11106903321u^{10} - 21397924514u^9 + \\ & + 27581425551u^8 - 25070927914u^7 + 16486715988u^6 - 7906718280u^5 + \\ & + 2745862848u^4 - 673729408u^3 + 110908800u^2 - 11002880u + 497664. \end{aligned}$$

Параметр  $u$  будем считать основным. Величина  $\eta_1$  выражается через  $u$  и, с учетом (12), может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Переменные исходной системы (1) записываются как функции  $v$

следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= v^2 + p_0, \quad \omega_2^2 = \frac{8 - 17u}{17u^2 - 16u + 4} (\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2) v^2, \\
 \omega_3^2 &= \frac{8 - 17u}{17u^2 - 16u + 4} (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0), \\
 \gamma_1 \xi &= -\frac{2(2u - 1)}{u(17u^2 - 16u + 4)} (\sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2) + \frac{1}{2u} (v^2 + p_0)^2 - \\
 &\quad - \frac{17u - 8}{2(17u^2 - 16u + 4)} (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0) - \frac{h}{A_3}, \\
 \gamma_2 \xi &= \omega_2 \left( \frac{1}{4v} (4\tau_4 v^3 + 3\tau_3 v^2 + 2\tau_2 v + \tau_1) - \frac{9u - 4}{(17u - 8)u} (v^2 + p_0) - \eta \right), \\
 \gamma_3 \xi &= -\omega_3 \left( \frac{2u - 1}{(17u - 8)u} (4\sigma_4 v^2 + 3\sigma_3 v + 2\sigma_2) + \frac{1 - u}{u} (v^2 + p_0) + \eta \right).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Кроме того, переменные  $v, t$  связаны соотношением  $\int 2v dv / \sqrt{\sigma\tau} = t + \text{const.}$  По формулам (13) решения системы (4) можно преобразовать в решения уравнений (1).

Множество действительных движений гиростата определяется набором следующих условий: положительность произведения

$$\sigma\tau = v^2(\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2)(\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0)$$

при некоторых значениях  $v \in \mathbb{R}$ ; положительность правой части равенства (12) при некоторых значениях параметра  $u > 0$  и выполнение геометрического тождества

$$\gamma_1^2(v) + \gamma_2^2(v) + \gamma_3^2(v) = 1.$$

Полный анализ этих условий потребовал, в частности, вычисления дискриминантов полиномов второй и четвертой степени от  $v$  в виде рациональных функций от  $u, \eta_1$ . Выражения, полученные в результате компьютерных вычислений, не будем приводить здесь из-за их громоздкости. При этом заметим, что с учетом принятых обозначений можно записать все условия вещественности решений в виде неравенств, связывающих переменные  $u, \eta_1$ :

$$C_1^i(u)\eta_1 + C_2^i(u) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{14}$$

В данной задаче число  $m$  не превосходит семи. Привлечение зависимости (12) позволяет записать ограничения на  $u$  в терминах корней полиномов с целыми коэффициентами. Изучение неравенств (14) проведено в общем виде. В случае (9) результаты исследования взаимного расположения корней полученных полиномов представлены в табл. 1. Рассматриваемого вида решения уравнений (4) существуют в случае, когда  $u \in \bigcup_{i=1}^{12} (u_1^i, u_2^i)$ . При этом  $n = n_1 + n_2$  – число действительных корней полинома

$$V_6(v) = (\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0)(\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2).$$

Таблица 1. Интервалы вещественности решений.

$i$	$u_1^i$	$u_2^i$	$n$	$n_1$	$n_2$	$\tau_4/ \tau_4 $	$\sigma_4/ \sigma_4 $
1	0.378732187482	0.405702942358	4	2	2	-1	-1
2	0.407610887732	0.413171328943	4	2	2	-1	-1
3	0.413171328943	0.421417076192	6	4	2	-1	-1
4	0.421417076192	0.423374638620	4	2	2	-1	-1
5	0.445814591946	0.456550342408	4	2	2	1	-1
6	0.621267812518	0.665060968794	6	4	2	1	1
7	0.665060968794	0.666666666667	4	2	2	1	1
8	0.687566930488	0.810825343356	4	2	2	1	1
9	1	1.024213605612	2	2	0	1	-1
10	1.029716579927	1.101359473321	2	2	0	1	-1
11	0.445814591946	0.445815604395	4	2	2	1	-1
12	1	1.456550342408	2	2	0	1	-1

