

УДК 531.38

©2012. И.Н. Гашененко

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ ГЕССА

Изучены условия существования периодических движений гироскопа Гесса вокруг неподвижной точки. Исследованы зависящие от параметров отношения частот квазипериодического движения твердого тела, подчиненного условиям Гесса. Выполнена классификация неподвижных годографов угловой скорости. Рассмотрены прецессии тела вокруг вертикали. Предложена кинематическая интерпретация прецессионных движений, в соответствии с которой движение гироскопа Гесса представляется качением конуса по неподвижной горизонтальной плоскости.

Ключевые слова: динамика твердого тела, случай Лагранжа, случай Гесса, периодические движения, функция вращения, прецессия.

Введение. Движение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки описывается уравнениями Эйлера–Пуассона

$$A\dot{\omega} = A\omega \times \omega + \mu\mathbf{r} \times \gamma, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (1)$$

где $A = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – тензор инерции тела в неподвижной точке, ω – угловая скорость тела, γ – орт вертикали, μ – вес тела, \mathbf{r} – радиус-вектор центра масс.

Уравнения (1) имеют три первых интеграла

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} A\omega \cdot \omega - \mu\mathbf{r} \cdot \gamma = h, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} A\omega \cdot \gamma = g, \quad I \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \cdot \gamma = 1. \quad (2)$$

Стандартным преобразованием перейдем к безразмерным переменным, полагая при этом $\mu = 1$, $|\mathbf{r}| = 1$.

Случай Гесса [1] характеризуют условия

$$r_1\sqrt{A_1(A_3 - A_2)} = r_2\sqrt{A_2(A_1 - A_3)}, \quad r_3 = 0, \quad A_1 > A_3 > A_2. \quad (3)$$

Уравнения (1) при ограничениях (3) допускают линейное инвариантное соотношение Гесса

$$A_1\omega_1r_1 + A_2\omega_2r_2 = 0. \quad (4)$$

Достаточно полное аналитическое исследование уравнений (1) движения твердого тела, подчиненного условиям (3), выполнено П.А. Некрасовым [2,3]. Некоторые результаты работ [1, 2] впоследствии были повторены Р. Лиувиллем [4]. Важные свойства движения тела отмечены Н.Е. Жуковским, С.А. Чаплыгиным, Б.К. Млодзеевским и П.А. Некрасовым. Полный качественный анализ фазовых траекторий решения Гесса выполнен А.М. Ковалевым [5]. Основанная на результатах [5] детальная классификация подвижных годографов вектора кинетического момента предложена в [6]. В [7] методом годографов дано кинематическое истолкование движения гироскопа Гесса. В настоящей работе мы развиваем эти исследования.

1. Периодические движения волчка Лагранжа в случае $\omega_3 = 0$. Волчком Лагранжа называют закрепленное в неподвижной точке O твердое тело, у которого эллипсоид инерции в O есть эллипсоид вращения и центр масс лежит на оси вращения:

$$A_1 = A_2 = 1, \quad A_3 = c \in (0, 2), \quad r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = 1. \quad (5)$$

Система (1) при условиях (5) имеет дополнительный интеграл Лагранжа

$$\omega_3 = \omega_0 \equiv \text{const}. \quad (6)$$

В качестве обобщенных координат выберем углы Эйлера, полагая

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sin \vartheta \sin \varphi, & \gamma_2 &= \sin \vartheta \cos \varphi, & \gamma_3 &= \cos \vartheta, \\ \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, & \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда задача интегрирования системы уравнений (1) сводится к квадратурам

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_3^2 &= [2\gamma_3 + 2h - c\omega_0^2](1 - \gamma_3^2) - (g - c\omega_0\gamma_3)^2, \\ \dot{\psi} &= \frac{g - c\omega_0\gamma_3}{1 - \gamma_3^2}, \quad \dot{\varphi} = \omega_0 - \frac{(g - c\omega_0\gamma_3)\gamma_3}{1 - \gamma_3^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как следует из результатов [8, 9], частоты движения волчка Лагранжа могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \omega_\vartheta &= \frac{\pi}{K(k)} \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{2}}, \\ \omega_\psi &= \frac{1}{2K(k)} \left[\frac{g - c\omega_0}{1 - u_3} \Pi \left(\frac{u_2 - u_3}{1 - u_3}, k \right) + \frac{g + c\omega_0}{1 + u_3} \Pi \left(\frac{u_3 - u_2}{1 + u_3}, k \right) \right], \\ \omega_\varphi &= \frac{1}{2K(k)} \left[\frac{g - c\omega_0}{1 - u_3} \Pi \left(\frac{u_2 - u_3}{1 - u_3}, k \right) - \frac{g + c\omega_0}{1 + u_3} \Pi \left(\frac{u_3 - u_2}{1 + u_3}, k \right) \right] + \\ &+ (c - 1)\omega_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где u_1, u_2, u_3 – действительные корни полинома

$$f(u) \stackrel{\text{def}}{=} [2u + 2h - c\omega_0^2](1 - u^2) - (g - c\omega_0u)^2.$$

Кроме того, в выражениях (9) использованы следующие обозначения:

$$u_1 < -1 < u_2 < u_3 < 1, \quad k = \sqrt{\frac{u_2 - u_3}{u_1 - u_3}},$$

$K(k), \Pi(\nu, k)$ – полные эллиптические интегралы первого и третьего рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \Pi(\nu, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \nu \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Угол нутации ϑ оси волчка, несущей центр масс, меняется периодически ($T_{\vartheta} = 2\sqrt{2}K(k)/\sqrt{u_3 - u_1}$) между двумя предельными значениями ϑ_* , ϑ^* ($\cos \vartheta_* = u_2$, $\cos \vartheta^* = u_3$).

