УДК 517.9

ПРО ГЛОБАЛЬНУ СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНОГО ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

О. І. Неня

Київ. нац. економ. ун-т
Україна, 03680, Київ, просп. Перемоги, 54/1

В. І. Ткаченко

Ін-математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We give sufficient conditions for global stability of the zero solution of a functional-differential equation with impulsive effect and a nonlinear function satisfying the negative feedback condition and having sublinear growt.

Приведены достаточные условия глобальной устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения с импульсным воздействием и нелинейной функцией, удовлетворяющей условиям отрицательной обратной связи и подлинейного роста.

1. Вступ та основні результати. Позначимо через $\mathcal{PC}([a,b],\mathbb{R})$ банаховий простір означених на відрізку $[a,b]$ кусково-неперервних неперервних справа функцій зі значеннями в $\mathbb{R}$ та зі скінченною кількістю розривів. Уведемо стандартну норму в $\mathcal{PC}$ формулою

$$\|\varphi\|_0 = \sup_{\theta\in[a,b]} |\varphi(\theta)|.$$

Простір $\mathcal{PC}([-h,0],\mathbb{R})$ будемо позначати через $\mathcal{C}$.

Для дійсного t_0 і додатного A розглянемо функцію $x(t) \in \mathcal{PC}([t_0-h, t_0+A],\mathbb{R})$. Для $t\in[t_0, t_0+A]$ означимо $x_t\in\mathcal{C}$ співвідношенням

$$x_t(\theta) = x(t+\theta),\ -h\le\theta\le 0.$$

Розглянемо нелінійне функціонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = -\delta x(t) + f(t, x_t), \tag{1}$$

$$x(t_k) = x(t_k-0) + b_k x(t_k-0), \tag{2}$$

де $x\in\mathbb{R},\ \delta>0$, послідовність точок імпульсної дії $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ задовольняє умови $t_k - t_{k-1} \ge \ge \theta > 0,\ k\in\mathbb{Z}, b_k\in(-1,b], b\ge 0$. Функціонал $f(t,x_t)$ задовольняє умову

$$a\mathcal{M}(\varphi) \le f(t,\varphi) \le -a\mathcal{M}(-\varphi), \tag{3}$$

де $\mathcal{M}(\varphi) = \max\{0, \sup_{s\in[-h,0]} \varphi(s)\},\ a < 0.$

Функціонально-диференціальні рівняння (1) з різними типами нелінійностей з'являються в математичній біології при моделюванні еволюції біологічних видів та фізіологічних процесів (див., наприклад, [1–3]). Імпульсна дія характеризує короткочасні зовнішні впливи на систему [4, 5].

Нуль є єдиною нерухомою точкою рівняння (1), (2).

Знаходження умов глобальної стійкості функціонально-диференціального рівняння (1) – важлива для застосувань задача [6–8]. У роботі [9] наведено умови стійкості лінійного диференціального рівняння з запізненням та імпульсами. В роботах [10–16] досліджується глобальна стійкість функціонально-диференціального рівняння з імпульсною дією вигляду (1), (2) при $\delta = 0$.

У даній роботі для знаходження умов глобальної стійкості рівняння (1), (2) ми використовуємо ідеї робіт [7, 17].

Означення 1. *Функцію $x(t) \in \mathcal{PC}([-h, \alpha], \mathbb{R})$, де $\alpha > 0$, називаємо розв'язком рівняння (1), (2), якщо:*

i) $x(t)$ неперервна при всіх $t \neq t_j$;

ii) $x(t)$ неперервно диференційовна для всіх $t \in [-h, \alpha]$, за винятком скінченної кількості точок;

iii) правостороння похідна функції $x(t)$ існує і задовольняє рівняння (1) для всіх $t \neq t_j$;

iv) при $t = t_j$ функція $x(t)$ задовольняє співвідношення (2).

Вважаємо розв'язок неперервною справа функцією.

Наведемо достатню умову існування розв'язку рівняння (1), (2) [18].

