УДК 517 . 925

ІНВАРІАНТНІ МНОЖИНИ ТА ПОРІВНЯННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

А. М. Алілуйко, О. Г. Мазко

Ін-математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
e-mail: aliluyko@imath.kiev.ua
mazko@imath.kiev.ua

Methods for a construction of invariant sets in a phase space of differential systems are suggested. These sets are described as cone inequalities with application of a derivative operator along the trajectories of the system. Well-known positivity conditions for linear and nonlinear differential systems with respect to representative classes of cones are generalized. A comparison and ordering technique is developed for a set of dynamical systems.

Предлагается методика построения и исследования инвариантных множеств дифференциальных систем, которые описываются в виде конусных неравенств с применением оператора дифференцирования в силу системы. Обобщаются известные условия позитивности линейных и нелинейных дифференциальных систем относительно типичных классов конусов. Развивается методика сравнения и упорядочения семейства динамических систем.

0. Вступ. У практичних дослідженнях використовуються диференціальні та різницеві моделі динамічних об'єктів, у фазовому просторі яких існують інваріантні множини, зокрема конуси. Побудова та класифікація таких множин є однією з важливих задач якісного аналізу динамічних систем. Інваріантні множини систем необхідно враховувати і використовувати в задачах аналізу стійкості та керування (див., наприклад, [1, 2]).

У даній роботі запропоновано методику побудови інваріантних множин диференціальних систем у вигляді конусних нерівностей із застосуванням оператора диференціювання в силу системи і елементів спряженого конуса. Як наслідок, сформульовано узагальнений принцип порівняння скінченної сім'ї незалежних систем. Наведено кілька прикладів застосування запропонованої методики для диференціальних систем першого та другого порядків. Відомі результати стосовно інваріантності конусів є частинними випадками встановленого критерію інваріантності заданого класу множин. Зокрема, встановлено достатні умови інваріантності змінного за часом еліпсоїдального конуса для деякого класу нелінійних диференціальних систем. Аналогічні результати для лінійних систем встановлено в [3, 4].

1. Означення і допоміжні факти. Опукла замкнена множина $\mathcal{K}$ дійсного нормованого простору $\mathcal{E}$ називається клином, якщо $\alpha\mathcal{K}+\beta\mathcal{K}\subset\mathcal{K}\;\forall\alpha,\beta\geq 0$. Клин $\mathcal{K}$ з лезом $\mathcal{K}\cap-\mathcal{K}= =\{0\}$ є конусом. Спряжений конус $\mathcal{K}^*$ формують лінійні функціонали $\varphi\in\mathcal{E}^*$, що набувають невід'ємних значень на елементах $\mathcal{K}$, причому $\mathcal{K}=\{X\in\mathcal{E}:\;\varphi(X)\geq 0\;\forall\varphi\in\mathcal{K}^*\}$. Простір із клином є напівупорядкованим: $X\leq Y\iff Y-X\in\mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ з непорожньою множиною внутрішніх точок $\operatorname{int}\mathcal{K}=\{X: X>0\}$ — тілесний. Конус $\mathcal{K}$ називається нормальним, якщо із $0\leq X\leq Y$ випливає $\|X\|\leq\nu\|Y\|$, де ν — універсальна константа. Найменше таке число ν є константою нормальності конуса. Якщо $\mathcal{E}=\mathcal{K}-\mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ є відтворюючим. Конус $\mathcal{K}$ є нормальним лише тоді, коли спряжений конус $\mathcal{K}^*$ — відтворюючий.

Нехай у банаховому просторі $\mathcal{E}_1(\mathcal{E}_2)$ виділено конус $\mathcal{K}_1(\mathcal{K}_2)$. Оператор $M : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ називається монотонним, якщо із $X \geq Y$ випливає $MX \geq MY$. Монотонність лінійного оператора рівносильна його позитивності: $X \geq 0 \implies MX \geq 0$.

Динамічна система, стан якої $X(t) = \Omega(t, t_0)X_0$ у кожний момент часу $t > t_0$ визначає позитивний (монотонний) оператор $\Omega(t, t_0) : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, є позитивною (монотонною) відносно деякого конуса. Система має інваріантну множину $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{X}$, якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$ із $X_0 \in \mathcal{K}_{t_0}$ випливає $X(t) \in \mathcal{K}_t$ при $t \geq t_0$. Якщо $\mathcal{K}_t$ — конус, то нерівності між елементами простору в кожний момент часу t позначимо символами типу $\overset{\mathcal{K}_t}{\leq}$ або $\overset{\mathcal{K}_t}{\geq}$.

Належність диференціальної системи

$$\dot{X} = F(X, t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{1.1}$$

вказаним класам можна встановити за допомогою елементів спряженого конуса. Зокрема, система (1.1) є позитивною і монотонною відносно тілесного конуса $\mathcal{K}_t$, якщо $t < \tau \Longrightarrow \mathcal{K}_t \subseteq \mathcal{K}_\tau$ і виконуються відповідні умови [5]

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X) = 0 \implies \varphi(F(X, t)) \geq 0, \tag{1.2}$$

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X - Y) = 0 \implies \varphi(F(Y, t) - F(X, t)) \geq 0, \tag{1.3}$$

де $\mathcal{K}_t^*, t \geq 0,$ — спряжений конус.

Ізольований стан рівноваги $X \equiv 0$ динамічної системи називаємо стійким в $\mathcal{K}_t$, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ і $t_0 \geq 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що із $X_0 \in \mathcal{S}_\delta(t_0)$ випливає $X(t) \in \mathcal{S}_\varepsilon(t)$ при $t > t_0$, де $\mathcal{S}_\varepsilon(t) = \{X \in \mathcal{K}_t : \|X\| \leq \varepsilon\}$. Якщо при цьому для певного $\delta_0 > 0$ із $X_0 \in \mathcal{S}_{\delta_0}(t_0)$ випливає $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$, то стан $X \equiv 0$ системи є асимптотично стійким в $\mathcal{K}_t$. Якщо стан $X \equiv 0$ системи з інваріантним конусом $\mathcal{K}_t$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, то він є стійким (асимптотично стійким) в $\mathcal{K}_t$.