Кинематические свойства движения волчка удобно изучать методом годографов [10]. Найдем компоненты Ω_{ξ} , Ω_{η} , Ω_{ζ} вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в неподвижном базисе. Положим $\Omega_{\xi} = \Omega_{\rho} \cos \alpha$, $\Omega_{\eta} = \Omega_{\rho} \sin \alpha$, тогда

$$\Omega_{\zeta} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad \Omega_{\rho}^2 = |\boldsymbol{\omega}|^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\gamma})^2,$$

$$\Omega_{\rho}^2 \dot{\alpha} = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}.$$

Если $(1 - c)\omega_0 \neq 0$, то неподвижный годограф, как заметил еще Ж.-Г. Дарбу, принадлежит сфере

$$(\Omega_{\zeta} - l)^2 + \Omega_{\eta}^2 + \Omega_{\xi}^2 = R^2, \quad (10)$$

где

$$l = \frac{1}{(1 - c)\omega_0}, \quad R^2 = 2h - \frac{2g}{(1 - c)\omega_0} + (1 - c)\omega_0^2 + \frac{1}{(1 - c)^2\omega_0^2}.$$

Рассмотрим частный случай, когда $\omega_3 = 0$. Тогда интегралы (2) примут вид

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = 2(h + \gamma_3), \quad \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 = g, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \quad (11)$$

Константы интегралов h, g удовлетворяют неравенству

$$16(h^2 - 1)^2 - 8h(h^2 - 9)g^2 - 27g^4 \geq 0. \quad (12)$$

Исследуем отношения частот

$$\mu_1 = \frac{\omega_{\varphi}}{\omega_{\vartheta}}, \quad \mu_2 = \frac{\omega_{\psi}}{\omega_{\vartheta}}.$$

Если числа μ_1, μ_2 рациональны, то существуют периодические движения волчка Лагранжа. Если частоты несоизмеримы, то волчок никогда не возвращается в начальное состояние.

Утверждение 1. Допустимые значения μ_1, μ_2 связаны ограничениями

$$\mu_1 + \mu_2 \geq 1, \quad 3\mu_1^2 + \mu_2^2 \leq 1. \quad (13)$$

Если $u_2 = u_3$, то из равенств $f(u_i) \equiv 2[u_i + h](1 - u_i^2) - g^2 = 0$ найдем

$$u_1 = -(u_3^2 + 1)/(2u_3), \quad h = (1 - 3u_3^2)/(2u_3), \quad g = (1 - u_3^2)/\sqrt{u_3},$$

$$\mu_1 = \frac{u_3}{\sqrt{3u_3^2 + 1}}, \quad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{3u_3^2 + 1}}, \quad \text{где } u_3 \in (0, 1). \quad (14)$$

Таким образом, в случае равенства в (12) отношения частот (14) образуют дугу эллипса (см. второе уравнение (13)). В малой окрестности $(h, g) = (1, 0)$

точки с координатами (μ_1, μ_2) расположены вблизи прямой, заданной уравнением $\mu_1 + \mu_2 = 1$. На плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ линии уровня $\mu_1 = \text{const}$ соединяют соответствующую точку кривой $16(h^2 - 1)^2 - 8h(h^2 - 9)g^2 - 27g^4 = 0$ и точку $(h, g) = (1, 0)$. Аналогичным образом расположены на плоскости $\mathbb{R}^2(h, g)$ линии уровня $\mu_2 = \text{const}$. Заметим, что обстоятельное исследование зависимости величины μ_1 от постоянных ω_0, h, g имеется в работах О.Е. Орел.

Годографы угловой скорости волчка Лагранжа в случае $\omega_0 = 0$ достаточно полно изучены П.В. Харламовым [10, 11]. Подвижный годограф описывается уравнениями

$$\omega_1 = \omega \cos \sigma, \quad \omega_2 = \omega \sin \sigma, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega^2 = 2(h + \gamma_3), \quad \dot{\sigma} = \frac{g}{2(h + \gamma_3)}. \quad (15)$$

Неподвижный годограф является плоской кривой, описываемой уравнениями

$$\Omega_\zeta = g, \quad \Omega_\rho^2 = 2(h - g^2/2 + \gamma_3), \quad \dot{\alpha} = \frac{g\gamma_3}{2(h - g^2/2 + \gamma_3)}. \quad (16)$$