Строки 1-10 в таблице соответствуют неравенству  $\eta_1 > 0$ , строки 11,12 – неравенству  $\eta_1 < 0$ . Зависимость  $v$  от времени задана дифференциальным уравнением  $\dot{v}^2 = V_6(v)$ , которое интегрируется посредством одной гиперэллиптической квадратуры. Если  $u$  принимает значение  $u_3^1 = 2/5$ , либо  $u_2^7 = 2/3$ , то полином  $V_6(v)$  содержит только четные степени. При этом гиперэллиптическая квадратура вырождается в эллиптическую. Можно показать, что в этом случае решение [1] сводится к одному из решений П.В. Харламова [2].

**2. Классификация движений гиростата.** Для классификации возможных движений гиростата введем следующие обозначения:

$$u_3^2 \approx 0.407868390959, u_3^5 \approx 0.446351051086, u_4^5 \approx 0.447573799631,$$

$$u_5^5 \approx 0.456018242880, u_3^6 \approx 0.665043108290, u_3^8 \approx 0.691087581606.$$

Обозначим через  $v_i^*$ ,  $v_i$  действительные корни уравнений  $\sigma_4 v^2 + \sigma_3 v + \sigma_2 = 0$ ,  $\tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0 = 0$  соответственно. Тогда допустимые интервалы изменения переменной  $v$  зависят от значений параметра  $u$ :

- 1)  $u \in (u_1^1, u_3^1) \cup (u_3^8, u_2^8)$ :  $-\infty < v_2 < v_2^* \leq v \leq v_1 < v_1^* < \infty$ ;
- 2)  $u \in (u_3^1, u_2^1) \cup (u_1^2, u_2^2)$ :  $-\infty < v_2^* < v_2 \leq v \leq v_1 < v_1^* < \infty$ ;
- 3)  $u \in (u_3^2, u_2^2) \cup (u_1^4, u_2^4)$ :  $-\infty < v_2^* < v_2 \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty$ ;
- 4)  $u \in (u_1^3, u_2^3)$ :  $-\infty < v_2^* < v_4 \leq v \leq v_3 < v_2 \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty$ ;
- 5)  $u \in (u_1^5, u_3^5) \cup (u_4^5, u_5^5) \cup (u_1^{11}, u_2^{11})$ :  $-\infty < v_2^* \leq v \leq v_2 < v_1^* < v_1 < \infty$ ;
- 6)  $u \in (u_3^5, u_4^5) \cup (u_5^5, u_2^5)$ :  $-\infty < v_2^* \leq v \leq v_2 < v_1 \leq v \leq v_1^* < \infty$ ;
- 7)  $u \in (u_1^6, u_3^6)$ :  $-\infty < v_4 < v_2^* \leq v \leq v_3 < v_2 \leq v \leq v_1 < v_1^* < \infty$ ;
- 8)  $u \in (u_3^6, u_2^6)$ :  $-\infty < v_4 < v_2^* \leq v \leq v_3 < v_2 \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty$ ;

$$9) u \in (u_1^7, u_2^7) \cup (u_1^8, u_3^8) : -\infty < v_2 < v_2^* \leq v \leq v_1^* < v_1 < \infty;$$

$$10) u \in (u_1^9, u_2^9) \cup (u_1^{10}, u_2^{10}) \cup (u_1^{12}, u_2^{12}) : -\infty < v_2 \leq v \leq v_1 < \infty.$$