Аналогічно означаються інваріантні множини, властивості позитивності і монотонності відносно конуса і стійкості в $\mathcal{K}_t$ для динамічних систем із дискретним часом.

Інерцією симетричної матриці $S = S^T \in R^{n \times n}$ будемо називати трійку чисел $i(S) = \{i_+(S), i_-(S), i_0(S)\}$, де $i_+(S), i_-(S)$ і $i_0(S)$ — відповідно кількість додатних, від'ємних і нульових власних значень S з урахуванням кратностей.

2. Побудова інваріантних множин у фазовому просторі диференціальних систем. Розглянемо у банаховому просторі диференціальну систему (1.1), де $F : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{X}$ — оператор, що задовольняє умови існування та єдиності розв'язків $X(t)$ в деякій області $\Omega \subset \mathcal{X}$ з початковими умовами $X(t_0) = X_0 \in \Omega$. Система (1.1) має інваріантну множину $\mathcal{I}_t \subset \mathcal{X}$, якщо із $X(t_0) \in \mathcal{I}_{t_0}$ випливає $X(t) \in \mathcal{I}_t$ при $t > t_0 \geq 0$.

Побудуємо інваріантні множини системи (1.1) у вигляді

$$\mathcal{I}_t = \{X \in \Omega : V(X, t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0\}, \tag{2.1}$$

де $V : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$ — деякий оператор, $\overset{\mathcal{K}}{\geq}$ — нерівність, породжена заданим конусом або клином $\mathcal{K}$ у просторі $\mathcal{E}$. Для цього визначимо оператор диференціювання D_t в силу системи як (сильну) похідну складної функції:

$$D_t V(X, t) = \frac{d}{d\tau} \, V(\Psi(\tau, t, X), \tau)|_{\tau=t} \, , \tag{2.2}$$

де $X(\tau) = \Psi(\tau, t, X)$ — розв'язок системи з початковою умовою $X(t) = X$. Будемо припускати, що $V(X, t)$ є неперервною функцією разом зі своїми частинними похідними в області $\Omega \times [0, \infty)$.

Наведемо відомі вирази для оператора D_t, в яких використовуються не розв'язки системи (1.1), а її права частина F. Наприклад, якщо $\mathcal{X} = R^n$ і $\mathcal{E} = R^m$, то

$$D_t V(X, t) = V_X'(X, t) \, F(X, t) + V_t'(X, t),$$

де $V_X'(X, t)$ — матриця Якобі розміру $m \times n$, складена із частинних похідних функції V по X. По аналогії можна розглядати узагальнення даного співвідношення на основі застосування похідних нелінійного оператора типу Гато і Фреше [6]. Наприклад, можна вважати, що $V_t'(X, t)$ є сильною похідною функції по t, а $V_X'(X, t)$ — похідна Гато по X, тобто лінійний обмежений оператор типу

$$V_X'(X, t)H = \frac{d}{d\tau} \, V(X + \tau H, t)|_{\tau=0} \, .$$

Зауваження 2.1. У теорії порівняння систем застосовуються верхні праві та ліві похідні в силу системи типу Діні

$$D_t^{\pm} V(X, t) = \limsup_{\tau \to 0\pm} \frac{1}{\tau} \left[V\left(X + \tau F(X, t), t + \tau\right) - V(X, t) \right]$$

за умови, що функція $V(X, t)$ не є диференційовною, а лише неперервною і локально ліпшицевою по X (див., наприклад, [7, 8]).

Теорема 2.1. *Нехай $\mathcal{K}$ — тілесний конус. Тоді $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи (1.1) тоді і тільки тоді, коли при кожному $t \geq 0$ виконується умова*

$$X \in \mathcal{I}_t, \quad \varphi \in \mathcal{K}^*, \quad \varphi\left(V(X, t)\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi\left(D_t V(X, t)\right) \geq 0. \tag{2.3}$$

Доведення. Нехай $X(t)$ — розв'язок системи (1.1) з початковою умовою $X(t_0) = X_0 \in \in \mathcal{I}_{t_0}$. Тоді оператор D_t діє як диференціювання за часом складної функції $V(X(t), t)$ і виконується рівність

$$\int\limits_{t_0}^{t} D_\tau V(X(\tau), \tau) \, d\tau = V(X(t), t) - V(X_0, t_0).$$

Звідси, зокрема, випливає, що $V(X(t),t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} V(X_0,t_0)$, якщо $D_tV(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $X \in \mathcal{I}_t$ і $t \geq t_0$. При цьому $V(X(t),t) \overset{\mathcal{K}}{>} 0$, якщо $V(X_0,t_0) \overset{\mathcal{K}}{>} 0$.

Нехай у деякий момент часу $\tau \geq t_0$ значення функції $V(X_\tau,\tau)$, де $X_\tau = X(\tau)$, досягає границі конуса $\mathcal{K}$. Тоді для деякого ненульового функціонала $\varphi \in \mathcal{K}^*$ маємо $\varphi(V(X_\tau,\tau)) = 0$.

Разом з (2.1) розглянемо множину

$$\mathcal{I}_t^\varepsilon = \{X \in \Omega : V_\varepsilon(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0\}, \quad V_\varepsilon(X,t) = V(X,t) + \varepsilon\omega(t)Y,$$

де $\varepsilon > 0, Y \overset{\mathcal{K}}{>} 0, \omega(t)$ — невід'ємна неперервно диференційовна функція така, що $\omega(\tau) = 0$ і $\dot{\omega}(\tau) > 0$. Покладемо, наприклад, $\omega(t) = \arctan(t-\tau)$. Тоді, очевидно, $\mathcal{I}_t \subset \mathcal{I}_t^\varepsilon$ причому $\mathcal{I}_t^\varepsilon \to \mathcal{I}_t$ при $\varepsilon \to 0, t \geq \tau$.