Соответствие между углами α, ψ, ϑ выражается следующими формулами

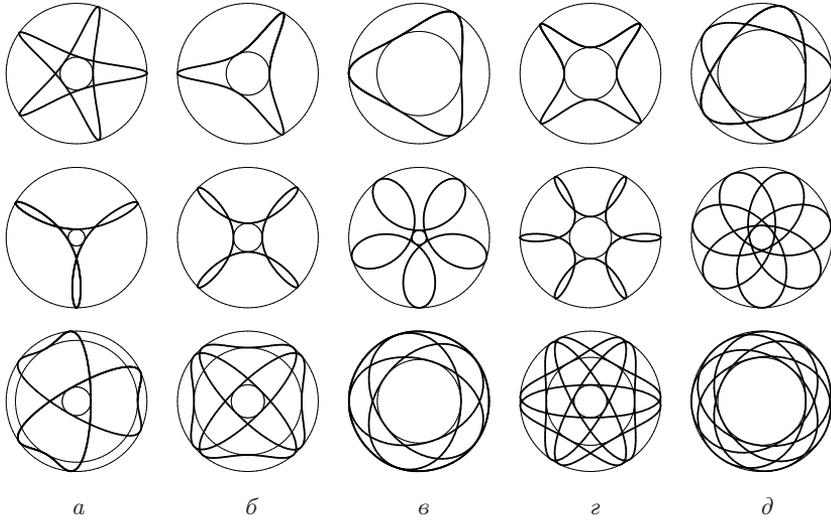


Рис. 1. Случай Лагранжа: годографы угловой скорости и проекции годографов вектора \mathbf{g} на горизонтальную плоскость.

для приращения угла α за период T_ϑ :

$$\Delta\alpha = \begin{cases} 2\pi (\omega_\psi/\omega_\vartheta - 1), & \text{если } h > g^2/2; \\ 2\pi \omega_\psi/\omega_\vartheta, & \text{если } h < g^2/2; \\ 2\pi (\omega_\psi/\omega_\vartheta - 1/2), & \text{если } h = g^2/2. \end{cases} \quad (17)$$

В общем случае годографы угловой скорости – незамкнутые плоские кривые, но параметры и начальные условия движения волчка Лагранжа можно выбрать такими, чтобы частоты движения были кратными. Подвижный годограф замкнут, если $\mu_1 \in \mathbb{Q}$. Неподвижный годограф замкнут, если $\mu_2 \in \mathbb{Q}$. Условия (13) характеризуют число вращения $\varrho = (\omega_\varphi : \omega_\vartheta : \omega_\psi)$ трехчастотного квазипериодического движения. На рис. 1 изображены подвижные годографы угловой скорости (верхний ряд), неподвижные годографы угловой скорости (средний ряд), проекции годографов вектора \mathbf{r} на горизонтальную плоскость (нижний ряд). Расчеты выполнены для $A_1 = A_2 = 4A_3/5$, константы интегралов и определяемые ими отношения частот таковы: а) $h = 0.5828, g = 0.36$ ($\mu_1 = 2/5, \mu_2 = 2/3$); б) $h = 0.814, g = 0.445$ ($\mu_1 = 1/3, \mu_2 = 3/4$); в) $h = 0.6675, g = 1.02$ ($\mu_1 = 1/3, \mu_2 = 4/5$); з) $h = 1.0605, g = 0.47$ ($\mu_1 = 1/4, \mu_2 = 5/6$); д) $h = 0.1487, g = 0.837$ ($\mu_1 = 2/5, \mu_2 = 5/7$). На рис. 2, а-в показаны положения подвижных и неподвижных годографов в фиксированный момент времени для значений параметров, соответствующих рис. 1, в-д. Движение волчка Лагранжа представляется качением плоских кривых (15),(16).

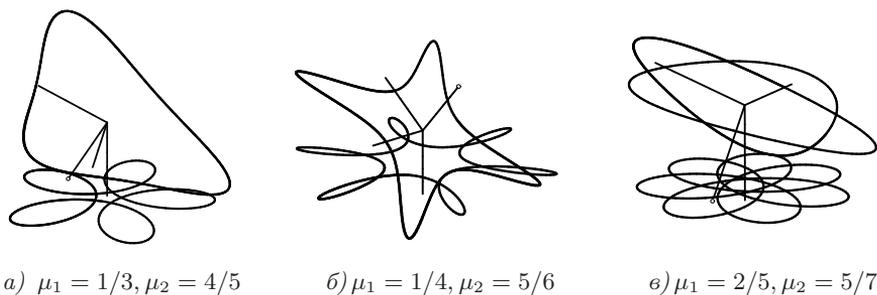


Рис. 2. Качение годографов угловой скорости в случае Лагранжа.