Теорема 1. *Нехай функція $f(t, x_t)$ задовольняє умови:*

H_1) для кожної неперервної при $t \neq t_j$ функції $x(t) \in \mathcal{PC}([-h, \alpha], \mathbb{R})$ функція $g(t) = f(t, x_t)$ належить простору $\mathcal{PC}([-h, \alpha], \mathbb{R})$;

H_2) для кожного компакту $F \subset \mathbb{R}$ існує число $M > 0$ таке, що $|f(t, \psi)| \leq M$ для всіх $\psi \in \mathcal{PC}([-h, \alpha], F)$;

H_3) функція $f(t, \psi)$ локально ліпшицева по ψ.

Тоді для кожної початкової функції $\varphi \in \mathcal{C}$ існує єдиний розв'язок рівняння (1), (2) при $t \in [-h, \beta]$ для деякого $\beta \leq \alpha$.

Легко перевірити, що теорема 1 виконується для рівняння (1), (2) зі сталим запізненням чи кількома сталими запізненнями $f(t, x_t) = f_1(t, x(t-h_1), \ldots, x(t-h_k))$, де $h_1, \ldots, h_k$ — додатні сталі.

Відповідне рівнянню (1), (2) лінійне імпульсне рівняння

$$\dot{x}(t) = -\delta x(t), \tag{4}$$

$$x(t_k) = (1 + b_k)x(t_k - 0) \tag{5}$$

має фундаментальний розв'язок

$$U(t, \tau) = e^{-\delta(t-\tau)} \prod_{\tau < t_k \leq t} (1 + b_k),\ t \geq \tau.$$

При $t < \tau$ розв'язок $U(t,\tau)$ означаємо як $(U(\tau,t))^{-1}$, тобто

$$U(t,\tau) = e^{-\delta(t-\tau)} \prod_{t<t_k\leq\tau} (1+b_k)^{-1},\ t<\tau.$$

Позначимо

$$P = \inf_{\bar h\in[0,h]} \inf_{t\geq 0} U(t, t-\bar h), \quad Q = \sup_{t\geq 0} \int\limits_{t-h}^{t} U(t,s)ds.$$

Тепер ми можемо сформулювати перше твердження про глобальну стійкість нульового розв'язку рівняння (1), (2).

Теорема 2. *Нехай рівняння (1), (2) задовольняє умови*

$$1+b < e^{\delta\theta}, \tag{6}$$

$$-(1+b)^N aQ(1-P\delta/a)^{-1} < 1, \tag{7}$$

де $N = [h/\theta]+1,\ [\cdot]$ — *ціла частина числа.*

Тоді нульовий розв'язок рівняння є глобально асимптотично стійким, а саме, існують сталі $\gamma > 0$ *і* $K \geq 1$ *такі, що для всіх ненульових розв'язків виконується нерівність*

$$|x(t)| \leq Ke^{-\gamma(t-s)} \sup_{\theta\in[s-h,s]} |x(\theta)|, \quad t\geq s. \tag{8}$$

Далі для знаходження умов глобальної стійкості рівняння (1), (2) означимо функцію порівняння

$$y(t,\tau,-M) = \begin{cases} -M, & t<\tau-h, \\ -M, & t\in[\tau-h,\tau],\ a\int\limits_{\tau}^{t} U(t,s)ds > 1, \\ -aM\int\limits_{\tau}^{t} U(t,s)ds, & t\in[\tau-h,\tau],\ a\int\limits_{\tau}^{t} U(t,s)ds \leq 1, \\ a\int\limits_{\tau}^{t} U(t,s)\inf\limits_{\xi\in[s,\tau]} y(\xi,\tau,-M)ds, & t\in[\tau,\tau+h], \end{cases}$$

де $M > 0$. Функція $y(t,\tau,-M)$ диференційовна при $t \neq t_j$, а в точках імпульсів вона має лівосторонні та правосторонні похідні. Легко перевірити, що похідна $y(t,\tau,-M)$ по t при $t=\tau$ є додатною, а при $t=\tau+h$ — недодатною. Тому існує інтервал $(\tau,\beta(\tau))$ такий, що

$y(t, \tau, -M) > 0$ для $t \in (\tau, \beta(\tau))$, і на інтервалі $[\tau, \tau + h]$ існує точка $\tilde{t}(\tau)$ з однією з двох властивостей:

a) $y'(\tilde{t}(\tau), \tau, -M) = 0$,

b) якщо точка $\tilde{t}(\tau)$ збігається з точкою імпульсу, то лівостороння похідна розв'язку $y(t, \tau, -M)$ в точці $\tilde{t}(\tau)$ є додатною, а правостороння похідна — недодатною.