Оскільки $V_\varepsilon(X_\tau,\tau) = V(X_\tau,\tau)$ і $\varphi(Y) > 0$, то для деякого $\delta > 0$ згідно з умовою (2.3) маємо співвідношення

$$\varphi\left(D_tV_\varepsilon(X,t)\right) = \varphi\left(D_tV(X,t)\right) + \frac{\varepsilon}{1+(t-\tau)^2}\,\varphi(Y) \geq 0, \quad \tau \leq t \leq \tau+\delta,$$

$$\int_\tau^{\tau+\delta} \varphi\left(D_tV_\varepsilon(X(t),t)\right)\,dt = \varphi(V_\varepsilon(X(\tau+\delta),\tau+\delta)) \geq 0.$$

Це означає, що траєкторія $X(t)$ в момент часу τ не може залишати множину $\mathcal{I}_\tau^\varepsilon$, тобто $V_\varepsilon(X(t),t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$ при $\tau \leq t \leq \tau+\delta$. Інакше для деякого $\varphi \in \mathcal{K}^*$ і як завгодно малого $\delta > 0$ повинна виконуватись протилежна нерівність $\varphi(V_\varepsilon(X(\tau+\delta),\tau+\delta)) < 0$.

Внаслідок замкненості конуса $\mathcal{K}$ при $\varepsilon \to 0$ маємо

$$V_\varepsilon(X(t),t) \to V(X(t),t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \tau \leq t \leq \tau+\delta.$$

Отже, $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи (1.1).

Зворотне твердження є наслідком теореми Лагранжа:

$$\varphi(V(X(\tau+\delta),\tau+\delta)) - \varphi(V(X(\tau),\tau)) = \delta\,\varphi(D_\xi V(X(\xi),\xi)),$$

де $\xi \in (\tau,\tau+\delta)$. Якщо $\varphi(V(X(\tau),\tau)) = 0$ і $X(\tau+\delta) \in \mathcal{I}_{\tau+\delta}$, то при достатньо малому $\delta > 0$ необхідно, щоб виконувалась нерівність $\varphi(D_\tau V(X(\tau),\tau)) \geq 0$.

Теорему доведено.

Зауваження 2.2. Умова (2.3) має місце, якщо для деякої неперервної скалярної функції $\alpha(X,t)$ виконується конусна нерівність

$$D_tV(X,t) + \alpha(X,t)V(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad X \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0. \tag{2.4}$$

Наведемо приклади застосування теореми 2.1 при побудові інваріантних множин і, зокрема, конусів типу (2.1) для деяких класів систем.

Приклад 2.1. Розглянемо нелінійну систему

$$\dot{x} = A(x,t)\,x, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0. \tag{2.5}$$

Множину (2.1) визначимо за допомогою конуса невід'ємних векторів $\mathcal{K} = R^n_+$ і вектор-функції $V(x,t) = R(t)\,x$, де $R(t)$ — невироджена неперервно диференційовна матрична функція. Тоді умова (2.4) виконується, якщо для деякої функції $\alpha(x,t)$ всі елементи матриці

$$B_\alpha(t) = \dot{R}(t)R^{-1}(t) + R(t)[A(x,t) + \alpha(x,t)I]R^{-1}(t)$$

є невід'ємними функціями. Останнє обмеження зводиться до вигляду

$$b_{ij}(x,t) \geq 0, \quad i \neq j, \quad x \in \partial\mathcal{K}, \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

де $b_{ij}(x,t)$ — елементи матриці $B_\alpha(t)$ при $\alpha = 0$. В частинному випадку $R(t) \equiv I$ множина (2.1) є конусом $\mathcal{K}$, а нерівності (2.6) узагальнюють відомі умови позитивності лінійних систем відносно $\mathcal{K}$ [2].

Приклад 2.2. Розглянемо випадок, коли множину (2.1) описує функція

$$V(x,t) = x^T P(t)x + q^T(t)x + r(t),$$

де симетрична матриця $P(t)$, вектор-функція $q(t)$ і скалярна функція $r(t)$ є неперервними і диференційовними при $t \geq 0$. Нерівність (2.4), що забезпечує інваріантність цієї множини для системи (2.5), має вигляд

$$x^T P_\alpha(x,t)x + q_\alpha^T(x,t)x + r_\alpha(x,t) \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{2.7}$$

де

$$P_\alpha(x,t) = \dot{P}(t) + \alpha(x,t)P(t) + A^T(x,t)P(t) + P(t)A(x,t),$$

$$q_\alpha(x,t) = \dot{q}(t) + \alpha(x,t)q(t) + A^T(x,t)q(t),$$

$$r_\alpha(x,t) = \dot{r}(t) + \alpha(x,t)r(t).$$

Зокрема, можна вимагати, щоб виконувались співвідношення $P_\alpha(x,t) \geq 0$, $q_\alpha(x,t) \equiv 0$ і $r_\alpha(x,t) \geq 0$, з яких випливає інваріантність множини (2.1) у системі (2.5).

Приклад 2.3. Для нелінійної системи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x \in R^{n+1}, \quad t \geq 0, \tag{2.8}$$

побудуємо умови інваріантності змінного еліпсоїдального конуса $\mathcal{I}_t$, що описується у вигляді (2.1) за умов

$$V(x,t) = \begin{bmatrix} x^T Q(t)x \\ h^T(t)x \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K} = R^2_+,$$

де $h(t)$ — власний вектор симетричної матриці $Q(t)$ з інерцією $i(Q(t)) \equiv \{1, n, 0\}$, що відповідає її єдиному додатному власному значенню.