2. Периодические движения твердого тела в случае Гесса. В предположении (3) введем специальные оси, как это было сделано в работах [3–5]:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_1 r_1 + \omega_2 r_2, & \omega_y &= \omega_2 r_1 - \omega_1 r_2, & \omega_z &= \omega_3, \\ \nu_1 &= \gamma_1 r_1 + \gamma_2 r_2, & \nu_2 &= \gamma_2 r_1 - \gamma_1 r_2, & \nu_3 &= \gamma_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда уравнения движения и их первые интегралы примут вид

$$\begin{aligned} \omega_x - b\omega_y &= 0, & \dot{\omega}_y &= \omega_x \omega_z - \frac{1}{A_3} \nu_3, & \dot{\omega}_z &= -\omega_y \omega_x + \frac{1}{A_3} \nu_2, \\ \dot{\nu}_1 &= \nu_2 \omega_z - \nu_3 \omega_y, & \dot{\nu}_2 &= \nu_3 \omega_x - \nu_1 \omega_z, & \dot{\nu}_3 &= \nu_1 \omega_y - \nu_2 \omega_x, \\ \frac{A_3}{2} (\omega_y^2 + \omega_z^2) - \nu_1 &= h, & A_3 (\omega_y \nu_2 + \omega_z \nu_3) &= g, & \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 &= 1, \end{aligned} \quad (19)$$

где $b^2 = (A_1 - A_3)(A_3 - A_2)/(A_1 A_2) < 1$. Без ограничения общности положим далее $A_3 = 1, b \in (0, 1)$.

Введем углы Эйлера и запишем фазовые переменные в виде

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cos \vartheta, \quad \nu_2 = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \nu_3 = \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \omega_x &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}, \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда задача интегрирования уравнений движения сводится к интегрированию системы

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1^2 &= f(\nu_1), \quad f(\nu_1) \stackrel{\text{def}}{=} 2(\nu_1 + h)(1 - \nu_1^2) - g^2, \quad \dot{\psi} = \frac{g}{1 - \nu_1^2}, \\ \dot{\varphi} - \frac{bg}{\sqrt{1 - \nu_1^2}} \sin \varphi - b \frac{\sqrt{f(\nu_1)}}{\sqrt{1 - \nu_1^2}} \cos \varphi + \frac{g\nu_1}{1 - \nu_1^2} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Частоты движения $\omega_\vartheta, \omega_\psi$ имеют тот же вид, что и в случае Лагранжа:

$$\begin{aligned} \omega_\vartheta &= \frac{\pi}{K(k)} \frac{\sqrt{u_3 - u_1}}{\sqrt{2}}, \\ \omega_\psi &= \frac{g}{2K(k)} \left[\frac{1}{1 - u_3} \Pi \left(\frac{u_2 - u_3}{1 - u_3}, k \right) + \frac{1}{1 + u_3} \Pi \left(\frac{u_3 - u_2}{1 + u_3}, k \right) \right], \end{aligned}$$

где $f(u_i) = 0$, $u_1 < -1 < u_2 < u_3 < 1$, $k^2 = (u_2 - u_3)/(u_1 - u_3)$, функции $K(k), \Pi(\nu, k)$ – полные эллиптические интегралы первого и третьего рода. Исследуем отношения частот $\mu_1 = \omega_\varphi/\omega_\vartheta$, $\mu_2 = \omega_\psi/\omega_\vartheta$.

Утверждение 2. В случае квазипериодического движения гироскопа Гесса допустимые значения μ_1, μ_2 связаны ограничениями

$$\left(2 - \frac{\sqrt{1 + 4b^2}}{\sqrt{1 + b^2}} \right) \mu_1 + \frac{\sqrt{1 + 4b^2}}{\sqrt{1 + b^2}} \mu_2 \geq 1, \quad 3\mu_1^2 + (1 + 4b^2)\mu_2^2 \leq 1 + b^2. \quad (22)$$

Компьютерный анализ системы уравнений (21) позволил детально изучить зависимость частот движения от констант интегралов и параметров, характеризующих распределение масс в твердом теле. В частности, изучены возможные изменения чисел вращения $\varrho = (\omega_\varphi : \omega_\vartheta : \omega_\psi)$ квазипериодического движения гироскопа Гесса. Полученные результаты дополняют исследования, проведенные в [5–7]. В качестве иллюстрации периодических движений на рис. 3 изображены, как и на рис. 1, подвижные годографы угловой скорости и проекции неподвижных годографов векторов $\boldsymbol{\omega}$, \mathbf{r} на горизонтальную плоскость для следующих значений параметров:

- а) $b = 1/\sqrt{5}$, $h = 0.249$, $g = 0.535$ ($\mu_1 = 1/3$, $\mu_2 = 2/3$);
- б) $b = 1/\sqrt{15}$, $h = 0.876$, $g = 0.35$ ($\mu_1 = 1/4$, $\mu_2 = 3/4$);
- в) $b = 1/\sqrt{15}$, $h = 0.821$, $g = 0.098$ ($\mu_1 = 2/5$, $\mu_2 = 3/5$);
- г) $b = 1/\sqrt{15}$, $h = 1.013$, $g = 0.717$ ($\mu_1 = 1/6$, $\mu_2 = 5/6$);
- д) $b = 1/\sqrt{5}$, $h = 0.485$, $g = 0.812$ ($\mu_1 = 1/5$, $\mu_2 = 3/4$).