Аналогічно для функції $y(t, \tau, M)$ з додатним M існують точки $\beta(\tau)$ і $\tilde{t}(\tau) \in (\tau, \tau + h]$ такі, що $y(t, \tau, M) < 0, t \in (\tau, \beta(\tau))$, і виконується одна з двох умов:

a′) $y'(\tilde{t}(\tau), \tau, M) = 0$,

b′) якщо точка $\tilde{t}(\tau)$ збігається з точкою імпульсу, то лівостороння похідна розв'язку $y(t, \tau, -M)$ в точці $\tilde{t}(\tau)$ є від'ємною, а правостороння похідна — невід'ємною.

Позначимо через $r(\tau)$ величину

$$\frac{1}{M} y(\tilde{t}(\tau), \tau, -M),$$

чи найбільшу з таких величин, якщо точка $\tilde{t}(\tau)$ з наведеними вище властивостями не одна на інтервалі $[\tau, \tau + h]$.

Легко бачити, що $r(\tau)$ не залежить від M.

Теорема 3. *Нехай рівняння (1), (2) задовольняє умови (6) і*

$$(1 + b)^N \sup_{\tau \in \mathbb{R}^+} r(\tau) < 1, \tag{9}$$

де $N = [h/\theta] + 1,\ [\cdot]$ — *ціла частина числа.*

Тоді нульовий розв'язок рівняння є глобально асимптотично стійким і для ненульових розв'язків рівняння справедливі оцінки (8).

Наслідок 1. *Нехай фундаментальний розв'язок* $U(t, \tau)$ *задовольняє оцінки*

$$K_0 e^{-c_0(t-s)} \leq U(t, s) \leq K_1 e^{-c_1(t-s)},\ t \geq s, \tag{10}$$

зі сталими $0 < K_0 \leq 1 \leq K_1,\ c_0 > c_1 > 0$.

Якщо виконується нерівність

$$e^{-c_0(\xi - h)} \leq 1 + \frac{K_0 c_0 c_1}{(1 + b)^N a^2 K_1},$$

де

$$\xi - h = \frac{1}{c_1 - c_0} \ln \left(\frac{K_0(c_1 - c_0)e^{-c_1 h}}{-a} + \left(\frac{-a + K_0 c_0}{-a} \right)^{1 - c_1/c_0} \right),$$

то нульовий розв'язок рівняння є глобально асимптотично стійким.

Наслідок 2. *Нехай фундаментальний розв'язок* $U(t, \tau)$ *задовольняє оцінки*

$$K_0 e^{-c(t-s)} \leq U(t, s) \leq K_1 e^{-c(t-s)},\ t \geq s,$$

зі сталими $0 < K_0 \leq 1 \leq K_1,\ c > 0$.

Якщо виконується нерівність

$$e^{-ch} > -\frac{a}{K_0 c} \ln \frac{(a^2 - K_0 ca)K_1(1+b)^N}{K_0 c^2 + a^2 K_1 (1+b)^N},$$

то нульовий розв'язок рівняння є глобально асимптотично стійким.

Зауваження 1. Теореми та наслідки залишаються справедливими при менш обмежувальних умовах існування розв'язків рівняння (1), (2), коли під розв'язком розуміють абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$ функцію, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь і задовольняє умови імпульсів (2).

2. Доведення теореми 2. Доведення розіб'ємо на кілька етапів.