Перевіримо умову (2.3), де

$$D_tV(x,t) = \begin{bmatrix} x^T\dot{Q}(t)x + f^T(x,t)Q(t)x + x^TQ(t)f(x,t) \\ \dot{h}^Tx + h^T(t)f(x,t) \end{bmatrix}.$$

Для цього достатньо використати лише два функціонали із $\mathcal{K}^*$. Якщо $\varphi(y) = y_1$, то згідно з (2.3) отримаємо обмеження

$$x^T\dot{Q}(t)x + f^T(x,t)Q(t)x + x^TQ(t)f(x,t) \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{2.9}$$

де $\partial\mathcal{I}_t = \{x \in \mathcal{I}_t : x^TQ(t)x = 0\}$. Якщо взяти $\varphi(y) = y_2$, то одержимо нерівність

$$h^T(t)f(0,t) \geq 0, \quad t \geq 0. \tag{2.10}$$

Тут враховано той факт, що із $x^TQ(t)x \geq 0$ і $h^T(t)x = 0$ випливає $x = 0$. Таку властивість мають симетричні матриці із вказаною інерцією.

Умови (2.9) і (2.10) забезпечують інваріантність множини $\mathcal{I}_t$ в системі (2.8). Умова (2.10) завжди виконується для систем із нульовим положенням рівноваги, тобто $f(0,t) \equiv \equiv 0$. Такою є, наприклад, диференціальна система (2.5). Згідно з (2.4) маємо матричну нерівність

$$\dot{Q}(t) + \alpha(x,t)Q(t) + A^T(x,t)Q(t) + Q(t)A(x,t) \geq 0, \quad x \in \partial\mathcal{I}_t, \quad t \geq 0, \tag{2.11}$$

виконання якої із заданою неперервною функцією $\alpha(x,t)$ забезпечує інваріантність множини $\mathcal{I}_t$ для системи (2.5).

Нерівність (2.11) є узагальненням відомих умов інваріантності еліпсоїдального конуса для лінійних систем [3, 4].

Приклад 2.4. Розглянемо лінійну систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ \dot{u} &= C(t)x + D(t)u, \end{aligned} \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \quad t \geq 0, \tag{2.12}$$

де $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і $D(t)$ — матричні функції відповідних розмірів $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ і $m \times m$ з елементами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} і d_{ij}. Знайдемо умови інваріантності множини

$$\mathcal{I}_t = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} : \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s u_s \right\}, \tag{2.13}$$

де $\alpha(t) > 0$ — диференційовна функція. Ця множина є нормальним тілесним конусом і може мати вигляд (2.1) з оператором

$$V : R^{n+m} \times [t_0, \infty) \to R^{nm+m}, \quad V(x,u,t) = \begin{bmatrix} u_1^2e - x^2 \\ \vdots \\ u_m^2e - x^2 \\ u \end{bmatrix},$$

де $e = \alpha^2[1,\ldots,1]^T$, $x^2 = [x_1^2,\ldots,x_n^2]^T$. Роль конуса $\mathcal{K}$ в теоремі 2.1 відіграє конус невід'ємних векторів R_+^{nm+m}.

Перепишемо умову (2.3) у вигляді

$$V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad u_s = 0 \implies c_s^T x + d_s^T u \geq 0, \tag{2.14}$$

$$V(x,u,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \alpha^2 u_s^2 = x_k^2 \implies \alpha\dot{\alpha} u_s^2 + \alpha^2 u_s(c_s^T x + d_s^T u) - x_k(a_k^T x + b_k^T u) \geq 0, \tag{2.15}$$

де a_k^T, b_k^T, c_s^T і d_s^T — рядки відповідних матриць, $k = 1,\ldots,n,\ s = 1,\ldots,m$. В умові (2.14) $x = 0$, і вона зводиться до вигляду $d_{sj} \geq 0$, $j \neq s$. В умові (2.15) $|x_i| \leq |x_k| = \alpha u_s \leq \alpha u_j$ $\forall i,j$. Якщо $x_k > 0$, то (2.15) є наслідком співвідношень

$$\alpha d_{sj} - b_{kj} \geq 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i\neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|.$$

Дійсно,

$$\alpha\dot{\alpha} u_s^2 + \alpha^2 u_s(c_s^T x + d_s^T u) - x_k(a_k^T x + b_k^T u) = \alpha u_s w_{sk},$$

$$w_{sk} = [\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks}]\, u_s + \sum_{i\neq k}(\alpha c_{si} - a_{ki})x_i + \sum_{j\neq s}(\alpha d_{sj} - b_{kj})u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \alpha d_{ss} - b_{ks} - \alpha \sum_{i\neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\right] u_s + \sum_{j\neq s}(\alpha d_{sj} - b_{kj})u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot{\alpha} + \alpha(\alpha c_{sk} - a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} - b_{kj}) - \alpha \sum_{i\neq k} |\alpha c_{si} - a_{ki}|\right] u_s \geq 0.$$

Якщо $x_k < 0$, то із (2.15) отримуємо обмеження на коефіцієнти

$$\alpha d_{sj} + b_{kj} \geq 0, \quad j \neq s,$$

$$\dot{\alpha} - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \sum_j (\alpha d_{sj} + b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i\neq k} |\alpha c_{si} + a_{ki}|,$$

використовуючи аналогічні оцінки

$$w_{sk} = [\dot\alpha - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \alpha d_{ss} + b_{ks}]\, u_s + \sum_{i\neq k}(\alpha c_{si} + a_{ki})x_i + \sum_{j\neq s}(\alpha d_{sj} + b_{kj})u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot\alpha - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \alpha d_{ss} + b_{ks} - \alpha \sum_{i\neq k}|\alpha c_{si} + a_{ki}|\right] u_s + \sum_{j\neq s}(\alpha d_{sj} + b_{kj})u_j \geq$$

$$\geq \left[\dot\alpha - \alpha(\alpha c_{sk} + a_{kk}) + \sum_{j}(\alpha d_{sj} + b_{kj}) - \alpha \sum_{i\neq k}|\alpha c_{si} + a_{ki}|\right] u_s \geq 0.$$