Граничные значения  $u_i^j$  соответствуют различным случаям вырождения рассматриваемого решения Харламовой–Мозалевской. В частности, значения

$$u_2^1, u_1^2, u_2^4, u_1^8, u_2^8, u_2^9, u_1^{10}, u_2^{10}, u_2^{11}$$

соответствуют случаям вырождения периодического решения в устойчивое равномерное вращение тела-носителя вокруг неподвижной вертикальной оси. Для значений

$$u_2^2 = u_1^3, u_2^3 = u_1^4, u_3^5, u_4^5, u_5^5$$

вид решения зависит от начального значения переменной  $v$ : либо решение является периодическим, либо стационарным, которое соответствует устойчивому равномерному вращению тела-носителя вокруг вертикали. Наконец, для значений

$$u_3^6, u_2^6 = u_1^7, u_3^8$$

решение, в зависимости от начального значения переменной  $v$ , либо является стационарным, либо асимптотически к нему стремится при  $t \rightarrow \pm\infty$ . В этом случае решение описывает неустойчивое движение, совершаемое гиростатом при возмущении его равномерного вращения.

При условиях (3), (8), (9) уравнения (1) имеют решения, соответствующие соотношениям  $\sigma = \sigma_4 v^4 + \sigma_3 v^3 + \sigma_2 v^2$ ,  $\tau = \tau_4 v^4 + \tau_3 v^3 + \tau_2 v^2 + \tau_1 v + \tau_0$ , тогда и только тогда, когда

$$u \in (u_1^1, u_2^1) \cup [u_1^2, u_2^4] \cup [u_1^5, u_2^5] \cup (u_1^6, u_2^7] \cup [u_1^8, u_2^8] \cup (u_1^{12}, u_2^{12}).$$

Нулевые значения переменной  $\eta$  соответствуют двум корням уравнения  $P_7(u) = 0$ :

$$u_4^2 \approx 0.411904566532, \quad u_4^8 \approx 0.708186361169,$$

в этом случае решение [1] сводится к двум частным решениям уравнений Эйлера–Пуассона, полученным Б.И. Коносевицем и Е.В. Поздняковичем [12].

В качестве геометрической иллюстрации изучаемых движений гиростата вокруг неподвижной точки на рис. 1 показаны возможные положения подвижного и неподвижного аксоидов угловой скорости. Периодические движения аксоидов, представленные на рис. 1, а, б, были отмечены А.П. Харламовым. На рис. 1, в, г показаны случаи вырождения частного решения [1] в решение П.В. Харламова [2]. Параметры гиростата при этом таковы:

$$a) u = 1.03454, A_1 = 0.9666, A_2 = 0.431, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = 1.0117;$$

$$б) u = 1.03023, A_1 = 0.9707, A_2 = 0.433, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = 1.0707;$$

$$в) u = 0.4, A_1 = 2.5, A_2 = 1.6667, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = 0.54;$$

$$г) u = 0.66667, A_1 = 1.5, A_2 = 0.6, A_3 = 1, r_1 = 1, \lambda_1 = -0.42.$$

Положение центра тяжести гири отмечено точкой на главной оси инерции, вдоль этой же оси направлен вектор гири статического момента. Подвижный годограф угловой скорости катится по неподвижному без скольжения.