Лема 1. *Якщо для деякого розв'язку $x(t)$ рівняння (1), (2) для всіх $t \geq \bar{t}$, де $\bar{t}$ — деяке додатне число, виконується одна з умов*

$$x(t) > 0,\ x'(t) \leq 0,$$

$$x(t) < 0,\ x'(t) \geq 0,$$

то $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Доведення. Доведемо лему при виконанні першої умови. Оскільки $x(t) > 0$, з умови (3) випливає $f(t, x_t) \leq 0$. Тому при $t > \bar{t} + h$

$$\dot{x}(t) \leq -\delta x(t),\ x(t_k + 0) = x(t_k) + b_k x(t_k).$$

Звідси отримуємо

$$x(t) < x(\bar{t}) e^{-\delta(t-\bar{t})} \prod_{\bar{t} < t_k \leq t} (1 + b_k) \leq x(\bar{t}) \left(e^{-\delta\theta}(1+b)\right)^{([(t-\bar{t})/\theta]+1)}.$$

Права частина останньої нерівності прямує до нуля при $t \to \infty$, оскільки $e^{-\delta\theta}(1+b) < 1$ за умовою (6).

Лему доведено.

Лема 2. *Якщо для розв'язку $x(t)$ рівняння (1), (2) виконується умова $x(\tilde{t}) > 0,\ x'(\tilde{t}) \geq 0$, то $\mathcal{M}(-x_{\tilde{t}}) > 0$.*

Відповідно, якщо виконується умова $x(\bar{t}) < 0,\ x'(\bar{t}) \leq 0$, то $\mathcal{M}(x_{\tilde{t}}) > 0$.

Доведення. Розглянемо перший випадок. Припустимо від супротивного, що $x(s) \geq 0$ для всіх $s \in [\tilde{t} - h, \tilde{t}]$. Тоді $f(\tilde{t}, x_{\tilde{t}}) \leq 0$ і $x'(\tilde{t}) \leq -\delta x(\tilde{t}) < 0$, суперечність.

Другий випадок доводиться аналогічно.

Лема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді існує $q < 1$ таке, що для кожного розв'язку $x(t) : [-h, \infty) \to \mathbb{R}$ виконується*

$$|x(t)| \leq q \sup_{\xi \in [s-h, s+H(s)]} |x(\xi)| \tag{11}$$

для всіх $t \geq s + H(s)$, *де* $s + H(s)$ — *друга точка імпульсу справа від відкритого відрізка* $(s, s+h)$.

Доведення. Виберемо $q < 1$ таке, що

$$1 + b < qe^{\delta\theta}, \ -(1+b)^N aQ(1 - \delta P/a)^{-1} < q.$$

З (6) і (7) випливає, що таке q існує. Очевидно, що в цьому випадку нерівність $-(1+ +b)^n aQ(1 - \delta P/a)^{-1} < q$ виконується для всіх натуральних $n < N$.

Нехай $s + H(s)$ збігається з точкою імпульсу t_j.

Спочатку доведемо, що $|x(s+H)| \leq qM$, де $M = \sup_{\xi \in [s-h, s+H(s)]} |x(\xi)|$.

1. Припустимо, що в деякій точці $\tau \in [s, t_{j-1}]$ виконується $x(\tau) > 0, \dot{x}(\tau) \geq 0$ або $x(\tau) < 0, \dot{x}(\tau) \leq 0$. Тоді $|x(t_{j-1})| < qM$. Доведемо це для першого випадку $x(\tau) > > 0, \dot{x}(\tau) \geq 0$ (другий розглядається аналогічно).

При такому припущенні існує $\bar{h} \leq h$ таке, що

$$x(\tau - \bar{h}) \leq \frac{\bar{M}\delta}{a}, \tag{12}$$

де $\bar{M} = x(\tau)$. Нехай, від супротивного, $x(t) > \bar{M}\delta/a$ для всіх $t \in [\tau - h, \tau]$. Тоді $f(\tau, x_\tau) < < a(\bar{M}\delta/a) = \bar{M}\delta$ і

$$\dot{x}(\tau) = -\delta x(\tau) + f(\tau, x_\tau) < -\delta\bar{M} + \delta\bar{M} < 0.$$

Суперечність.