Отже, необхідні та достатні умови позитивності системи (2.12) відносно конуса (2.13) мають вигляд

$$\begin{gathered} \alpha d_{sj} \geq |b_{kj}|, \quad j \neq s, \\ \dot\alpha \pm \alpha(\alpha c_{sk} \mp a_{kk}) + \textstyle\sum_j(\alpha d_{sj} \mp b_{kj}) \geq \alpha \sum_{i\neq k}|\alpha c_{si} \mp a_{ki}|, \end{gathered} \tag{2.16}$$

де $k, i = \overline{1, n}$, $s, j = \overline{1, m}$. Для встановлення необхідності даних умов слід покласти

$$x_k = \pm\alpha\, u_s, \quad x_i = -\mathrm{sign}(\alpha c_{si} \mp a_{ki})\alpha u_s, \quad i \neq k,$$

та розглянути такі випадки: 1) всі компоненти вектора u збігаються між собою, 2) одна із компонент u значно перевищує всі інші компоненти.

Кожній функції $\alpha(t) > 0$, що задовольняє систему нерівностей (2.16), відповідає інваріантний конус (2.13) системи (2.12).

Зазначимо, що систему нерівностей (2.16) можна використовувати при побудові керування у вигляді динамічного компенсатора, що забезпечує позитивну стабілізацію системи (2.12).

3. Диференціальні системи вищих порядків. Розглянемо диференціальну систему $(s+$ $+1)$-го порядку

$$X^{(s+1)} = F(X, X^{(1)}, \ldots, X^{(s)}, t), \quad X \in \mathcal{X}, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

де $F : \mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{X}$ — оператор, що задовольняє умови існування та єдиності розв'язку $X(t) = X^{(0)}(t)$ з початковими умовами $X^{(i)}(t_0) = X_0^{(i)} \in \Omega_i$, $i = 0, \ldots, s$. Повний стан системи характеризують функції $X^{(i)}(t)$, що задовольняють диференціальну систему першого порядку

$$\begin{array}{rcl} \dot X_0 & = & X_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot X_{s-1} & = & X_s, \\ \dot X_s & = & F(X_0, \ldots, X_s, t). \end{array} \tag{3.2}$$

Тому інваріантні множини системи (3.1) будемо визначати у розширеному фазовому просторі, тобто у просторі системи (3.2), у вигляді

$$\mathcal{I}_t = \left\{ (X_0, \ldots, X_s) \in \mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X} : \ V(X_0, \ldots, X_s, t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0 \right\}, \tag{3.3}$$

де $V : \mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$ — деякий оператор, $\overset{\mathcal{K}}{\geq}$ — нерівність, породжена заданим конусом або клином $\mathcal{K}$ у просторі $\mathcal{E}$. Множину $\mathcal{I}_t$ будемо називати інваріантною множиною системи (3.1), якщо її розв'язки $X(t)$ мають властивість

$$(X_0^{(0)}, \ldots, X_0^{(s)}) \in \mathcal{I}_{t_0} \implies (X^{(0)}(t), \ldots, X^{(s)}(t)) \in \mathcal{I}_t, \quad t > t_0 \geq 0.$$

Будемо припускати, що функція V неперервна разом зі своїми частинними похідними в області $\Omega_0 \times \ldots \times \Omega_s \times [0, \infty)$, і побудуємо оператор диференціювання $D_t V(X_0, \ldots, X_s, t)$ в силу системи (3.2).

Теорема 3.1 *Нехай $\mathcal{K}$ — тілесний конус. Тоді $\mathcal{I}_t$ є інваріантною множиною системи (3.1) тоді і тільки тоді, коли при кожному $t \geq 0$ виконується умова*

$$(X_0, \ldots, X_s) \in \mathcal{I}_t, \ \varphi(V(X_0, \ldots, X_s, t)) = 0 \implies \varphi(D_t V(X_0, \ldots, X_s, t)) \geq 0, \tag{3.4}$$

де $\varphi \in \mathcal{K}^*$.

Доведення теорем 3.1 і 2.1 аналогічні. Оскільки системи (3.1) і (3.2) еквівалентні, то теорему 3.1 можна вважати наслідком теореми 2.1.

Приклад 3.1. Розглянемо диференціальну систему другого порядку

$$\ddot{x} + B(t)\dot{x} + A(t)x = 0, \tag{3.5}$$

де $A(t)$ і $B(t)$ — обмежені матриці. Побудуємо систему (3.2) і функцію V, що описує множину $\mathcal{I}_t$ типу (3.3), у вигляді

$$\dot{z} = M(t)z, \quad V(x, y, t) = z^T Q(t) z,$$

де

$$M(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A(t) & -B(t) \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} P(t) & L^T(t) \\ L(t) & R(t) \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Вираховуючи вираз

$$D_t V(x, y, t) + \alpha V(x, y, t) = z^T(\dot{Q} + \alpha Q + M^T Q + QM)z = z^T H z,$$

маємо достатні умови інваріантності множини $\mathcal{I}_t$ для системи (3.1) у вигляді матричної нерівності

$$H = \begin{bmatrix} \dot{P} + \alpha P - A^T L - L^T A & \dot{L}^T + \alpha L^T - L^T B - A^T R + P \\ \dot{L} + \alpha L - B^T L - RA + P & \dot{R} + \alpha R - B^T R - RB + L + L^T \end{bmatrix} \geq 0. \tag{3.6}$$

Тут для спрощення не враховано залежність від аргументів усіх параметрів.

