УДК 517.9

ОЦІНКА РОЗМІРІВ ЗОН НЕСТІЙКОСТІ ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА З АНАЛІТИЧНИМ КВАЗІПЕРІОДИЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

О. М. Денисенко

МП "Дисит"НАН України
Україна, 03164, Київ, вул. Генерала Наумова, 15
e-mail: denysenko@pochta.ru

This paper is concerned with a one-dimensional quasiperiodic Schrödinger equation with analytic potential. KAM-theory methods are applied to construct boundaries of instability zones and solutions for these boundaries. Sizes of instability zones have been estimated. In addition we have considered the case where the potential is a finite order trigonometric polynomial.

Рассматривается одномерное стационарное квазипериодическое уравнение Шредингера с аналитическим потенциалом. С помощью методов КАМ-теории построены границы зон неустойчивости, решения, соответствующие этим границам, и оценены размеры зон неустойчивости. Отдельно рассмотрен случай, когда потенциал является тригонометрическим многочленом конечного порядка.

1. Вступ. Розглянемо стаціонарне рівняння Шредінгера з квазіперіодичним потенціалом

$$-\frac{d^2\psi}{dt^2} + \varepsilon u(\omega t)\psi = E\psi, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

в якому $u(\varphi)$ є дійсною аналітичною функцією на m-вимірному торі $\mathbb{T}^m$, $\omega \in \mathbb{R}^m$ — вектор частот, E — дійсний параметр (енергія), ε — малий параметр.

Як відомо, в періодичному випадку задача існування розв'язків (1) вирішується класичною теорією Флоке, а матриця монодромії містить інформацію про властивості цих розв'язків. У квазіперіодичному випадку звідність (1) до системи зі сталими коефіцієнтами не завжди є можливою. Вивченню проблем звідності (1) при $\varepsilon = 1$ з використанням методів КАМ-теорії [1–3] присвячено роботи [4–7]. Зокрема, в роботі [5] встановлено, що довжина зони нестійкості, яка відповідає вектору $n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, при достатньо великих значеннях енергії E оцінюється величиною порядку $O\left(\exp\left\{-\|n\|/\ln^{1+\beta}\|n\|\right\}\right),\ \beta > 0$, де $\|n\| = \sum_{j=1}^{m} |n_j|$. Однак при цьому квазіперіодичні розв'язки у вигляді блохівських функцій будуються поза підозрілими на нестійкість зонами, границі цих зон безпосередньо не визначаються й про поведінку розв'язків всередині зон і на границі нічого не говориться. У роботі [6] побудовано границі зон нестійкості, розв'язки, які їм відповідають, та вивчено поведінку розв'язків усередині цих зон. Зокрема, встановлено, що розмір зони нестійкості, яка відповідає вектору $n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$, при достатньо великих значеннях енергії E оцінюється величиною порядку $O\left(\exp\{-\beta\|n\|\}\right),\ \beta > 0$. Але зони, для яких встановлено ці результати, повинні бути розташовані, в певному сенсі, не дуже щільно. У роботі [7] отримано важливий результат про звідність системи, що еквівалентна рівнянню (1), майже для всіх значень енергії E. Цей результат деякою мірою узагальнює результати [5, 6] та, зокрема, дозволяє описати поведінку розв'язків поза множиною точок стійкості.

Мета даної роботи полягає в побудові границь зон нестійкості (що дозволяє оцінити розмір цих зон) та розв'язків, які відповідають цим границям для випадку аналітичного потенціалу. Зауважимо, що у роботах [4–7] розглядається рівняння (1) при $\varepsilon = 1$. В даній же роботі встановлюється залежність розв'язків та границь зон нестійкості від малого параметра ε. Виявляється, якщо потенціал у рівнянні (1) є скінченним тригонометричним поліномом, то оцінку розміру зон нестійкості можна суттєво покращити. Цей випадок розглядається окремо. При зведенні рівняння (1) використовується підхід, аналогічний [6], але з тією відмінністю, що при визначенні зон нестійкості не накладаються обмеження щодо щільності їх розташування.

Домовимось далі використовувати такі позначення: для векторів $z, x \in \mathbb{C}^m$

$$|z| = \max_{1 \le j \le m} |z_j|, \ \ \|z\| = \sum_{j=1}^{m} |z_j|, \ \ (z, x) = \sum_{j=1}^{m} z_j x_j;$$

для $(p \times p)$-вимірної матриці $H = (h_{ij})$

$$|H| = \max_{1 \le i,j \le p} |h_{ij}|,$$

а через $\mathrm{diag}\,(H)$ позначимо діагональну матрицю, елементи якої складаються з діагональних елементів матриці H. Нехай вектор частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ задовольняє діофантову умову

$$|(n, \omega)| \ge \Omega\,(\|n\|), \quad n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}, \tag{2}$$

де Ω: $[0, \infty) \to (0, 1]$ — монотонно спадна функція, яка задовольняє умови:

1) $\Omega\,(s) \le s^{-m+1}$, $s > 0$;

2) існує монотонно зростаюча необмежена функція $\alpha : [0, \infty) \to [16, \infty)$ така, що $\dfrac{\alpha\,(s)}{s} \ln \Omega\,(s) \to 0$ монотонно при $s \to \infty$, $\displaystyle\int_a^{\infty} \ln \frac{1}{\Omega\,(s)} \frac{\alpha\,(s)\, ds}{s^2} < \infty$, $a > 0$.

Позначимо $\mu_k = \dfrac{1}{2}\,(k, \omega)$, $k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$. Позначимо через $\mathbb{A}$ множину всіх дійсних аналітичних функцій на m-вимірному торі $\mathbb{T}^m$.

Визначимо, як і в [6], множини

$$\mathrm{M} = \left\{ \frac{1}{2}\,(k, \omega) : k \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\} \right\},$$

$$\Re\,(\Omega) = \left\{ \mu_k = \frac{1}{2}\,(k, \omega) : \left| \mu_k - \frac{1}{2}\,(n, \omega) \right| \ge \Omega\,(\|n\|), k \ne n \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\} \right\}.$$

Також визначимо функцію

$$G\,(\|k\|) = \begin{cases} 1, \ \mu_k \in \Re\,(\Omega), \\ \Omega^{-6}\,(\|k\|), \quad \mu_k \in \mathrm{M} \setminus \Re\,(\Omega). \end{cases}$$

Теорема 1. *Нехай потенціал $u \in \mathbb{A}$, а вектор частот ω задовольняє умову (2). Тоді існують мала стала $\varepsilon_1 > 0$, нескінченно диференційовні в крузі $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ функції $\lambda^-(\varepsilon)$ і $\lambda^+(\varepsilon)$, $\lambda^-(\varepsilon) \le \lambda^+(\varepsilon)$, $\lambda^-(0) = \lambda^+(0) = \mu_k^2$, та інтервал $J_\lambda(\mu_k, \varepsilon) = [\lambda^-(\varepsilon), \lambda^+(\varepsilon)]$ такі, що*:

A) якщо $\lambda^-(\varepsilon) = \lambda^+(\varepsilon)$ (тобто інтервал вироджується у точку), то для $E = \lambda^-(\varepsilon) = \lambda^+(\varepsilon)$ рівняння (1) має два лінійно незалежні розв'язки

$$\psi_1\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right) = \exp\left(i\left(k, \frac{\omega}{2}\right)t\right)\chi(\omega t, \varepsilon), \qquad \psi_2\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right) = \psi_1^*\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right),$$

де функція $\chi(\varphi, \varepsilon) : \mathbb{T}^m \times \{\varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon| < \varepsilon_1\} \to \mathbb{C}$ є аналітичною по φ та нескінченно диференційовною по ε;

B) якщо $\lambda^-(\varepsilon) < \lambda^+(\varepsilon)$, то для $E = \lambda^\pm(\varepsilon)$ (тобто на краях інтервалу $J_\lambda(\mu_k, \varepsilon)$) рівняння (1) має два лінійно незалежні розв'язки

$$\psi_1\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right) = \exp\left(i\left(k, \frac{\omega}{2}\right)t\right)(\chi_1(\omega t, \varepsilon) + t\chi_2(\omega t, \varepsilon)),$$

$$\psi_2\left(\frac{\omega}{2}t, \varepsilon\right) = \exp\left(i\left(k, \frac{\omega}{2}\right)t\right)\chi_2(\omega t, \varepsilon),$$

де функції $\chi_1(\varphi, \varepsilon), \chi_2(\varphi, \varepsilon) : \mathbb{T}^m \times \{\varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon| < \varepsilon_1\} \to \mathbb{C}$ є аналітичними по φ та нескінченно диференційовними по ε; при цьому має місце оцінка розміру інтервалу $J_\lambda(\mu_k, \varepsilon)$:

$$|J_\lambda(\mu_k, \varepsilon)| \le c|\varepsilon| G(\|k\|)\exp(-\beta\|k\|),$$

де сталі c та β не залежать від k і ε.