Використовуючи формулу варіації сталої, маємо

$$\bar{M} = x(\tau) = U(\tau, \tau - \bar{h})x(\tau - \bar{h}) + \int\limits_{\tau-\bar{h}}^{\tau} U(\tau, s) f(s, x_s) ds. \tag{13}$$

З урахуванням (12) з (13) отримуємо оцінку

$$\bar{M} \leq \frac{U(\tau, \tau - \bar{h})\delta}{a}\bar{M} - aM \int\limits_{\tau-\bar{h}}^{\tau} U(\tau, s) ds.$$

З (7) випливає, що

$$\bar{M} \leq -aQ\Big(1 - \frac{\delta P}{a}\Big)^{-1} M \leq qM.$$

2. Припустимо, що на інтервалі $[\tau, \tilde{\tau}]$, де $\tilde{\tau}$ — перша точка імпульсу справа від точки $\tau+h$ (якщо $\tau+h$ збігається з точкою імпульсу, то $\tilde{\tau} = \tau+h$), виконується $x(t) > 0, \dot{x}(t) < 0$. На цьому інтервалі є не більше ніж $N = [h/\theta]+1$ точок імпульсів. Між точками імпульсів розв'язок не зростає, а в кожній точці імпульсу розв'язок збільшується не більше ніж в $1+b$ разів. Тому

$$x(t) \leq (1+b)^N x(\tau) \leq \frac{-(1+b)^N aQ}{1 - \delta P/a} \leq qM$$

для всіх $t \in [\tau, \tilde{\tau}]$.

3. Якщо $x(\xi) > 0$ для всіх $\xi \in [s, t_{j-1}]$ або $x(\xi) > 0$ для всіх $\xi \in [t_{j-1}-h, t_{j-1}]$ (у випадку, коли $\tilde{\tau}$ збігається з точкою імпульсу t_{j-1}), то $f(t, x_t) \leq -a\mathcal{M}(-x_t) \leq 0$ і $x'(t) \leq -\delta x(t)$ при $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Оскільки $x(t_{j-1}) \leq M$ і $x(t_j) = (1+b_j)x(t_j - 0)$, то

$$x(t_j) \leq (1+b_j)e^{-\delta(t_j - t_{j-1})}x(t_{j-1}) \leq e^{-\delta\theta}(1+b)M \leq qM.$$

Отже, якщо на інтервалі $(t_{j-1}-h, t_{j-1}]$ існує точка з властивостями $x(\tau) > 0, \dot{x}(\tau) \geq 0$ або $x(\tau) < 0, \dot{x}(\tau) \leq 0$, то за п. 2 доведення леми отримуємо $|x(t)| \leq qM$ для всіх $t \in [\tau, t_j]$. Якщо на інтервалі $(t_{j-1}-h, t_{j-1}]$ такої точки немає, тобто на цьому інтервалі розв'язок не змінює знак, то $|x(t_j)| \leq qM$ за п. 3 доведення. Тим самим ми показали що $|x(s+H(s))| \leq$ $\leq qM$.

4. Припустимо від супротивного, що в деякій точці $\sigma > s + H$ виконується нерівність

$$|x(\sigma)| > qM. \tag{14}$$

Нехай для визначеності $x(\sigma) > 0$. Якщо $x'(\sigma) \geq 0$, то, повторюючи міркування з п. 1 доведення, отримуємо $x(\sigma) \leq a^2Q(-a+\delta P)^{-1}M \leq qM$, що суперечить (14).

Якщо σ збігається з точкою імпульсу і лівостороння похідна $x'(\sigma) \geq 0$, то

$$x(\sigma) \leq (1+b)a^2Q(-a+\delta P)^{-1}M \leq qM.$$

Якщо на інтервалі $[\sigma, \tilde{\sigma}]$, де $\tilde{\sigma}$ — перша точка імпульсу справа від точки $\sigma + h$, виконується $x(t) > 0, \dot{x}(t) < 0$, то, повторюючи міркування з п. 2, одержуємо

$$x(t) \leq (1+b)^N x(\tau) \leq \frac{-(1+b)^N aQM}{1-\delta P/a} \leq qM$$

для всіх $t \in [\sigma, \tilde{\sigma}]$.

Якщо $x(t) > 0, \dot{x}(t) < 0$, для $t > \tilde{\sigma}$, то для таких t розв'язок рівняння (1), (3) оцінюється зверху розв'язком рівняння (4), (5), який прямує до нуля при $t \to \infty$.