Розглянемо випадок автономної системи і покладемо

$$Q = \begin{bmatrix} S + B^T RB & B^T R \\ RB & R \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

де S і R — симетричні матриці. Тоді нерівність (3.6) набирає вигляду

$$H = \begin{bmatrix} \alpha(S + B^T RB) - A^T RB - B^T RA & \alpha B^T R + S - A^T R \\ \alpha RB + S - RA & \alpha R \end{bmatrix} \geq 0.$$

Застосуємо відомий критерій невід'ємної визначеності блочної матриці з невиродженим діагональним блоком:

$$\begin{bmatrix} P & L^T \\ L & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad R > 0, \quad P \geq L^T R^{-1} L.$$

Стосовно матриці H отримаємо наступний результат.

Наслідок 3.1. *Нехай $R = R^T < 0$ і для деякого $\alpha < 0$ виконується матрична нерівність*

$$\alpha^2 S - \alpha(B^T S + SB) - (S - A^T R)R^{-1}(S - RA) \leq 0. \tag{3.8}$$

Тоді автономна система (3.5) має інваріантну множину

$$\mathcal{I} = \{(x, y) \in R^n \times R^n : \; x^T(S + B^T RB)x + 2y^T RBx + y^T Ry \geq 0\}. \tag{3.9}$$

Зауваження 3.1. При умові $S < 0$ завжди існує таке $\alpha < 0$, що задовольняє нерівність (3.8). Але в цьому випадку $Q < 0$ і $\mathcal{I} = \{0\}$. Якщо $i(S) = \{1, n-1, 0\}$, то $i(Q) = \{1, 2n-1, 0\}$ і множина (3.9) є об'єднанням двох протилежних еліпсоїдальних конусів у розширеному фазовому просторі системи (3.5). Цікавим є також випадок, коли $S = A^T R + RA > 0$. Тоді вираз (3.8) дещо спрощується, і при умовах наслідку 3.1 за теоремою Ляпунова необхідно, щоб матриці A і B були гурвіцевими.

Наслідок 3.2. *Якщо для деякої функції $\alpha(t)$ при $t \geq 0$ виконуються система нерівностей*

$$\begin{gathered} b_{sj}(t) \leq -\frac{1}{\alpha(t)} < 0, \quad j \neq s, \\ \dot{\alpha}(t) - \alpha(t) \sum_j b_{sj}(t) \geq |\alpha^2(t) a_{sk}(t) + 1| + \alpha^2(t) \sum_{i \neq k} |a_{si}(t)|, \end{gathered} \tag{3.10}$$

де $i, j, k, s = \overline{1, n}$, то система (3.5) має інваріантний конус

$$\mathcal{I}_t = \left\{(x, y) \in R^n \times R^n : \; \max_k |x_k| \leq \alpha(t) \min_s y_s \right\}. \tag{3.11}$$

Останнє твердження є наслідком критерію (2.16) позитивності системи (2.12) (див. приклад 2.4).

4. Порівняння та впорядкування диференціальних систем. У теорії стійкості динамічних систем застосовуються методи порівняння, що базуються на відображенні простору станів головної системи в простір станів допоміжної системи порівняння (див., наприклад, [7, 8]). Системи порівняння будуються в класах позитивних або монотонних систем відносно заданих конусів. Змінні за часом конуси в задачах порівняння запропоновано в [5].

Наведемо узагальнену методику порівняння диференціальних систем, яка є наслідком викладеного методу побудови інваріантних множин (п. 2). Ця методика дозволяє порівнювати динамічні властивості двох і більше динамічних систем, що функціонують у різних просторах.

Розглянемо сім'ю незалежних систем

$$(\mathcal{S}_i): \quad \dot{X}_i = F_i(X_i, t), \quad X_i \in \mathcal{X}_i, \ t \geq 0, \ i = \overline{1, s}. \tag{4.1}$$

Для спрощення запису введемо наступні позначення:

$$X = (X_1, \ldots, X_s), \quad F(X,t) = (F_1(X_1,t), \ldots, F_s(X_s,t)), \quad \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_s.$$

Нехай $\mathcal{E}$ — деякий простір, що містить клин $\mathcal{K}$, і задано оператор $W : \mathcal{X} \times [0, \infty) \to \mathcal{E}$. Припустимо, що кожній початковій умові $X(t_0) = X_0 \in \Omega$ відповідає єдиний розв'язок $X(t)$ сім'ї систем (4.1) в деякій області $\Omega \subset \mathcal{X}$ при $t \geq t_0 \geq 0$, а $W(X,t)$ є неперервною функцією разом зі своїми частинними похідними в області $\widehat{\Omega} = \Omega \times [0, \infty)$. Крім того, доцільно вважати, що оператор W не є скрізь позитивним відносно $\mathcal{K}$.

Означення 4.1. *Системи (4.1) називаємо порівнянними, якщо для довільного $t_0 \geq 0$ виконується умова*

$$W(X(t_0), t_0) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0 \implies W(X(t), t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad t > t_0. \tag{4.2}$$

При цьому W є оператором порівняння даних систем.

Побудуємо оператор диференціювання $D_t W(X,t)$ в силу систем (4.1) і сформулюємо наступний результат.

Теорема 4.1. *Нехай $\mathcal{K}$ — тілесний конус. Тоді системи (4.1) є порівнянними тоді і тільки тоді, коли при кожному $t \geq 0$ виконується умова*

$$W(X,t) \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0, \quad \varphi \in \mathcal{K}^*, \quad \varphi(W(X,t)) = 0 \implies \varphi(D_t W(X,t)) \geq 0. \tag{4.3}$$

Останнє твердження є очевидним наслідком теореми 2.1.

Сформулюємо основні твердження відомого принципу порівняння для двох і трьох систем з нульовими положеннями рівноваги, які можна вважати наслідками теореми 4.1.