Теорема 2. *Нехай потенціал $u(\omega t)$ в рівнянні (1) є тригонометричним многочленом порядку p. Тоді має місце твердження теореми 1, причому $|J_\lambda(\mu_k, \varepsilon)| \le c|\varepsilon|^r G(\|k\|) \times \exp(-\beta\|k\|)$, де $r = -\left[-\frac{\|k\|}{p}\right]$, сталі c та β не залежать від k і ε.*

2. Доведення теореми 1. Позначимо через $\mathbf{M_2}(\mathbb{C})$ сукупність усіх (2×2)-вимірних матриць з комплексними елементами, а через K — множину всіх (2×2)-вимірних матричних функцій вигляду $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2^* & b_1^* \end{pmatrix}$, де $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$. Зауважимо, що K — кільце відносно операцій додавання та множення; крім того, якщо матриця A має обернену A^{-1}, то $A^{-1} \in K$. За допомогою заміни

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{E} & -i\sqrt{E} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

перейдемо від рівняння (1) до системи

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} i\sqrt{E} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{E} \end{pmatrix} y + \frac{\varepsilon}{\sqrt{E}} V(\varphi)\, y, \tag{3}$$

де $V(\varphi) = \dfrac{u(\varphi)}{2}\begin{pmatrix} -i & -i \\ i & i \end{pmatrix}$. Якщо у системі (3) покласти $\sqrt{E} = \mu_k + \sigma$, $\mu_k = \dfrac{1}{2}(k,\omega)$, та виконати заміну $y = L_k(\varphi/2)\,x$, де

$$L_k\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \exp\left(i\left(k,\dfrac{\varphi}{2}\right)\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\left(k,\dfrac{\varphi}{2}\right)\right) \end{pmatrix},$$

то прийдемо до системи

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} i\sigma & 0 \\ 0 & -i\sigma \end{pmatrix} x + \varepsilon V_k(\varphi,\sigma,\varepsilon)\,x, \tag{4}$$

де

$$V_k(\varphi,\sigma,\varepsilon) = \frac{u(\varphi)}{2(\mu_k+\sigma)}\begin{pmatrix} -i & -i\exp(-i(k,\varphi)) \\ i\exp(i(k,\varphi)) & i \end{pmatrix}.$$

Позначимо

$$\Pi_\rho = \{\varphi \in \mathbb{C}^m : \ |\mathrm{Im}\,\varphi_j| < \rho,\ j = 1,\ldots,m\},$$

$$H_0 = \left\{\sigma \in \mathbb{C} : |\sigma| < \frac{1}{2}\right\} \times \{\varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| < \varepsilon_0\},$$

$$D_0 = \Pi_\rho \times H_0.$$

За аналогією з [6] введемо норму матриці $R(\varphi)$:

$$\|R\|_{D_0,k} = \left|L_k R L_k^{-1}\right|_{D_0} = \sup_{D_0}\left|L_k R L_k^{-1}\right|.$$

Врахувавши вигляд системи (4), розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = C_0(\sigma,\varepsilon)\,x + \varepsilon^r L_k^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right) P(\varphi,\sigma,\varepsilon)\, L_k\left(\frac{\varphi}{2}\right) x, \quad r \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

з аналітичними матрицями-функціями $C_0 = \mathrm{diag}\,(ic_0, -ic_0)$ та P. Нашою метою є побудова інтервалу $J_\sigma(\mu_k,\varepsilon) = [\sigma^-(\varepsilon), \sigma^+(\varepsilon)]$ та такої матричнозначної функції $F(\varphi,\sigma,\varepsilon)$, щоб перетворення змінних $x = F(\varphi,\sigma,\varepsilon)$, $\sigma \in J_\sigma(\mu_k,\varepsilon)$ зводило систему (3) до системи

$$\frac{dz}{dt} = C(\sigma,\varepsilon)\,z, \tag{6}$$

яка має властивості $\mathrm{tr}\,C(\sigma,\varepsilon) = 0,\ \det C(\sigma,\varepsilon) = 0$ при $\sigma = \sigma^\pm(\varepsilon)$ і $\det C(\sigma,\varepsilon) < 0$ при $\sigma \in (\sigma^-(\varepsilon), \sigma^+(\varepsilon))$.

Покладемо $g(\|k\|) = \begin{cases} 1,\ \mu_k \in \Re(\Omega); \\ \Omega(\|k\|), \quad \mu_k \in M\backslash\Re(\Omega). \end{cases}$ Визначимо

$$\Phi(\delta) = \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\Omega^{\alpha(s)}(s/\delta)}ds, \quad \Phi_k(\delta) = \frac{1}{g^2(\|k\|)}\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\Omega^{\alpha(s)}(s/\delta)}ds.$$

З умов 1, 2 для функції Ω випливає, що $\Phi(\delta) < \infty$, $\Phi_k(\delta) < \infty$. Визначимо також

$$\Psi(\delta) = \inf_{\sum \delta_j = \delta} \prod_{\nu=0}^{\infty} (\Phi(\delta_j))^{2^{-\nu-1}},$$

$$\Psi_k(\delta) = \inf_{\sum \delta_j = \delta} \prod_{\nu=0}^{\infty} (\Phi_k(\delta_j))^{2^{-\nu-1}} = \frac{1}{g^2(\|k\|)} \Psi(\delta), \quad \delta > 0.$$

З умови 2 для функції Ω випливає, що $\Psi(\delta) < \infty$, $\Psi_k(\delta) < \infty$. Покладемо $\rho_n = \rho - 2\sum_{\nu=0}^{n-1} \delta_\nu$, $n \geq 0$. Якщо $\delta < \rho/2$, то $\rho = \rho_0 > \rho_1 > \ldots > \rho_n \to \rho - 2\delta > 0$. Для $n \geq 0$ визначимо $\gamma_n = c^{1-2^{-n}} \prod_{\nu=0}^{n-1} \Phi_{\nu,k}^{3 \cdot 2^{-\nu-1}} |\varepsilon| \gamma$, де $\Phi_{\nu,k} = \Phi_k(\delta_\nu)$, $\gamma = |P|_{D_0}$, $c = 4^{m+11}$. Тоді $|\varepsilon|\gamma = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n \to \gamma_\infty = c\Psi_k^3(\delta)|\varepsilon|\gamma$, і ми можемо вибрати $|\varepsilon|$ настільки малим, щоб $c\Psi_k^3(\delta)\gamma|\varepsilon| < \frac{1}{16}$. Також для $n \geq 0$ визначимо $M_n = |\varepsilon|^{r-1} \gamma_n^{2^n}$, $\tilde{N}_n = \frac{2^{n+1}}{\delta_n} \ln \frac{1}{\gamma_n}$, $s_n = 4^{-n-2} g^2(\|k\|) \Omega^2 \left(\tilde{N}_n\right)$. Зауважимо, що оскільки

$$\Phi_{n,k} \left(\prod_{\nu=0}^{n-1} \Phi_{\nu,k}^{2^{-\nu-1}} \right)^{2^n} = \exp\left(\ln \Phi_{n,k} \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{n-\nu-1} \right) \prod_{\nu=0}^{n-1} \Phi_{\nu,k}^{2^{n-\nu-1}} \leq$$

$$\leq \exp\left(\sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{n-\nu-1} \ln \Phi_{\nu,k} \right) \prod_{\nu=0}^{n-1} \Phi_{\nu,k}^{2^{n-\nu-1}} = \prod_{\nu=0}^{\infty} \Phi_{\nu,k}^{2^{n-\nu-1}} = \Psi_k^{2^n}(\delta),$$

то $c\Phi_{n,k}^3 M_n \leq |\varepsilon|^{r-1} c\Phi_{n,k}^3 c^{2^n-1} \left(\prod_{\nu=0}^{n-1} \Phi_{\nu,k}^{2^{-\nu-1}} \right)^{3 \cdot 2^n} (|\varepsilon|\gamma)^{2^n} = |\varepsilon|^{r-1} \gamma_\infty^{2^n}$.