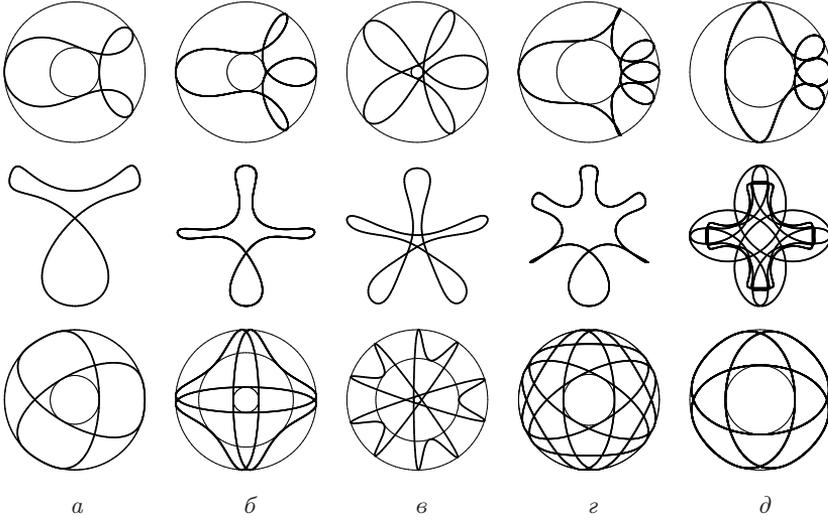


Рис. 3. Случай Гесса: годографы угловой скорости и проекции годографов вектора \mathbf{r} на горизонтальную плоскость.

3. О неподвижном годографе угловой скорости. Неподвижный годограф угловой скорости определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \Omega_\xi(t) &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi, \\ \Omega_\eta(t) &= \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi, \quad \Omega_\zeta(t) = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае Гесса компоненты $\Omega_\xi, \Omega_\eta, \Omega_\zeta$ связаны соотношениями

$$\Omega_\zeta = \omega_x \cos \vartheta + g, \quad \Omega_\xi^2 + \Omega_\eta^2 = \operatorname{tg}^2 \vartheta \left[\Omega_\zeta - \frac{g}{\sin^2 \vartheta} \right]^2 + \dot{\vartheta}^2. \quad (24)$$

Неподвижный годограф является замкнутой пространственной кривой, если $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Q}$.

В неподвижном пространстве введем цилиндрическую систему координат (ρ, α, ζ) . В базисе $(\mathbf{i}_\rho, \mathbf{i}_\alpha, \mathbf{i}_\zeta)$, где $\mathbf{i}_\rho = \mathbf{i}_1 \cos \alpha + \mathbf{i}_2 \sin \alpha$, $\mathbf{i}_\alpha = -\mathbf{i}_1 \sin \alpha + \mathbf{i}_2 \cos \alpha$, $\mathbf{i}_\zeta = \mathbf{i}_3$, вектор $\boldsymbol{\omega}$ имеет разложение $\boldsymbol{\omega} = \Omega_\rho \mathbf{i}_\rho + \Omega_\zeta \mathbf{i}_\zeta$. В соответствии с (24), (21) получим уравнение

$$\Omega_\rho^2 = \operatorname{tg}^2 \vartheta \left[\Omega_\zeta - \frac{g}{\sin^2 \vartheta} \right]^2 + 2(\cos \theta + h) - \frac{g^2}{\sin^2 \vartheta}, \quad (25)$$

которое преобразуем в кубическое уравнение относительно переменной ν_1 :

$$2\nu_1^3 + (2h - \Omega_\zeta^2 - \Omega_\rho^2)\nu_1^2 + (\Omega_\zeta - g)^2 = 0. \quad (26)$$

Для значения $\nu_1 = 0$, которое при $2h \geq g^2$ является допустимым, уравнение (26) приводит к равенству $\Omega_\zeta = g$. Каждому ненулевому значению ν_1 из интервала (u_2, u_3) соответствуют две ветви гиперболы на плоскости $\mathbb{R}^2(\Omega_\rho, \Omega_\zeta)$,

определяемые уравнением (26). Значения $\nu_1 = u_2, \nu_1 = u_3$ соответствуют прямым, описываемым уравнениями

$$\frac{u_2}{\sqrt{1-u_2^2}} \Omega_\rho \pm \Omega_\zeta = \pm \frac{g}{1-u_2^2}, \quad (27)$$

$$\frac{u_3}{\sqrt{1-u_3^2}} \Omega_\rho \pm \Omega_\zeta = \pm \frac{g}{1-u_3^2}. \quad (28)$$

Составим дискриминант кубического уравнения (26) и приравняем его нулю.

Равенство нулю дискриминанта возможно либо при $\Omega_\zeta = g$, либо при выполнении условия

$$(\Omega_\rho^2 + \Omega_\zeta^2 - 2h)^3 - 27(\Omega_\zeta - g)^2 = 0. \quad (29)$$

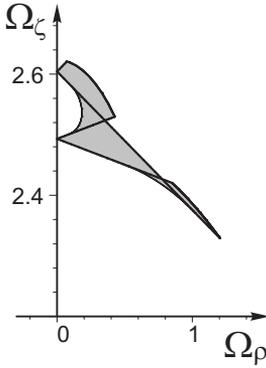


Рис. 4. Область, заповняемая годографами.