Нехай спочатку $s = 2$. Покладемо $W(X,t) = X_2 - V(X_1,t)$, де $V : \mathcal{X}_1 \times [0, \infty) \to \mathcal{X}_2$ — скрізь позитивний оператор відносно нормального тілесного конуса $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}_2$. Тоді із конусної нерівності

$$D_t V(X_1, t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} F_2(V(X_1,t), t) \tag{4.4}$$

і належності F_2 класу квазімонотонних операторів $F \in \mathcal{F}$, що визначається умовою (1.3) з конусом $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$, випливає наступна властивість розв'язків систем:

$$0 \overset{\mathcal{K}}{\le} V(X_1(t_0), t_0) \overset{\mathcal{K}}{\le} X_2(t_0) \implies 0 \overset{\mathcal{K}}{\le} V(X_1(t), t) \overset{\mathcal{K}}{\le} X_2(t), \;\; t > t_0 \ge 0.$$

Це означає, що виконується умова (4.2), тобто системи (4.1) є порівнянними в сенсі означення 4.1.

Припустимо, що оператор порівняння V має додаткові властивості

$$V(0, t) \equiv 0, \quad \|V(X, t)\| \ge v(X) > 0, \quad X \ne 0, \quad t \ge 0, \tag{4.5}$$

де $v(x) \ge 0$ — неперервна функція така, що $v(0) = 0$ і $v(X) \le v(Y) \Longrightarrow \|X\| \le \|Y\|$. Тоді має місце наступне твердження.

Теорема 4.2. *Нехай скрізь позитивний оператор V задовольняє співвідношення (4.4), (4.5), причому $F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1(0, t) \equiv F_2(0, t) \equiv 0$. Тоді розв'язок $X_1 \equiv 0$ системи $(\mathcal{S}_1)$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стійким (асимптотично стійким) в $\mathcal{K}$ є розв'язок $X_2 \equiv 0$ системи $(\mathcal{S}_2)$.*

Розглянемо випадок $s = 3$ і побудуємо оператор порівняння у блочному вигляді

$$W(X, t) = [V(X_2, t) - X_1, \; X_3 - V(X_2, t)],$$

де $V : \mathcal{X}_2 \times [0, \infty) \to \mathcal{X}_1$ — деякий оператор. Нехай простори $\mathcal{X}_1$ і $\mathcal{X}_3$ збігаються і містять нормальний тілесний конус $\mathcal{K}_1$. Тоді якщо $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_3 \in \mathcal{F}$ і виконуються конусні нерівності

$$F_1(V(X_2, t), t) \overset{\mathcal{K}_1}{\le} D_t V(X_2, t) \overset{\mathcal{K}_1}{\le} F_3(V(X_2, t), t), \tag{4.6}$$

то розв'язки системи $(\mathcal{S}_2)$ можна порівняти з розв'язками систем $(\mathcal{S}_1)$ і $(\mathcal{S}_3)$ у вигляді

$$X_1(t_0) \overset{\mathcal{K}_1}{\le} V(X_2(t_0), t_0) \overset{\mathcal{K}_1}{\le} X_3(t_0) \implies X_1(t) \overset{\mathcal{K}_1}{\le} V(X_2(t), t) \overset{\mathcal{K}_1}{\le} X_3(t), \;\; t > t_0 \ge 0.$$

Це означає, що виконується умова (4.2) з конусом $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_1$, тобто системи (4.1) є порівнянними за означенням 4.1. Легко бачити, що в цьому випадку умова (4.3) є наслідком співвідношень (4.6) і припущень відносно F_1 і F_3. При умові (4.2) система $(\mathcal{S}_1)$ є нижньою, а система $(\mathcal{S}_3)$ — верхньою системою порівняння для системи $(\mathcal{S}_2)$ (див., наприклад, [5, 8]).

Теорема 4.3. *Нехай оператор V задовольняє співвідношення (4.5), (4.6), причому $F_1 \in \mathcal{F}$, $F_3 \in \mathcal{F}$ і $F_i(0, t) \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$. Тоді розв'язок $X_2 \equiv 0$ системи $(\mathcal{S}_2)$ стійкий (асимптотично стійкий) за Ляпуновим, якщо стійким (асимптотично стійким) в $-\mathcal{K}_1$ є розв'язок $X_1 \equiv 0$ системи $(\mathcal{S}_1)$ і стійким (асимптотично стійким) в $\mathcal{K}_1$ є розв'язок $X_3 \equiv 0$ системи $(\mathcal{S}_3)$.*

Зазначимо, що теореми 4.2 і 4.3 виконуються також при відповідних умовах $F_2 \in \overline{\mathcal{F}}_2$ і $F_1 \in \underline{\mathcal{F}}_1$, $F_3 \in \overline{\mathcal{F}}_1$, де $\overline{\mathcal{F}}_2$, $\underline{\mathcal{F}}_1$ і $\overline{\mathcal{F}}_1$ — деякі більш загальні класи операторів, означені за допомогою змінного нормального відтворюючого конуса $\mathcal{K}_t$ [5].

Задачі *впорядкування* і виявлення *домінуючої* (у певному розумінні) системи сім'ї $s \geq 2$ незалежних систем формулюються у вигляді загальної задачі порівняння. Дійсно, розглянемо блочний оператор

$$W(X,t) = \left[\; V_2(X_2,t) - V_1(X_1,t), \;\; \ldots \;\; , V_s(X_s,t) - V_{s-1}(X_{s-1},t) \;\right], \tag{4.7}$$

де $V_i : \mathcal{X}_i \times [0,\infty) \to \mathcal{E}_1$, $i = \overline{1,s}$, — деякі оператори. Нехай простір $\mathcal{E}_1$ містить клин $\mathcal{K}_1$ і виконується властивість порівняння систем (4.2), де $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \times \ldots \times \mathcal{K}_1$. Тоді розв'язки сім'ї систем (4.1) впорядковані у вигляді

$$V_1(X_1(t),t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} V_2(X_2(t),t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} \ldots \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} V_s(X_s(t),t), \quad t > t_0, \tag{4.8}$$