Далі без обмежень загальності будемо вважати, що $\mu_k \geq 1$, $\rho < 1$.

Теорема 3. *Нехай матриці-функції* $P : D_0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$, $C_0 : H_0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$ *є аналітичними,* $P : \operatorname{Re} D_0 \to K$, $\operatorname{tr} P = 0$, $C_0 : \operatorname{Re} H_0 \to K$, $C_0(\sigma, \varepsilon) = \operatorname{diag}(ic_0(\sigma,\varepsilon), -ic_0(\sigma,\varepsilon))$, $c_0(\sigma, 0) = \sigma$ *та*

$$\left| C_0(\sigma,\varepsilon) - \begin{pmatrix} i\sigma & 0 \\ 0 & -i\sigma \end{pmatrix} \right|_{D_0} < L|\varepsilon| \leq \frac{1}{8}, \quad L = L(r,k) > 0.$$

Тоді існують додатна стала $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, *інтервал* $J_\sigma(\mu_k, \varepsilon) = [\sigma^-(\varepsilon), \sigma^+(\varepsilon)]$, $\sigma^\pm(\varepsilon) \in C^\infty(\{\varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon| < \varepsilon_1\})$, $\sigma^\pm(0) = 0$, *та аналітичне по* φ *й нескінченно диференційовне по* σ, ε *відображення* $F : D^* \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$, *де* $D^* = \Pi_{\rho-2\delta} \times H^*$, $H^* = J_\sigma \times \{\varepsilon \in \mathbb{R} : |\varepsilon| < \varepsilon_1\}$, $\|F - I\|_{D^*,k} < 2|\varepsilon|^{r-1}\gamma_\infty$, *такі, що заміна змінних* $x = F(\varphi, \sigma, \varepsilon) z$ *зводить систему (5) до системи (6), у якій матриця* $C \in C^\infty(H^*)$, $C : H^* \to K$, $\operatorname{tr} C = 0$, $\det C(\sigma,\varepsilon) = 0$ *при* $\sigma = \sigma^\pm$ *і* $\det C(\sigma,\varepsilon) < 0$ *при* $\sigma \in (\sigma^-, \sigma^+)$, *та має місце оцінка*

$$|J_\sigma(\mu_k,\varepsilon)| \leq 2^{2m+25} |\varepsilon|^r \Psi_k^3(\delta) \exp(-(\rho - 2\delta)\|k\|) |P|_{D_0}.$$

Позначимо $D_n = \Pi_{\rho_n} \times H_{n,\varepsilon_0}$, $D'_n = \Pi_{\rho_n} \times H'_{n,\varepsilon_0}$, $D''_n = \Pi_{\rho_n - \delta_n} \times H_{n,\varepsilon_0}$, де

$$H_{n,\varepsilon_0} = \{\sigma \in \mathbb{C} : |\sigma - J_{\sigma_n}| < s_n\} \times \{\varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| < \varepsilon_0\},$$

$$H'_{n,\varepsilon_0} = \{\sigma \in \mathbb{C} : |\sigma - J_{\sigma_n}| < s_n/2\} \times \{\varepsilon \in \mathbb{C} : |\varepsilon| < \varepsilon_0\}.$$

Лема 1. *Для довільного $l \in \mathbb{N}$ існує стала c_l, яка не залежить від k, така, що*

$$\frac{1}{s_n^l} \le c_l g^{-2l}(\|k\|)\,\gamma_n^{-2^{n-2}}.$$

Доведення. Оскільки $\delta_n < 1$, то $\exp\left(-\tilde N_n\right) \le \gamma_n^{2^{n+1}}$. Тому $4^{n+2} \le \tilde N_n^m \le \Omega^{-2}\left(\tilde N_n\right)$. З визначення $\Phi_{n,k}$ випливає, що

$$g^{-2}(\|k\|)\,\Omega^{-\alpha(\tilde N_n)}\left(\tilde N_n\right)\gamma_n^{2^{n+1}} \le g^{-2}(\|k\|)\,\Omega^{-\alpha(\tilde N_n)}\left(\tilde N_n\right)\int\limits_{\tilde N_n \delta_n}^{\infty} e^{-s}ds \le \Phi_{n,k}.$$

Оскільки $\Phi_{n,k}^3 \gamma_n^{2^{n+1}} < 1$, то $\Phi_n \le \Phi_{n,k} \le \gamma_n^{-2^{n+1}/3}$. Тому

$$\frac{1}{s_n^l} \le g^{-2l}(\|k\|)\,\Omega^{-4l}\left(\tilde N_n\right) \le g^{-2l}(\|k\|)\,\Phi_n^{4l/\alpha(\tilde N_n)}\gamma_n^{-2^n\cdot 8l/\alpha(\tilde N_n)} \le$$

$$\le g^{-2l}(\|k\|)\,\gamma_n^{-2^n\cdot 11l/\alpha(\tilde N_n)}.$$

Лему доведено.

Наслідок 1. *Якщо у лемі 1 $l = 1$, то* $\dfrac{1}{s_n} \le g^{-2}(\|k\|)\,\Phi_n^{4/\alpha(\tilde N_n)}\gamma_n^{-2^n\cdot 8/\alpha(\tilde N_n)} \le \Phi_{n,k}\gamma_n^{-2^n/2}$.

Наслідок 2.

$$\frac{M_{n-1}}{s_n^l} \le c_l\,|\varepsilon|^{r-1} g^{-2l}(\|k\|)\,\gamma_n^{2^n/4} \le c_l\,|\varepsilon|^{r-1} g^{-2l}(\|k\|)\,\gamma_\infty^{2^{n-2}}, \quad l > 1,$$

$$\frac{M_{n-1}}{s_n} \le \Phi_{n,k}\,|\varepsilon|^{r-1}\gamma_\infty^{2^{n-2}}.$$

Зауважимо, що з урахуванням умов теореми 3 з теореми про неявну функцію випливає існування такої додатної сталої ε_1, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що в крузі $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ існує єдина дійсна аналітична функція $\sigma_0(\varepsilon)$ така, що $c_0(\sigma_0, \varepsilon) = 0$.

Доведення теореми 3 базується на використанні наступної індуктивної леми.

Лема 2. *Припустимо, що на n-му кроці ($n \ge 0$) вже побудовано інтервал $J_{\sigma_n}(\mu_k, \varepsilon) = [\sigma_n^-(\varepsilon), \sigma_n^+(\varepsilon)]$ ($\sigma_0^-(\varepsilon) = \sigma_0^+(\varepsilon) = \sigma_0(\varepsilon)$) та аналітичне відображення $F_n : D_n \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$ ($F_0 = I$) таким чином, що:*

1_n) існує додатна стала ε_1, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, яка не залежить від n, така, що функції σ_n^-, σ_n^+ є аналітичними на множині $J_{\varepsilon,n} = \{\varepsilon \in \mathbb{C} : |J_\varepsilon - \varepsilon| < \varepsilon_1 s_n\}$, де $J_\varepsilon = (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$;

2_n) $\left|\sigma_n^-(\varepsilon) - \sigma_{n-1}^-(\varepsilon)\right| \le 4M_{n-1}$, $\left|\sigma_n^+(\varepsilon) - \sigma_{n-1}^+(\varepsilon)\right| \le 4M_{n-1}$, якщо $n \ge 1$;

3_n) $F_n : \mathrm{Re}\, D_n \to K$;

4_n) $\|F_n - F_{n-1}\|_{D_n,k} \le |\varepsilon|^{r-1} \gamma_\infty^{2^{n-1}}$, якщо $n \ge 1$;

5_n) заміна змінних $x = F_n(\varphi, \sigma, \varepsilon) z_n$ зводить систему (5) до системи

$$\frac{dz_n}{dt} = C_n(\sigma, \varepsilon) z_n + P_n(\varphi, \sigma, \varepsilon) z_n,$$