В случае $2h > g^2$ точки с координатами $(\Omega_\rho, \Omega_\zeta) = (\pm\sqrt{2h-g^2}, g)$ являются точками возврата алгебраической кривой шестого порядка, определяемой уравнением (29). При некоторых ограничениях на параметры кривая, описываемая уравнением (29), является огибающей семейства плоских кривых, заданных в виде $\Omega_\rho = \Omega_\rho(t), \Omega_\zeta = \Omega_\zeta(t)$. Наконец, найдем соотношение, связывающее между собой компоненты угловой скорости $\Omega_\rho, \Omega_\zeta, \omega_z$. С помощью первого уравнения (19) исключим переменную ω_y из соотношения $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \Omega_\rho^2 + \Omega_\zeta^2$:

$$\omega_x^2 \frac{1+b^2}{b^2} + \omega_z^2 - \Omega_\rho^2 - \Omega_\zeta^2 = 0. \quad (30)$$

С учетом первого уравнения (24) и интеграла энергии найдем

$$(\Omega_\rho^2 + \Omega_\zeta^2 - \omega_x^2 - 2h)\omega_x - 2(\Omega_\zeta - g) = 0. \quad (31)$$

Из (30),(31) получим

$$(\Omega_\zeta - g)^2 - \frac{b^2}{1+b^2} (\Omega_\rho^2 + \Omega_\zeta^2 - \omega_z^2) \left(\frac{1}{2(1+b^2)} (\Omega_\rho^2 + \Omega_\zeta^2 + b^2\omega_z^2) - h \right)^2 = 0. \quad (32)$$

Рассматривая (32) как уравнение шестой степени относительно переменной ω_z , найдем условие

$$\frac{b^2}{1+b^2} (\Omega_\rho^2 + \Omega_\zeta^2) \left[\frac{1}{2(1+b^2)} (\Omega_\rho^2 + \Omega_\zeta^2) - h \right]^2 - (\Omega_\zeta - g)^2 = 0, \quad (33)$$

соответствующее появлению нулевого кратного корня этого уравнения. Если $2(1+b^2)h > g^2$, то точки $(\Omega_\rho, \Omega_\zeta) = (\pm\sqrt{2(1+b^2)h-g^2}, g)$ являются особыми точками алгебраической кривой шестого порядка, заданной уравнением (33).

Зафиксируем параметры h, g, b . Тогда область изменения переменных $(\Omega_\rho, \Omega_\zeta) \in \mathbb{R}^2$ ограничена дугами кривых (27)–(29), (33). На основе выписанных уравнений выполнена классификация возможных видов областей, заполняемых кривыми $\Omega_\rho = \Omega_\rho(t)$, $\Omega_\zeta = \Omega_\zeta(t)$. В качестве иллюстрации на рис. 4 показана одна из таких областей ($b = 0.258, h = 3, g = 2.475$). Прямые (27), (28) разделяют подобласти с различным числом действительных корней уравнений (26), (32). Несложно установить число различных траекторий, проходящих через заданную точку с координатами $(\Omega_\rho, \Omega_\zeta)$.

4. Прецессия тела вокруг вертикали. В случае Гесса, как и в случае Лагранжа, константы интегралов h, g удовлетворяют условию (12). При выполнении равенства в (12) движение тела является прецессией [12]:

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}, \quad \dot{\psi} = g / \sin^2 \vartheta_0 = \text{const}. \quad (34)$$

Наглядную геометрическую интерпретацию прецессий гироскопа Гесса можно получить методом годографов [7]. По теореме Пуансо, вращение твердого тела вокруг неподвижной точки может быть представлено качением без скольжения подвижного аксоида \mathcal{P} по неподвижному аксоиду \mathcal{N} . Подвижный аксоид есть неизменно связанная с телом коническая поверхность (геометрическое место мгновенных осей в теле). Неподвижный аксоид – это геометрическое место мгновенных осей в пространстве. Вершинами поверхностей \mathcal{P}, \mathcal{N} является неподвижная точка O , а направляющими линиями служат подвижный и неподвижный годографы угловой скорости. На рис. 5 показано качение подвижного годографа по неподвижному в случае, когда неподвижный годограф – замкнутая пространственная кривая.

Используем геометрический прием, предложенный в [13]. В неподвижном пространстве зададим плоскость $\Pi = \{x_1, x_2, x_3 : x_3 = 1\}$. Пересечение неподвижного аксоида \mathcal{N} с плоскостью Π происходит в точках, радиус-векторы которых заданы вектор-функцией

$$\tilde{\Omega}(v) = \left(\frac{c^2 \cos v}{b \cos cv + (1 + b^2) \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0}, \frac{-c^2 \sin v}{b \cos cv + (1 + b^2) \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0}, 1 \right),$$

где $c^2 = \cos \vartheta_0^2 - b^2 \sin \vartheta_0^2$, $v = \psi - \psi_0$. При этом справедливы равенства

$$\tilde{\Omega}_\xi = \lambda \Omega_\xi, \quad \tilde{\Omega}_\eta = \lambda \Omega_\eta, \quad \tilde{\Omega}_\zeta = \lambda \Omega_\zeta. \quad (35)$$