при умові, що дане впорядкування виконується в довільний початковий момент $t = t_0 \geq$ ≥ 0. Зокрема, якщо $V_i(X_i,t) = \|X_i\|_{\mathcal{X}_i}$ — норма у просторі $\mathcal{X}_i$, то розв'язки систем (4.1) впорядковані за нормами

$$\|X_1(t_0)\|_{\mathcal{X}_1} \leq \ldots \leq \|X_s(t_0)\|_{\mathcal{X}_s} \quad \Longrightarrow \quad \|X_1(t)\|_{\mathcal{X}_1} \leq \ldots \leq \|X_s(t)\|_{\mathcal{X}_s}, \quad t > t_0.$$

У випадку тотожних операторів $V_i = E$ будемо мати

$$X_1(t_0) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} \ldots \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_s(t_0) \quad \Longrightarrow \quad X_1(t) \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} \ldots \overset{\mathcal{K}_1}{\leq} X_s(t), \;\; t > t_0.$$

При цьому система $(\mathcal{S}_s)$ є домінуючою в сім'ї систем (4.1).

У випадку тілесного конуса $\mathcal{K}$ теорема 4.1 дає критерій вказаного типу впорядкування сім'ї систем (4.1) у вигляді (4.3).

Приклад 4.1. Розглянемо сім'ю систем

$$\dot{X}_i = A_i(X_i,t)X_i, \;\; X_i \in R^{n_i}, \;\; t \geq 0, \quad i = \overline{1,s}, \tag{4.9}$$

де A_i — матриці розмірів $n_i \times n_i$, неперервно залежні від X_i і t.

Задамо оператор (4.7), поклавши

$$V_i(X_i,t) = X_i^T Q_i(t) X_i, \quad Q_i(t) \equiv Q_i^T(t), \quad i = \overline{1,s}.$$

Тоді

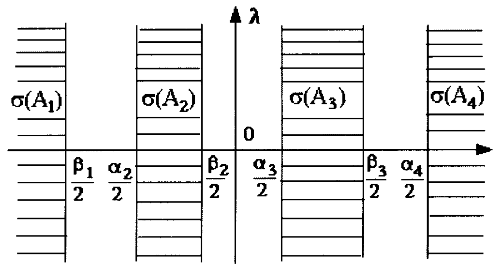
$$\lambda_{\min}(H_i) X_i^T X_i \leq D_t V_i(X_i,t) = X_i^T H_i X_i \leq \lambda_{\max}(H_i) X_i^T X_i,$$

де $H_i = A_i^T Q_i + Q_i A_i + \dot{Q}_i$. Застосовуючи теорему 4.1, можна встановити, що для впорядкованості систем (4.9) у вигляді (4.8) з конусом $\mathcal{K} = R_+^{s-1}$ достатньо, щоб в області $\widehat{\Omega}$ виконувались співвідношення

$$H_j \leq \beta_j Q_j, \quad \alpha_{j+1} Q_{j+1} \leq H_{j+1}, \quad \beta_j \leq \alpha_{j+1}, \quad j = \overline{1, s-1}, \tag{4.10}$$

де $\beta_j(X_j,t)$ і $\alpha_{j+1}(X_{j+1},t)$ — деякі неперервні скалярні функції. Якщо всі матриці $Q_i > 0$ є додатно визначеними, то в (4.10) виконуються оцінки

$$\beta_j \geq \lambda_{\max}(H_j - \lambda Q_j), \quad \alpha_{j+1} \leq \lambda_{\min}(H_{j+1} - \lambda Q_{j+1}), \quad j = \overline{1, s-1},$$



Області можливого розміщення спектрів $\sigma(A_i)$
при умовах впорядкованості (4.10) $s = 4$ систем.

де $\lambda_{\max}(\cdot)$ ($\lambda_{\min}(\cdot)$) — максимальне (мінімальне) власне значення відповідної в'язки матриць. У цьому випадку маємо достатні умови впорядкованості систем (4.9) у вигляді (4.8):

$$\lambda_{\max}(H_j - \lambda Q_j) \leq \lambda_{\min}(H_{j+1} - \lambda Q_{j+1}), \quad j = \overline{1, s-1}.$$

Нехай всі матриці Q_i не залежать від часу і є додатно визначеними. Тоді при виконанні матричних нерівностей в (4.10) спектри матриць A_i повинні бути розміщені у відповідних областях (рисунок), причому сусідні області можуть мати спільні точки лише на лініях границь.

Якщо $Q_i \equiv I$ і в області $\widehat{\Omega}$ виконуються нерівності

$$\lambda_{\max}(A_j^T + A_j) \leq \lambda_{\min}(A_{j+1}^T + A_{j+1}), \quad j = \overline{1, s-1},$$

то розв'язки систем (4.9) впорядковані за евклідовою нормою, тобто

$$\|X_1(t_0)\| \leq \ldots \leq \|X_s(t_0)\| \quad \Longrightarrow \quad \|X_1(t)\| \leq \ldots \leq \|X_s(t)\|, \quad t > t_0.$$

1. *Hirsch M. W., Smith H.* Competitive and cooperative systems: mini-review. Positive systems // Lect. Notes Control and Inform. Sci.— 2003.— **294**.— P. 183 – 190.
2. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 256 с.
3. *Stern R. J., Wolkowicz H.* Invariant ellipsoidal cones // Linear Algebra and Appl. — 1991.— **150**. — P. 81 – 106.
4. *Алілуйко А. М., Мазко О. Г.* Інваріантні конуси та стійкість багатозв'язних систем // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — **2**, № 1. — С. 28 – 45.
5. *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение состояний динамических систем относительно переменного конуса // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 2. — С. 198 – 213.
6. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. — М.: Физматгиз, 1962. — 233 с.
7. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. — Новосибирск: Наука, 1980. — 480 с.
8. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. — Киев: Наук. думка, 1991. — 248 с.

Одержано 19.10.2006