у якій матриці-функції $P_n : D_n \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$, $C_n : H_n \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$ є аналітичними, $P_n : \mathrm{Re}\, D_n \to K$, $\mathrm{tr}\, P_n = 0$, $P_0 = \varepsilon^r L_k^{-1} P L_k$, $C_n : \mathrm{Re}\, H_{n,\varepsilon_0} \to K$, $\mathrm{tr}\, C_n = 0$, на множині $\mathrm{Re}\, H_{n,\varepsilon_1}$ $\det C_n(\sigma, \varepsilon) = 0$ при $\sigma = \sigma_n^\pm$ і $\det C_n(\sigma, \varepsilon) < 0$ при $\sigma \in (\sigma_n^-, \sigma_n^+)$, та мають місце оцінки

$$\|P_n\|_{D_n,k} \le M_n,$$

$$\|C_n - C_0\|_{D_n',k} \le 2|\varepsilon|^{r-1}\gamma_\infty, \quad \left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}(C_n - C_0)\right\|_{D_n',k} \le 4|\varepsilon|^{r-1}\sqrt{\gamma_\infty}, \tag{7}$$

до того ж $\frac{1}{4}|J_{\sigma_n}| \le |b_n| \le 2|J_{\sigma_n}|$ на множині $J_{\sigma_n} \times J_\varepsilon$, де b_n — будь-який з недіагональних елементів матриці C_n.

Тоді існують інтервал $J_{\sigma_{n+1}}(\mu_k, \varepsilon) = \left[\sigma_{n+1}^-(\varepsilon), \sigma_{n+1}^+(\varepsilon)\right]$ та аналітичне відображення $F_{n+1} : D_{n+1} \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$, для яких виконуються умови $1_{n+1} - 5_{n+1}$.

Доведення. Визначимо на $(n+1)$-му кроці $C_{n+1}(\sigma, \varepsilon) = C_n(\sigma, \varepsilon) + \bar{P}_n(\sigma, \varepsilon)$, де

$$\bar{P}_n(\sigma, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\mathbb{T}^m} P_n(\varphi, \sigma, \varepsilon)\, d\varphi.$$

Тоді $\|C_{n+1} - C_n\|_{D_n,k} \le M_n$, і оскільки $c\Phi_{n,k}^3 M_n \le |\varepsilon|^{r-1}\gamma_\infty^{2^n}$, то за нерівністю Коші та наслідком 1 леми 1

$$\left\|\frac{\partial}{\partial\sigma}(C_{n+1} - C_n)\right\|_{D_n',k} \le \frac{M_n}{s_n - s_n/2} = \frac{2M_n}{s_n} \le 2|\varepsilon|^{r-1}(\sqrt{\gamma_\infty})^{2^n}.$$

Визначимо матрицю $w_{n+1}(\varphi, \sigma, \varepsilon)$ як розв'язок гомологічного рівняння

$$\left(\frac{\partial w_{n+1}}{\partial\varphi}, \omega\right) + [w_{n+1}, C_n] = Q_n - \bar{Q}_n, \quad Q_n = L_k^{-1} S_{\tilde{N}_n}\left(L_k P_n L_k^{-1}\right) L_k \tag{8}$$

$\Big($наприклад, $Q_0 = \varepsilon^r L_k^{-1} S_{\tilde{N}_0}\left(L_k P_0 L_k^{-1}\right) L_k = \varepsilon^r L_k^{-1} S_{\tilde{N}_0} P L_k = \varepsilon^r L_k^{-1} \sum\limits_{\|j\| \le \tilde{N}_0} p_j e^{i(j,\varphi)} L_k\Big)$.

Перетворення координат $x = F_{n+1}(\varphi, \sigma, \varepsilon) z_{n+1}$, де $F_{n+1}(\varphi, \sigma, \varepsilon) = W_{n+1}(\varphi, \sigma, \varepsilon) \times F_n(\varphi, \sigma, \varepsilon)$, $W_{n+1} = w_{n+1} + \sqrt{1 - \det w_{n+1}}\, I$, зводить систему (5) до системи

$$\frac{dz_{n+1}}{dt} = C_{n+1}(\sigma, \varepsilon) z_{n+1} + P_{n+1}(\varphi, \sigma, \varepsilon) z_{n+1},$$

в якій

$$P_{n+1} = W_{n+1}^{-1}\left(-\left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial\varphi},\omega\right) - W_{n+1}C_{n+1} + \left(C_n + P_n\right)W_{n+1}\right) =$$

$$= W_{n+1}^{-1}\left(-\left(\frac{\partial\sqrt{1-\det w_{n+1}}}{\partial\varphi},\omega\right) + P_n - \bar{P}_n - Q_n + \bar{Q}_n +\right.$$

$$\left. + P_n\left(W_{n+1} - I\right) - \left(W_{n+1} - I\right)\bar{P}_n\right).$$

Оскільки $\det W_{n+1} = 1$, $\operatorname{tr} P_n = 0$, $\operatorname{tr} C_n = 0$, $\operatorname{tr} C_{n+1} = 0$, то

$$\operatorname{tr} P_{n+1} = \operatorname{tr} W_{n+1}^{-1}\left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial\varphi},\omega\right) = \left(\frac{\partial\left(\det W_{n+1}\right)}{\partial\varphi},\omega\right) = 0.$$

Далі знайдемо та оцінимо розв'язок рівняння (8). Оскільки права частина (8) має нульовий слід та нульове середнє, то ми можемо теж саме вимагати від розв'язку w_{n+1}. Позначимо $w_{n+1} = \begin{pmatrix} w^1 & w^2 \\ w^3 & -w^1 \end{pmatrix}$, а праву частину (6) через $\begin{pmatrix} q^1 & q^2 \\ q^3 & -q^1 \end{pmatrix}$, $w^j = \sum\limits_{l\neq 0} w_l^j e^{i(l,\omega)t}$, $q^j = \sum\limits_{l\neq 0} q_l^j e^{i(l,\omega)t}$, $j = 1,2,3$. Якщо $C_n = \begin{pmatrix} c^1 & c^2 \\ c^3 & -c^1 \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} w_l^1 \\ w_l^2 \\ w_l^3 \end{pmatrix} = B_l^{-1}\begin{pmatrix} q_l^1 \\ q_l^2 \\ q_l^3 \end{pmatrix}$, де

$$B_l = \begin{pmatrix} i(l,\omega) & c^3 & -c^2 \\ 2c^2 & i(l,\omega) - 2c^1 & 0 \\ -2c^3 & 0 & i(l,\omega) + 2c^1 \end{pmatrix}, \qquad l \neq 0.$$

Зрозуміло, що на множині $J_{\sigma_n} \times J_\varepsilon$ $\det C_n \leq 0$, а тому $\det B_l \neq 0$, $l \neq 0$. Покажемо, що $\det B_l \neq 0$ і на множині $\{\sigma \in C : |\sigma - J_{\sigma_n}| < s_n\} \times J_{\varepsilon,n}$. Оскільки $|(l,\omega)| \geq \Omega\left(\|l\|\right)$, $|(l \pm k,\omega)| \geq g\left(\|k\|\right)\Omega\left(\|l\|\right)$, то $(l,\omega)^2 \geq g^2\left(\|k\|\right)\Omega^2\left(\tilde{N}_{n+1}\right) \geq 16 s_n$, $l \neq 0$. Далі, оскільки $\left|\frac{\partial}{\partial\sigma}\det C_n\right| \leq \frac{3}{2}$, то $\det B_l \leq \frac{3}{2}s_n$. Тоді $\left|(l,\omega)^2 - 4\det C_n\right| \geq (l,\omega)^2 - 6s_n \geq \frac{5}{8}(l,\omega)^2$. Повторюючи міркування з роботи [6], неважко отримати наступні оцінки в області $D_n'' = \Pi_{\rho_n - \delta_n} \times H_n$:

$$\|w_{n+1}\|_{D_n'',k} \leq 2^{m+9}\Phi_{n,k}\|Q\|_{D_n,k} \leq 2^{m+9}\Phi_{n,k}M_n,$$