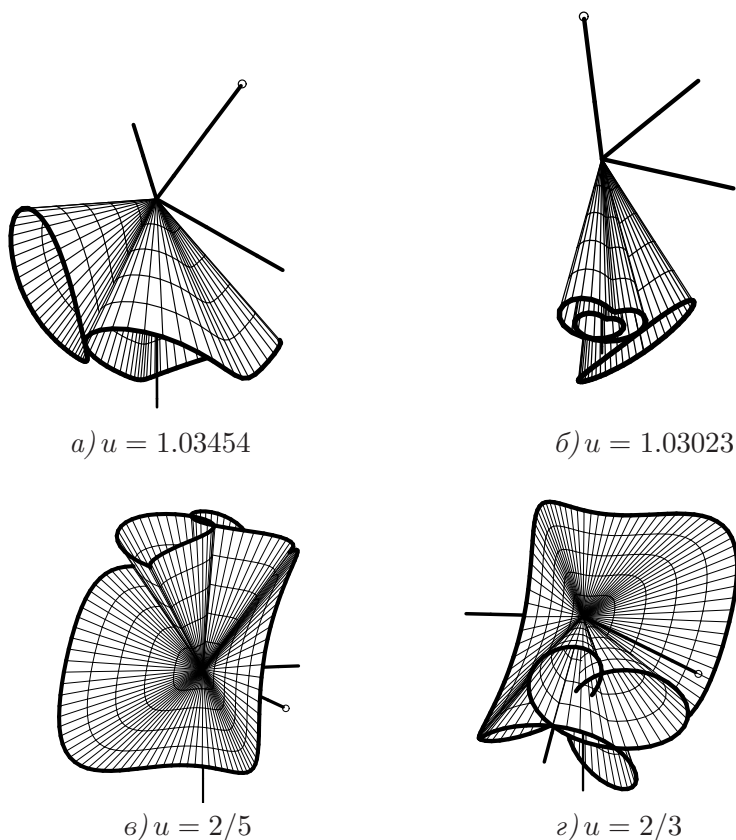


Рис. 1. Качение аксидов угловой скорости.

1. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Два новых решения задачи о движении тяжелого гири статата // *Механика твердого тела*. – 1983. – Вып. 15. – С. 61–75.
2. Харламов П.В. Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // *Прикл. математика и механика*. – 1963. – **20**, вып. 1. – С. 26–34.
3. Kowalewski N. Eine neue partikuläre Lösung der Differentialgleichungen der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt // *Math. Ann.* – 1908. – **65**. – S. 528–537.
4. Гашененко И.Н., Мозалевская Г.В., Харламова Е.И. О редукции уравнений движения гири статата // *Механика твердого тела*. – 2008. – Вып. 38. – С. 3–19.
5. Брюно А.Д. Анализ уравнений Эйлера–Пуассона методами степенной геометрии и нормальной формы // *Прикл. математика и механика*. – 2007. – **71**, вып. 2. – С. 192–227.



6. Арансон А.Б., Брюно А.Д. Степенные разложения сдвинутых решений системы Н. Ковалевского. – М., 2010. – 32 с. – (Препринт /Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша РАН, № 48).
7. Брюно А.Д., Гашененко И.Н. Простые точные решения уравнений Н. Ковалевского // Докл. РАН. – 2006. – **409**, № 4. – С. 439–442.
8. Гашененко И.Н., Ткаченко Д.Н. Степенные разложения решений уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 11–26.
9. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Интегродифференциальное уравнение динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1986. – 296 с.
10. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Новое решение задачи о движении тяжелого гиростата // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 3–16.
11. Харламова Е.И., Мозалевская Г.В. Движение тяжелого гиростата в одном из случаев интегрируемости // VIII Междунар. конф. “Устойчивость, управление и динамика твердого тела” (3–7 сентября 2002 г., Донецк): Тез. докл. – Донецк: ИПММ НАНУ, 2002. – С. 80–81.
12. Коносевиц Б.И., Позднякович Е.В. Два частных решения задачи о движениях тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. матем. и механика. – 1968. – **32**, вып. 3. – С. 544–548.

I.N. Gashenenko, G.V. Mozalevskaya, D.N. Tkachenko

### On the Kharlamova–Mozalevskaya solution of the equations of motion of a gyrostat

Necessary and sufficient conditions for the existence of the family of power solutions of equations of motion of a heavy gyrostat about a fixed point are obtained. This exact solution, in accordance with the results of [1], is described by algebraic invariant relations and one additional hyperelliptic quadrature. The possible motions of the gyrostat are classified. The cases of degeneration of hyperelliptic quadrature to elliptical one are studied.

**Keywords:** *gyrostat with a fixed point, differential equations of motion, particular solution, algebraic invariant relations.*

I.M. Гашененко, Г.В. Мозалевська, Д.М. Ткаченко

### Про один розв'язок Харламової–Мозалевської рівнянь руху гіростата

Отримано необхідні і достатні умови існування сім'ї степеневих розв'язків рівнянь руху важкого гіростата навколо нерухомої точки. Розглянутий розв'язок, відповідно до результатів [1], описується алгебраїчними інваріантними співвідношеннями і додатковою гіпереліптичною квадратурою. Виконано класифікацію можливих рухів гіростата. Досліджено випадки виродження гіпереліптичної квадратури в еліптичну.

**Ключові слова:** *гіростат з нерухомою точкою, диференціальні рівняння руху, частинний розв'язок, алгебраїчні інваріантні співвідношення.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк  
applmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 03.09.12