Лему доведено.

Лема 4. *При виконанні умов теореми 2 кожний розв'язок $x(t)$ рівняння (1), (2) задовольняє нерівність*

$$|x(t)| \leq K \sup_{s-h\leq\xi\leq s} |x(\xi)| e^{-\gamma(t-s)}, \; t \geq s, \tag{15}$$

де

$$K = (1+b)^N, \; \gamma = -\frac{\ln q}{h+H_0}, \; H_0 = \sup_{s>0} H(s).$$

Зауваження 2. Завжди можна вважати, що величина $\sup H(s)$ є скінченною, інакше можна додати додаткові точки імпульсів з $b_k = 0$.

Доведення леми 4. З нерівності (11) випливає оцінка

$$|x(t)| \leq \sup_{\xi\in[s-h, s+H(s)]} |x(\xi)| q^{\frac{t-s-H(s)}{h+H_0}} \leq \sup_{\xi\in[s-h,s+H(s)]} |x(\xi)| \frac{1}{q} q^{\frac{t-s}{h+H_0}} \leq$$

$$\leq \sup_{\xi\in[s-h,s+H(s)]} |x(\xi)| \frac{1}{q} e^{-\gamma(t-s-H)}, \quad t \geq s + H(s).$$

Позначимо $M_0 = \sup_{s-h\le\xi\le s}|x(\xi)|$ і доведемо, що

$$\sup_{\xi\in[s-h,s+H(s)]}|x(\xi)| \le q(1+b)^N M_0. \tag{16}$$

Розглянемо можливі варіанти поведінки розв'язку.

Якщо при всіх $\xi \in [s, s+t_{j-1}]$, де t_{j-1} — перша справа після $s+h$ точка імпульсу, виконується $x(t) > 0, x'(t) < 0$, то $x(\xi) \le M_0(1+b)^N$ для всіх $\xi \in [s, s+t_{j-1}]$.

Тоді, як і в п. 2 доведення леми 1, отримуємо

$$x(\xi) \le qM_0(1+b)^N,\ \xi \in [t_{j-1}, t_j].$$

У випадку існування точки $\tau \in [t_j - h, t_j]$ з властивостями $x(\tau) > 0, x'(\tau) \ge 0$ чи $x(\tau) < 0, x'(\tau) \le 0$ оцінку (16) отримуємо, як і в п. 1 доведення леми 1.

3. Доведення теореми 3. Як і при доведенні теореми 2, спочатку доведемо, що існує $q < 1$ таке, що для кожного розв'язку $x(t):\ [-h,\infty) \to \mathbb{R}$ виконується

$$|x(t)| \le q \max_{\xi\in[s-h,s+G(s)]}|x(\xi)| = qM \tag{17}$$

для всіх $t \ge s+G(s)$, де $s+G(s)$ — друга точка імпульсу справа після точки $s+2h$.

Виберемо $q < 1$ таке, що

$$1+b < qe^{\delta\theta},\ (1+b)^N \sup_{\tau\ge 0} r(\tau) < q.$$

З (6) і (9) випливає, що таке q існує.

Нехай $s+G(s)$ збігається з точкою імпульсу t_i.

Спочатку доведемо, що $|x(s+G(s))| \le qM$. Припустимо, що в деякій точці $\tilde{s} \in [s+h, t_i]$ виконується $x(\tilde{s}) > 0, \dot{x}(\tilde{s}) \ge 0$.

За лемою 2 існує $\tau \in [\tilde{s}-h, \tilde{s}]$ таке, що $x(\tau) = 0$. Розв'язок $x(t)$ рівняння (1), (2) з $x(\tau) = 0$ задовольняє рівність

$$x(t) = \int_\tau^t U(t,s)f(s,x_s)ds.$$

Нехай $x(t) > 0$ при $t > \tau$ і $x(t) < 0$ при $t < \tau$. При $t < \tau$, враховуючи оцінку (3), отримуємо

$$x(t) \ge -aM\int_\tau^t U(t,s)ds = y(t,\tau,-M),$$

якщо $a\int_\tau^t U(t,s)ds \le 1$. За припущенням $x(t) \ge -M$, тому при $a\int_\tau^t U(t,s)ds > 1$ маємо $x(t) \ge y(t,\tau,-M) = -M$.