$$\|P_n - Q_n\|_{D_n'',k} \leq 2^m\Phi_{n,k}M_n^2,$$

$$\left|\sqrt{1-\det w_{n+1}} - 1\right|_{D_n''} \leq |\det w_{n+1}|_{D_n''} \leq 4^{m+10}\Phi_{n,k}^2 M_n^2,$$

$$\|W_{n+1} - I\|_{D_n'',k} \leq 2^{m+10}\Phi_{n,k}M_n,$$

з яких випливає умова 4_{n+1}, а також оцінки в області D_{n+1}:

$$\left|\left(\frac{\partial\sqrt{1-\det w_{n+1}}}{\partial\varphi},\omega\right)\right|_{D_{n+1}} \le \frac{|\omega|}{\delta_n}\left|\sqrt{1-\det w_{n+1}}-1\right|_{D''_n} \le 4^{m+10}\Phi^3_{n,k}M^2_n,$$

$$\|P_{n+1}\|_{D_{n+1,k}} \le M_{n+1}.$$

Тоді

$$\|F_{n+1}-F_n\|_{D_{n+1,k}} = \|W_{n+1}-I\|_{D_{n+1,k}}\|F_n\|_{D_{n+1,k}} \le$$

$$\le 2^{m+10}\Phi_{n,k}M_n\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+2^{m+10}\Phi_{j,k}M_j\right) \le$$

$$\le 2^{m+10}\Phi_{n,k}M_n\exp\left(\sum_{j=1}^{n-1}2^{m+10}\Phi_{j,k}M_j\right) \le$$

$$\le 2^{m+11}\Phi_{n,k}M_n \le \gamma_\infty^{2^n}.$$

Оскільки на множині $\operatorname{Re} H_{n+1,\varepsilon_0}$ $C_{n+1}(\sigma,\varepsilon)$ має вигляд $\begin{pmatrix} ic_{n+1} & d_{n+1} \\ d^*_{n+1} & -ic_{n+1}\end{pmatrix}$, де $c_{n+1}\in\mathbb{R}$, $d_{n+1}\in\mathbb{C}$, то $\det C_{n+1} = f_1\cdot f_2$, де $f_1 = c_{n+1}+|d_{n+1}|$, $f_2 = c_{n+1}-|d_{n+1}|$. З нерівностей (7) випливає, що на множині $\operatorname{Re} H'_{n,\varepsilon_0}$ $\left|\dfrac{\partial f_1}{\partial\sigma}-1\right| \le \dfrac{1}{2}$, $\left|\dfrac{\partial f_2}{\partial\sigma}-1\right| \le \dfrac{1}{2}$, і на множині $J_{\varepsilon,n}$ $|f_1(\sigma_n^-(\varepsilon),\varepsilon)| \le 2M_n$, $|f_2(\sigma_n^+(\varepsilon),\varepsilon)| \le 2M_n$. Тоді за теоремою про неявну функцію існують єдині дійсні аналітичні на множині $J_{\varepsilon,n}$ функції $\sigma^-_{n+1}(\varepsilon),\sigma^+_{n+1}(\varepsilon)$, $\left|\sigma^\pm_{n+1}(\varepsilon)-J_{\sigma_n}\right| < s_n/2$, такі, що $f_1\left(\sigma^-_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right) = 0$, $f_2\left(\sigma^+_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right) = 0$. Зауважимо, що $s_{n+1} \le s_n/4$. Тому $D_{n+1,k}\subset D'_{n,k}\subset D_{n,k}$, $D_{n+1,k}\subset D''_{n,k}\subset D_{n,k}$. Оскільки $2M_n \ge$ $\ge |f_1(\sigma_n^-(\varepsilon),\varepsilon)| = \left|f_1\left(\sigma^-_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)-f_1(\sigma_n^-(\varepsilon),\varepsilon)\right| \ge \dfrac{1}{2}\left|\sigma^-_{n+1}(\varepsilon)-\sigma_n^-(\varepsilon)\right|$, то $\left|\sigma^-_{n+1}(\varepsilon)-\right.$ $\left.-\sigma_n^-(\varepsilon)\right| \le 4M_n$. Аналогічно $\left|\sigma^+_{n+1}(\varepsilon)-\sigma^+_n(\varepsilon)\right| \le 4M_n$.

Тепер покажемо, що $\dfrac{1}{4}\left|J_{\sigma_{n+1}}\right| \le |d_{n+1}| \le 2\left|J_{\sigma_{n+1}}\right|$. Оскільки

$$\left|f_1\left(\sigma^-_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)-f_1\left(\sigma^+_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)\right| = \left|f_1\left(\sigma^+_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)-f_2\left(\sigma^+_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)\right| =$$

$$= 2\left|d_{n+1}\left(\sigma^+_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)\right|,$$

то внаслідок нерівності (7)

$$\frac{1}{2}\left|\sigma^-_{n+1}(\varepsilon)-\sigma^+_{n+1}(\varepsilon)\right| \le 2\left|d_{n+1}\left(\sigma^+_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)\right| \le 2\left|\sigma^-_{n+1}(\varepsilon)-\sigma^+_{n+1}(\varepsilon)\right|.$$

Аналогічно встановлюється, що

$$\frac{1}{2}\left|\sigma^-_{n+1}(\varepsilon)-\sigma^+_{n+1}(\varepsilon)\right| \le 2\left|d_{n+1}\left(\sigma^-_{n+1}(\varepsilon),\varepsilon\right)\right| \le 2\left|\sigma^-_{n+1}(\varepsilon)-\sigma^+_{n+1}(\varepsilon)\right|.$$

Тоді на множині $J_{\sigma_{n+1}} \times J_{\varepsilon,n}$, оскільки $\left|\dfrac{\partial d_{n+1}}{\partial \sigma}\right| \leq 1/4$,

$$\left|d_{n+1}(\sigma,\varepsilon) - d_{n+1}\left(\sigma_{n+1}^{+},\varepsilon\right)\right| \leq \frac{1}{4}\left|\sigma - \sigma_{n+1}^{+}\right| \leq \frac{1}{4}\left|J_{\sigma_{n+1}}\right|,$$

а отже,

$$\left|d_{n+1}(\sigma,\varepsilon)\right| \leq \frac{1}{4}\left|J_{\sigma_{n+1}}\right| + \left|d_{n+1}\left(\sigma_{n+1}^{+},\varepsilon\right)\right| \leq \frac{1}{4}\left|J_{\sigma_{n+1}}\right| + \left|J_{\sigma_{n+1}}\right| < 2\left|J_{\sigma_{n+1}}\right|.$$

Крім того,

$$|d_{n+1}(\sigma,\varepsilon)| \geq \left|d_{n+1}\left(\sigma_{n+1}^{+},\varepsilon\right)\right| - \left|d_{n+1}(\sigma,\varepsilon) - d_{n+1}\left(\sigma_{n+1}^{+},\varepsilon\right)\right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}|J_{\sigma_{n+1}}| - \frac{1}{4}|J_{\sigma_{n+1}}| = \frac{1}{4}|J_{\sigma_{n+1}}|.$$

Таким чином, лему 2 доведено.

Далі, доводячи теорему 3, побудуємо інтервал $I_\sigma(\mu_k,\varepsilon) = [\sigma^-(\varepsilon), \sigma^+(\varepsilon)]$ та покажемо, що $\sigma^\pm(\varepsilon) \in C^\infty(J_\varepsilon)$. Визначимо $\sigma^\pm = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n^\pm$. Оскільки $\sigma^\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_n^\pm - \sigma_{n-1}^\pm\right) + \sigma_0^\pm$, де $\sigma_0^+ = \sigma_0^- = \sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon)$ є розв'язком рівняння $c_0(\sigma,\varepsilon) = 0$, та

$$\left|\frac{d^l}{d\varepsilon^l}\left(\sigma_n^\pm(\varepsilon) - \sigma_{n-1}^\pm(\varepsilon)\right)\right| \leq \frac{4l!M_{n-1}}{\varepsilon_1^l s_n^l},$$

$$\left|\frac{d^l\sigma_0(\varepsilon)}{d\varepsilon^l}\right| \leq \frac{4Ll!\,|\varepsilon|}{\varepsilon_1^l s_0^l}, \quad \varepsilon \in J_\varepsilon,$$

то з наслідку 2 леми 1 випливає, що $\sigma^\pm(\varepsilon) \in C^\infty(J_\varepsilon)$. Дійсно,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{d^l}{d\varepsilon^l}\left(\sigma_n^\pm(\varepsilon) - \sigma_{n-1}^\pm(\varepsilon)\right)\right| \leq \left|\frac{d^l\sigma_0^{(\varepsilon)}}{d\varepsilon^l}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4l!M_{n-1}}{\varepsilon_1^l s_n^l} \leq$$

$$\leq \frac{4Ll!|\varepsilon|}{\varepsilon_1^l s_0^l} \leq \frac{8|\varepsilon|^{r-1}c_l g^{-2l}(\|k\|)l!\sqrt[4]{\gamma_\infty}}{\varepsilon_1^l} \leq \frac{4L|\varepsilon|l!}{\varepsilon_1^l s_0^l}, \qquad \varepsilon \in J_\varepsilon,$$

тому сума ряду, який визначає $\sigma^\pm$, буде нескінченно диференційовною функцією на множині J_ε.