Вектор-функцию

$$\tilde{\omega}(v) \stackrel{\text{def}}{=} E^T \tilde{\Omega}(v) = \left(\frac{b^2 \sin \vartheta_0 + b \cos \vartheta_0 \cos cv}{b \cos cv + (1 + b^2) \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0}, \frac{b \sin \vartheta_0 + \cos \vartheta_0 \cos cv}{b \cos cv + (1 + b^2) \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0}, \frac{c \sin v}{b \cos cv + (1 + b^2) \cos \vartheta_0 \sin \vartheta_0} \right)$$

вычислим либо с использованием матрицы перехода E , связывающей подвижный и неподвижный базисы, либо непосредственно из уравнений

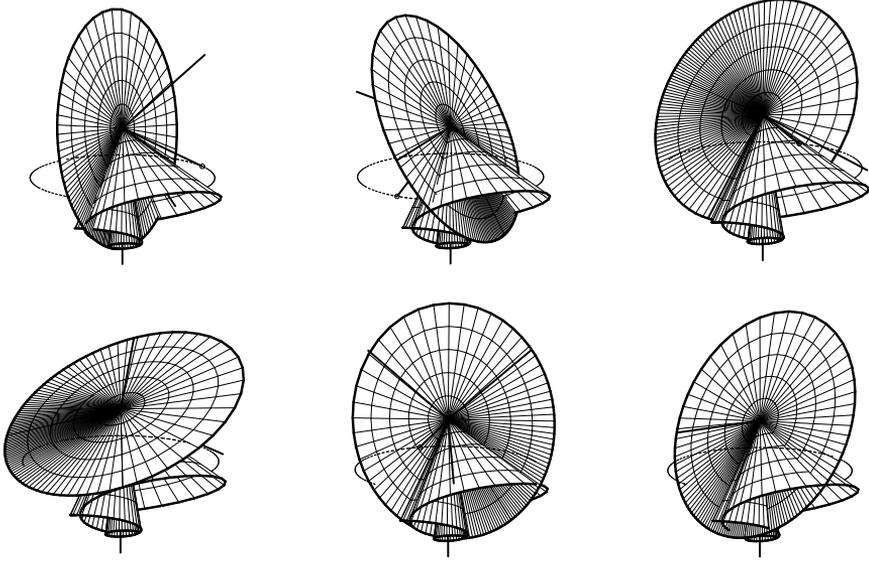


Рис. 5. Периодическая прецессия гироскопа Гесса вокруг вертикали.

(19),(20),(23). В формулах для $\tilde{\omega}(v)$, $\tilde{\Omega}(v)$ величина $c^2 = \cos^2 \vartheta_0 - b^2 \sin^2 \vartheta_0$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В последнем случае тригонометрические функции преобразуются в гиперболические, движение тела асимптотически стремится к равномерному вращению. Разделяющие значения констант интегралов таковы:

$$h_0 = \frac{1 - 2b^2}{2b\sqrt{1 + b^2}}, \quad g_0 = \frac{1}{\sqrt{b}(1 + b^2)^{3/4}}.$$

С учетом соотношений

$$\omega_x - b\omega_y = 0, \quad \omega_y^2 + \omega_z^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} (\Omega_\zeta - \omega_x \cos \vartheta)^2 + \dot{\vartheta}^2,$$

связывающих компоненты угловой скорости, в случае (34) справедливы следующие равенства:

$$\tilde{\omega}_x - b\tilde{\omega}_y = 0, \quad \tilde{\omega}_y^2 + \tilde{\omega}_z^2 - \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 (\tilde{\omega}_x - \cos^{-1} \vartheta_0)^2 = 0, \quad (36)$$

где $\tilde{\omega}_x = \lambda\omega_x$, $\tilde{\omega}_y = \lambda\omega_y$, $\tilde{\omega}_z = \lambda\omega_z$, а коэффициент растяжения λ определен условием $\tilde{\Omega}_\zeta = 1$. При изменении переменной $v \in \mathbb{R}$ вектор-функция $\tilde{\omega}(v)$ задает дугу эллипса, полученного, в соответствии с (36), пересечением плоскости $\Pi_1 = \{y_1, y_2, y_3 : y_1 - by_2 = 0\}$ с боковой поверхностью конуса

$$\mathcal{K} = \{y_1, y_2, y_3 : y_2^2 + y_3^2 - \operatorname{ctg}^2 \vartheta_0 (y_1 - \cos^{-1} \vartheta_0)^2 = 0\}.$$