Покладемо в теоремі 3 $F(\varphi,\sigma,\varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty}F_n(\varphi,\sigma,\varepsilon)$, $C(\sigma,\varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty}C_n(\sigma,\varepsilon)$. Тоді з леми 2 випливає, що $\|F - I\|_{D^*,k} < 2|\varepsilon|^{r-1}\gamma_\infty$, $\|C - C_0\|_{D^*,k} \leq 2|\varepsilon|^{r-1}\gamma_\infty$. Матриця C_0 є діагональною, тому для будь-якого недіагонального елемента b матриці C

$$|b(\sigma,\varepsilon)\exp(i(k,\varphi))|_{D^*} = |b(\sigma,\varepsilon)|_{D^*}\exp((\rho - 2\delta)\|k\|) \leq 2|\varepsilon|^{r-1}\gamma_\infty.$$

Отже, оскільки з леми 2 випливає оцінка $|J_\sigma| \le 4\,|b|$ на множині H^*, то

$$|J_\sigma| \le 4\,|b| \le 4\cdot 2\,|\varepsilon|^{r-1}\,\gamma_\infty \exp\left(-\left(\rho-2\delta\right)\|k\|\right) = 2^{2m+25}\,|\varepsilon|^r\,\Psi_k^3\left(\delta\right)\exp\left(-\left(\rho-2\delta\right)\|k\|\right).$$

Таким чином, теорему 3 доведено.

Для доведення теореми 1 досить застосувати теорему 3 для $r = 1$, поклавши $C_0 = \mathrm{diag}\,(i\sigma, -i\sigma)$. Тоді у лемі 2 $\sigma_0^+ = \sigma_0^- = 0$. Оскільки $\sigma^\pm = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_n^\pm - \sigma_{n-1}^\pm\right) + \sigma_0^\pm$, то, використавши оцінки 2_n з леми 2, отримаємо $|\sigma^\pm| \le 2\gamma_\infty$. З огляду на те, що $E = \left(\mu_k + \sigma\right)^2$, визначимо $J_\lambda\left(\mu_k, \varepsilon\right) = \left[\left(\mu_k + \sigma^-\left(\varepsilon\right)\right)^2, \left(\mu_k + \sigma^+\left(\varepsilon\right)\right)^2\right]$. Тоді

$$|J_\lambda| \le |J_\sigma|\,\frac{2\mu_k + \sigma^- + \sigma^+}{\mu_k} < 4\,|J_\sigma| \le 2^{2m+27}\,|\varepsilon|\,\Psi_k^3\left(\delta\right)\exp\left(-\left(\rho-2\delta\right)\|k\|\right),$$

що остаточно і доводить теорему 1.

3. Доведення теореми 2. Отже, розглянемо випадок, коли потенціал $u\left(\varphi\right)$ є тригонометричним многочленом порядку p, тобто $u\left(\varphi\right) = \sum\limits_{\|n\|\le p} U^{(n)} e^{i(n,\varphi)}$. Основна ідея теореми 3, яка доводиться нижче, полягає в тому, щоб за допомогою певної модифікації техніки зведення, що використовувалась при доведенні леми 2, за скінченне число кроків звести систему (4) до вигляду (5), де $r = -\left[-\dfrac{\|k\|}{p}\right]$, а потім застосувати теорему 3.

Як і вище, покладемо

$$\Psi_k\left(\delta\right) = \inf_{\sum\delta_j=\delta}\prod_{\nu=0}^{\infty}\left(\Phi_k\left(\delta_j\right)\right)^{2^{-\nu-1}} = \frac{1}{g^2\left(\|k\|\right)}\Psi\left(\delta\right) < \infty,$$

для $n \ge 0$ визначимо $\rho_n^0 = \rho^0 - 2\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}\delta_\nu$, $\gamma_n = c^{1-2^{-n}}\prod\limits_{\nu=0}^{n-1}\Phi_{\nu,k}^{3\cdot 2^{-\nu-1}}\,|\varepsilon|\gamma$, де $\Phi_{\nu,k} = \Phi_k(\delta_\nu)$, $\gamma = \left|\dfrac{V\left(\varphi\right)}{\mu_k+\sigma}\right|_{D^0}$, $c = 4^{m+11}$. Тоді $|\varepsilon|\,\gamma = \gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n \to \gamma_\infty = c\Psi_k^3\left(\delta\right)|\varepsilon|\,\gamma$, і ми можемо вибрати $|\varepsilon|$ настільки малим, щоб $c\Psi_k^3\left(\delta\right)\gamma\,|\varepsilon| < \dfrac{1}{16}$. Далі, для $n \ge 0$, $n \le \left[\log_2\left(r-1\right)\right] + 1$, $r = -\left[-\dfrac{\|k\|}{p}\right] \ge 2$, визначимо $M_n = \gamma_n^{2^n}$, $\tilde{N}_n = \dfrac{2^{n+1}}{\delta_n}\ln\dfrac{1}{\gamma_n}$, $s_n^0 = 4^{-n-2}g^2\left(\|k\|\right)\Omega^2\left(\tilde{N}_n\right) < 1$. Позначимо $D_n^0 = \Pi_{\rho_n^0}\times H_n^0$, де $H_n^0 = \left\{\sigma\in\mathbb{C} : |\sigma| < s_n^0\right\}\times\left\{\varepsilon\in\mathbb{C} : |\varepsilon| < \varepsilon_0\right\}$, $D_n'' = \Pi_{\rho_n^0-\delta_n}\times H_n^0$. Тут верхні нуль-індекси використовуються для того, щоб запобігти плутанині при послідовному застосуванні теорем 4 та 3.

Теорема 4. *Нехай у системі (4) функція* $u\left(\varphi\right)$ *є тригонометричним многочленом порядку* p, $r = -\left[-\dfrac{\|k\|}{p}\right] \ge 2$. *Тоді існують стала* $L = L\left(r\right) > 0$, *області* D_0, H_0 *та аналітичне перетворення* $F^0 : D_0 \to \mathbf{M_2}\left(\mathbb{C}\right)$ *такі, що:*

1) $F^0 : \mathrm{Re}\,D^0 \to K$;

2) $\left\|F^0 - I\right\|_{D_{0,k}} \le G\left(\|k\|\right)|L\varepsilon|$;

3) заміна змінних $x = F^0(\varphi, \sigma, \varepsilon)\, x_0$ зводить систему (4) до системи

$$\frac{dx_0}{dt} = C_0(\sigma, \varepsilon)\, x_0 + \varepsilon^r L_k^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right) P(\varphi, \sigma, \varepsilon)\, L_k\left(\frac{\varphi}{2}\right) x_0,$$

в якій $P : D_0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$ є аналітичною, $P : \operatorname{Re} D_0 \to K, \operatorname{tr} P = 0, C_0(\sigma, \varepsilon) = \operatorname{diag}(ic_0(\sigma, \varepsilon), -ic_0(\sigma, \varepsilon)), c_0 : H_0 \to \mathbb{C}, c_0 : \operatorname{Re} H_0 \to \mathbb{R}, c_0(\sigma, 0) = \sigma$, та

$$\left| C_0(\sigma, \varepsilon) - \begin{pmatrix} i\sigma & 0 \\ 0 & -i\sigma \end{pmatrix} \right|_{D_0} < G(\|k\|)\, L|\varepsilon|.$$

Опишемо ітераційний процес, який будемо використовувати для доведення теореми 4. Отже, покладемо $Q_0^{(r)}(\varphi, \sigma, \varepsilon) = \varepsilon q_{0,1}(\varphi, \sigma) = \varepsilon \sum\limits_{\|l\| \le p} q_{0,1}^{(l)}(\sigma)\, e^{i(l,\varphi)}$, де $q_{0,1}^{(l)}(\sigma) = \dfrac{U^{(l)}}{2(\mu_k + \sigma)} \begin{pmatrix} -i & -i \\ i & i \end{pmatrix}$, $C_0^0(\sigma, \varepsilon) = \operatorname{diag}(i\sigma, -i\sigma)$. Таким чином, система (4) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = C_0^0(\sigma, \varepsilon)\, x + L_k^{-1}\left(\frac{\varphi}{2}\right) Q_0^{(r)}(\varphi, \sigma, \varepsilon)\, L_k\left(\frac{\varphi}{2}\right) x. \tag{9}$$

Позначимо $q_{0,1}^d(\sigma) = \operatorname{diag}\left(q_{0,1}^{(0)}(\sigma)\right)$, $Q_0^d(\sigma, \varepsilon) = \varepsilon q_{0,1}^d(\sigma)$. Визначимо матрицю $w_{1,1}(\varphi, \sigma, \varepsilon)$ як розв'язок рівняння

$$\left(\frac{\partial w_{1,1}}{\partial \varphi}, \omega\right) + \begin{pmatrix} -2i\mu_k & 0 \\ 0 & 2i\mu_k \end{pmatrix} (w_{1,1} - \operatorname{diag}(w_{1,1})) + \\ + \left[w_{1,1}, C_0^0\right] = q_{0,1} - q_{0,1}^d, \quad (\varphi, \sigma, \varepsilon) \in D_0^0. \tag{10}$$

Нехай $Q_0^{(r)} : D_0^0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$, $Q_0^{(r)} : \operatorname{Re} D_0^0 \to K$. Покладемо $w_1 = \varepsilon w_{1,1}$, $F_1^0(\varphi, \sigma, \varepsilon) = W_1(\varphi, \sigma, \varepsilon)$, де $W_1 = L_k^{-1} w_1 L_k + \sqrt{1 - \det w_1} \cdot I$. Зауважимо, що оскільки права частина (10) має нульовий слід, то $w_1 : D_0^0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$, $w_1 : \operatorname{Re} D_0^0 \to K$, $\operatorname{tr} w_1 = 0$, а отже, $\det W_1 = 1$ і $W_1^{-1} = L_k^{-1}\left(-w_1 + I\sqrt{1 - \det w_1}\right) L_k$. Тоді перетворення $x = F_1(\varphi, \sigma, \varepsilon)\, z_1$ зводить систему (9) до системи

$$\frac{dz_1}{dt} = C_1^0(\sigma, \varepsilon)\, z_1 + Q_1(\varphi, \sigma, \varepsilon)\, z_1,$$

в якій

$$C_1^0 = C_1^0 + Q_0^d,$$

$$Q_1 = W_1^{-1}\left(-\left(\frac{\partial W_1}{\partial\varphi},\omega\right) - W_1C_1^0 + \left(C_0^0 + Q_0^{(r)}\right)W_1\right) = W_1^{-1}L_k^{-1}\left(-\left(\frac{\partial\sqrt{1-\det w_1}}{\partial\varphi},\omega\right)+\right.$$

$$\left. + Q_0^{(r)}\left(w_1 + I\left(\sqrt{1-\det w_1}-1\right)\right) - \left(w_1 + I\left(\sqrt{1-\det w_1 - 1}\right)\right)Q_0^d\right)L_k =$$

$$= L_k^{-1}\left(-w_1 + I\left(\sqrt{1-\det w_1}-1\right)\right)\left(-\left(\frac{\partial\sqrt{1-\det w_1}}{\partial\varphi},\omega\right)+\right.$$

$$+ Q_0^{(r)}\left(w_1 + I\left(\sqrt{1-\det w_1}-1\right)\right) -$$

$$\left. - \left(w_{n+1} + I\left(\sqrt{1-\det w_{n+1}}-1\right)\right)Q_0^d\right)L_k.$$

Підставивши розклад

$$\sqrt{1-\det w_1} = 1 - \frac{\det w_1}{2} - \sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2j-3)!!\,(\det w_1)^j}{2^j j!}$$

у вираз для Q_1 та зібравши члени при відповідних степенях ε, запишемо Q_1 у вигляді $Q_1 = L_k^{-1}Q_1^{(r)}L_k + \varepsilon^r L_k^{-1}\tilde{Q}_1 L_k$, де перший доданок містить члени розкладу Q_1 за степенями ε, меншими за r. Наприклад, якщо $Q_1^{(r)} = \sum\limits_{j=2}^{r-1}\varepsilon^j q_{1,j}$, то

$$q_{1,2} = q_{0,1}w_{1,1} - w_{1,1}q_{0,1}^d + \frac{1}{2}I\left(\frac{\partial\left(\det w_{1,1}\right)}{\partial\varphi},\omega\right),$$

$$q_{1,3} = \left(q_{0,1}^d - q_{0,1}\right)\frac{\det w_{1,1}}{2} + w_{1,1}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(\det w_{1,1}\right)}{\partial\varphi},\omega\right) - w_{1,1}q_{0,1}w_{1,1} + w_{1,1}^2 q_{0,1}^d,$$

. . . .

Гомологічне рівняння (10) можемо розв'язувати, як і при доведенні леми 2. Якщо $\left|Q_0^{(r)}\right| \le M_0$, то

$$|w_1|_{D_1''} \le 2^{m+9}\Phi_{0,k}M_0,$$

$$\left|w_1 + I\left(\sqrt{1-\det w_1}-1\right)\right|_{D_1''} \le 2^{m+10}\Phi_{0,k}M_0,$$

$$\left|\left(\frac{\partial\sqrt{1-\det w_1}}{\partial\varphi},\omega\right)\right|_{D_1^0} \le 4^{m+10}\Phi_{0,k}^3 M_0^2,$$

а отже, $\left|Q_1^{(r)}\right|_{D_1^0} \le M_1$.

Зауважимо, що у виразі для $Q_1^{(r)}$ елементи матриць при ε^j є тригонометричними многочленами порядку pj.

Лема 3. *Припустимо, що стала ε_0 є досить малою і на n-му кроці, $2^n \le r-1$, $r = -\left[-\frac{\|k\|}{p}\right] \ge 2$, вже побудовано аналітичне відображення $F_n^0 : D_n^0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$ ($F_0^0 = I$), таким чином, що:*

1_n) $F_n^0 : \operatorname{Re} D_n^0 \to K$;

2_n) $\left\|F_n^0 - F_{n-1}^0\right\|_{D_n^0,k} \le \gamma_\infty^{2^{n-1}}$, якщо $n \ge 1$;

3_n) заміна змінних $x = F_n^0(\varphi,\sigma,\varepsilon)\, z_n$ зводить систему (9) до системи

$$\frac{dz_n}{dt} = C_n^0(\sigma,\varepsilon)\, z_n + Q_n(\varphi,\sigma,\varepsilon)\, z_n,$$

в якій

$$C_n^0(\sigma,\varepsilon) = \begin{pmatrix} ic_n(\sigma,\varepsilon) & 0 \\ 0 & -ic_n(\sigma,\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad Q_n = L_k^{-1} Q_n^{(r)} L_k + \varepsilon^r L_k^{-1} \tilde{Q}_n L_k.$$

Матриці $Q_n^{(r)}, \tilde{Q}_n : D_n^0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$ аналітичні,

$$Q_n^{(r)}, \tilde{Q}_n : \operatorname{Re} D_n^0 \to K, \quad \operatorname{tr} Q_n^{(r)} = \operatorname{tr} \tilde{Q}_n = 0,$$

$$Q_n^{(r)}(\varphi,\sigma,\varepsilon) = \sum_{j=2^n}^{r-1} \varepsilon^j q_{n,j}(\varphi,\sigma,\varepsilon),\ q_{n,j} = \sum_{\|l\| \le p\cdot j} q_{n,j}^{(l)} e^{i(l,\varphi)},$$

функція $c_n : H_n^0 \to \mathbb{C}$, $c_n : \operatorname{Re} H_n^0 \to \mathbb{R}$, є аналітичною, і, крім того,

$$\left|Q_n^{(r)}\right|_{D_n^0} \le M_n, \qquad \left|C_n^0 - C_{n-1}^0\right|_{H_n^0} \le M_{n-1},\ \text{якщо } n \ge 1.$$

Тоді існує таке аналітичне відображення $F_{n+1}^0 : D_{n+1}^0 \to \mathbf{M_2}(\mathbb{C})$, що виконуються умови $1_{n+1} - 3_{n+1}$.