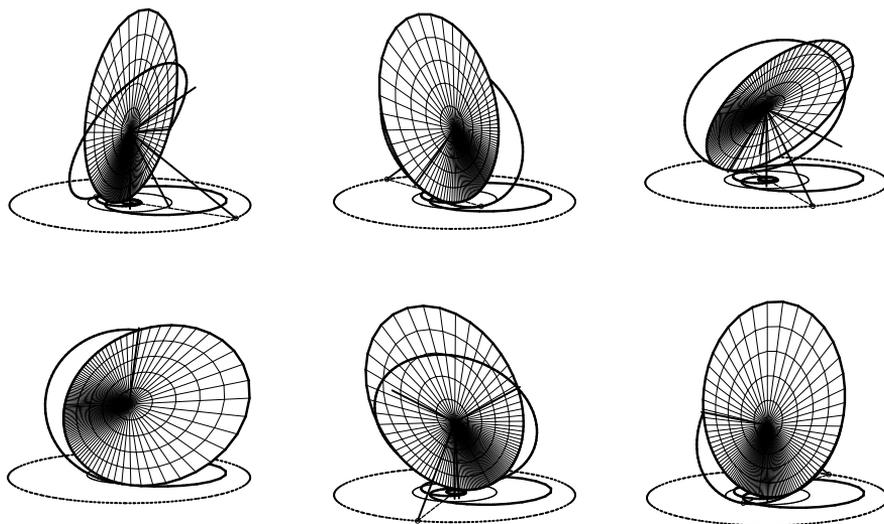


Рис. 6. Качение диска по плоскости.

Этот конус жестко связан с телом, его ось симметрии проходит через неподвижную точку O и центр масс тела. Основание конуса \mathcal{K} совпадает с одним из круговых сечений гирационного эллипсоида. Угол между осью симметрии конуса и вертикальной осью равен ϑ_0 . В любой момент времени вершина конуса принадлежит плоскости Π , а сам конус \mathcal{K} касается плоскости Π вдоль одной из своих образующих. Рис. 5, 6 иллюстрируют две различные интерпретации одного и того же безнутационного ($\vartheta = \vartheta_0$) движения гироскопа Гесса. На рис. 6 показано качение конического сечения по горизонтальной плоскости. Качение годографов векторов $\tilde{\omega}$, $\tilde{\Omega}$ происходит без скольжения.

1. Hess W. Über die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – **37**. – S. 153–181.
2. Некрасов П.А. К задаче о движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Мат. сборник. – 1892. – **16**, вып. 3. – С. 508–517.
3. Некрасов П.А. Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Там же. – 1896. – **18**, вып. 2. – С. 161–274.
4. Liouville R. Sur la rotation des solides // Compt. Rend. de l'Acad. des Sci. Paris. – 1895. – **120**, № 17. – P. 903–906.
5. Ковалев А.М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, вып. 6. – С. 1111–1118.
6. Ковалев А.М., Кириченко В.В. Годограф вектора кинетического момента в решении Гесса // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 9–20.
7. Ковалев А.М. Кинематическое истолкование движения тела в решении Гесса // Прикл. матем. и механика. – 1970. – **34**, вып. 3. – С. 567–570.

8. Аксененкова И.М. Канонические переменные угол-действие в задаче о волчке Лагранжа // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., механика. – 1981. – № 1. – С. 86–90.
9. Татаринцов Я.В. Частотная невырожденность волчка Лагранжа и уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1987. – № 4. – С. 30–36.
10. Харламов П.В. О значении геометрических методов в задачах динамики твердого тела // В кн.: Устойчивость движения. Аналитическая механика. Управление движением. – М.: Наука, 1981. – С. 265–274.
11. Харламов П.В. О годографах угловой скорости гироскопа Лагранжа // Механика твердого тела. – 1978. – Вып. 10. – С. 10–15.
12. Bressan A. Sulle precessioni d'un corpo rigido costituenti moti di Hess // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1957.– 27. – P. 276–283.
13. Гашененко И.Н. Кинематическое представление по Пуансо движения тела в случае Гесса // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 12–20.

I.N. Gashenenko

The periodic motions of a rigid body in the Hess case

The conditions of the existence of periodic motions of the Hess gyroscope about a fixed point are studied. Depending on parameters the frequency vector of quasi-periodic motion of a rigid body under the Hess conditions are investigated. A parametric classification of the fixed hodographs of angular velocity is carried out. The precession of a rigid body about a vertical axis is considered. We propose the kinematic interpretation of precession, according to which the motion of the Hess gyroscope is represented by rolling motion of a cone on a fixed horizontal plane.

Keywords: *rigid body dynamics, the Lagrange case, the Hess case, periodic motions, rotation function, precession.*

I.M. Гашененко

Періодичні рухи твердого тіла у випадку Гесса

Вивчено умови існування періодичних рухів гіроскопа Гесса навколо нерухомої точки. Досліджено залежні від параметрів відношення частот квазіперіодичного руху твердого тіла, підпорядкованого умовам Гесса. Виконано класифікацію нерухомих годографів кутової швидкості. Розглянуто прецесії тіла навколо вертикалі. Запропоновано кінематичну інтерпретацію прецесійних рухів, відповідно до якої рух гіроскопа Гесса зображається коченням конуса по нерухомій горизонтальній площині.

Ключові слова: *динаміка твердого тіла, випадок Лагранжа, випадок Гесса, періодичні рухи, функція обертання, прецесія.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
gashenenko@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 19.09.12