Наслідок 3. *Оскільки у виразі для $Q_n^{(r)}$ елементи матриць при ε^j є тригонометричними многочленами порядку pj, $j \le r-1$, то середнім по φ від $L_k^{-1} Q_n^{(r)} L_k$ буде діагональна матриця з нульовим слідом.*

Наслідок 4. *Ітераційний процес зупиняється, якщо $2^n \ge r$ (в цьому випадку $Q_n^{(r)} = 0$).*

Доведення. Позначимо через Q_n^d середнє по φ діагональних елементів матриці $Q_n^{(r)}$. З наслідку 1 випливає, що середнім від $L_k^{-1} Q_n^{(r)} L_k$ є матриця Q_n^d. Оскільки $\operatorname{tr} Q_n^d = 0$, то можемо покласти $C_{n+1}^0 = C_n^0 + Q_n^d$. Тоді $\left|C_{n+1}^0 - C_n^0\right|_{H_{n+1}^0} \le M_n$.

Визначимо матрицю

$$w_{n+1}(\varphi,\sigma,\varepsilon) = \sum_{j=2^n}^{r-1} \varepsilon^j w_{n+1,j}(\varphi,\sigma,\varepsilon),$$

де $w_{n+1,j}$ є розв'язком рівняння

$$\left(\frac{\partial w_{n+1,j}}{\partial\varphi},\omega\right)+\begin{pmatrix}-2i\mu_k & 0\\ 0 & 2i\mu_k\end{pmatrix}(w_{n+1,j}-\operatorname{diag}(w_{n+1,j}))+$$

$$+\left[w_{n+1,j},C_n^0\right]=q_{n,j}-q_{n,j}^d,\qquad 2^n\le j\le r-1, \tag{11}$$

$(\varphi,\sigma,\varepsilon)\in D_n^0,\ q_{n,j}^d$ — середнє по φ діагональних елементів матриці $q_{n,j}$. Покладемо

$$F_{n+1}^0(\varphi,\sigma,\varepsilon)=W_{n+1}(\varphi,\sigma,\varepsilon)\,F_n^0(\varphi,\sigma,\varepsilon),$$

де $W_{n+1}=L_k^{-1}w_{n+1}L_k+I\sqrt{1-\det w_{n+1}}$. Зауважимо, що $W_{n+1}^{-1}=L_k^{-1}(-w_{n+1}+$ $+I\sqrt{1-\det w_{n+1}})L_k$. Тоді перетворення $x=F_{n+1}(\varphi,\sigma,\varepsilon)\,z_{n+1}$ зводить систему (9) до системи

$$\frac{dz_{n+1}}{dt}=C_{n+1}^0z_{n+1}+Q_{n+1}(\varphi,\sigma,\varepsilon)\,z_{n+1},$$

в якій

$$Q_{n+1}=W_{n+1}^{-1}\left(-\left(\frac{\partial W_{n+1}}{\partial\varphi},\omega\right)-W_{n+1}C_{n+1}^0+\left(C_n^0+Q_n\right)W_{n+1}\right)=$$

$$=W_{n+1}^{-1}L_k^{-1}\left(-\left(\frac{\partial\sqrt{1-\det w_{n+1}}}{\partial\varphi},\omega\right)+Q_n^{(r)}\left(w_{n+1}+I\left(\sqrt{1-\det w_{n+1}}-1\right)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(w_{n+1}+I\left(\sqrt{1-\det w_{n+1}}-1\right)\right)Q_n^d\right)L_k+\varepsilon^rW_{n+1}^{-1}L_k^{-1}\tilde{Q}_nL_kW_{n+1}=$$

$$=L_k^{-1}\left(-w_{n+1}+\sqrt{1-\det w_{n+1}}\right)\left(-\left(\frac{\partial\sqrt{1-\det w_{n+1}}}{\partial\varphi},\omega\right)+\right.$$

$$\left.+Q_n^{(r)}\left(w_{n+1}+I\left(\sqrt{1-\det w_{n+1}}-1\right)\right)-\left(w_{n+1}+I\left(\sqrt{1-\det w_{n+1}}-1\right)\right)Q_n^d\right)L_k-$$

$$-W_{n+1}^{-1}L_k^{-1}\left(w_{n+1}+I\left(\sqrt{1-\det w_{n+1}}-1\right)\right)Q_n^dL_k+$$

$$+\varepsilon^rL_k^{-1}\left(-w_{n+1}+\sqrt{1-\det w_{n+1}}\right)\tilde{Q}_n\left(w_{n+1}+\sqrt{1-\det w_{n+1}}\right)L_k.$$

Підставивши розклад

$$\sqrt{1-\det w_{n+1}}=1-\frac{\det w_{n+1}}{2}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{(2j-3)!!\,(\det w_{n+1})^j}{2^jj!}$$

у вираз для Q_{n+1} та зібравши члени при відповідних степенях ε, визначимо $Q_{n+1}^{(r)}$, а отже, і $\tilde{Q}_{n+1}$. Наприклад,

$$q_{n+1,2^{n+1}} = \frac{1}{2} I \left(\frac{\partial \left(\det w_{n+1,2^n} \right)}{\partial \varphi}, \omega \right) + q_{n,2^n} w_{n+1,2^n} - w_{n+1,2^n} q_{n,2^n}^d ,$$

....

Гомологічні рівняння (11) ми можемо розв'язувати аналогічно, як і в лемі 2. При цьому будемо мати оцінки

$$|w_{n+1}|_{D_n''} \leq 2^{m+9} \Phi_{n,k} M_n ,$$

$$\left| w_{n+1} + I \left(\sqrt{1 - \det w_{n+1}} - 1 \right) \right|_{D_n''} \leq 2^{m+10} \Phi_{n,k} M_n ,$$

$$\left| \left(\frac{\partial \sqrt{1 - \det w_{n+1}}}{\partial \varphi}, \omega \right) \right|_{D_{n+1}^0} \leq 4^{m+10} \Phi_{n,k}^3 M_n^2 ,$$

з яких випливає $\left| Q_{n+1}^{(r)} \right|_{D_{n+1}^0} \leq M_{n+1}$ та нерівність в умові 2_n.

Доведення теореми 4 полягає в l-кратному застосуванні леми 3, $l = [\log_2 (r-1)] + 1$. При цьому $D_0 = D_l^0$, $H_0 = H_l^0$, $F^0 = F_l^0$, $C_0 = C_l^0$, $P = \tilde{Q}_l$. З урахуванням зображення рівняння (1) у вигляді еквівалентних систем (4) та (5) доведення теореми 2 зводиться до послідовного застосування теорем 4 та 3. Для цього необхідно покласти $\rho = \rho_l^0$ та вибрати $|\varepsilon|$ настільки малим, щоб $s_0 \leq s_l^0$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1969. — 248 с.
2. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions// Math. Ann. — 1967. — **169**. — P. 136–176.
3. *Арнольд В. И.* Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Успехи мат. наук. — 1963. — **18**, вып. 5. — С. 13–40.
4. *Белоколос Е. Д.* Квантовая частица в одномерной деформированной решетке. Оценки размеров лакун в спектре // Теор. и мат. физика. — 1975. — **25**, № 3. — С. 344–357.
5. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.* Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом // Функц. анализ и его прил. — 1975. — **9**, № 4. — С. 8–21.
6. *Moser J., Pöschel J.* An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comment. math. helv. — 1984. — **59**. — P. 39–85.
7. *Eliasson L. H.* Floquet solutions for the one-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation // Communs Math. Phys. — 1992. — **146**. — P. 447–482.

Одержано 21.06.2006