Відповідно при $t > \tau$

$$x(t) = \int_{\tau}^{t} U(t,s) f(s,x_s) ds \le -a \int_{\tau}^{t} U(t,s)\mathcal{M}(-x_s) ds \le$$

$$\le a \int_{\tau}^{t} U(t,s) \inf_{\xi\in[s,\tau]} y(\xi,\tau,-M) ds = y(t,\tau,-M).$$

Тому

$$x(\tilde{s}) \le y(\tilde{s},\tau,-M) \le r(\tau)M.$$

Припустимо, що на інтервалі $[\tau,\tilde{\tau}]$, де $\tilde{\tau}$ — перша точка імпульсу справа від точки $\tau+h$, виконується $x(t) > 0, \dot{x}(t) < 0$. На цьому інтервалі є не більше ніж $N = [h/\theta]+1$ точок імпульсів. У кожній точці імпульсу розв'язок збільшується не більше ніж в $1+b$ разів. Тому

$$x(t) \le (1+b)^N r(\tau)M \le qM$$

для всіх $t \in [\tau,\tilde{\tau}]$.

Якщо $x(\xi) > 0$ для всіх $\xi \in [s+h, t_{i-1}]$, або $x(\xi) > 0$ для всіх $\xi \in [t_{i-1}-h, t_{i-1}]$ (у цьому випадку $\tilde{\tau}$ збігається з точкою імпульсу t_{i-1}), то $f(t,x_t) \le -a\mathcal{M}(-x_t) < 0$ і $x'(t) \le -\delta x(t)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Оскільки $x(t_{i-1}) \le M$ і $x(t_i) = (1+b_i)x(t_i-0)$, то

$$x(t_i) \le (1+b_i)e^{-\delta(t_i-t_{i-1})}x(t_{i-1}) \le e^{-\delta\theta}(1+b)M \le qM.$$

Отже, ми показали, що $|x(s+G(s))| \le qM$.

Як і при доведенні теореми 2, припустимо від супротивного, що в деякій точці $\sigma >$ $> s+G(s)$ виконується

$$|x(\sigma)| > qM. \tag{18}$$

Якщо $x(\sigma) > 0, x'(\sigma) \ge 0$ або $x(\sigma) < 0, x'(\sigma) \le 0$, то, повторюючи наведені вище міркування, показуємо, що

$$|x(\sigma)| \le \sup_{\tau\ge 0} |r(\tau)|M \le qM.$$

Якщо на інтервалі $[\sigma,\tilde{\sigma}]$, де $\tilde{\sigma}$ — перша точка імпульсу справа від точки $\sigma+h$, виконується $x(t) > 0, x'(t) < 0$ чи відповідно $x(t) < 0, x'(t) > 0$, то для всіх точок $t \in [\sigma,\tilde{\sigma}]$ отримуємо оцінку

$$|x(t)| \le |x(\tau)| \le (1+b)^N \sup_{\tau\ge 0} |r(\tau)|M \le qM,$$

що суперечить припущенню (18).

Нарешті, як і в лемі 4, доводимо, що при виконанні нерівності (17) розв'язок задовольняє нерівність (15) з деякими додатними сталими K і γ.

Теорему доведено.

4. Доведення наслідку 1. З нерівностей (10) випливає

$$\frac{1}{K_1}e^{-c_1(t-s)} \le U(t,s) \le \frac{1}{K_0}e^{-c_0(t-s)}, \quad t \le s.$$

З останніх нерівностей при $t < \tau$ і $a\int_\tau^t U(t,s)ds \le 1$ отримуємо оцінку

$$y(t,\tau,-M) = -aM\int\limits_\tau^t U(t,s)ds \ge \frac{aM}{K_0c_0}\left(e^{-c_0(t-\tau)}-1\right).$$

Нерівність $a\displaystyle\int_\tau^t U(t,s)ds \le 1$ еквівалентна такій:

$$\tau - t \le \tau - \bar{t}(\tau) = \frac{1}{c_0}\ln\left(1+\frac{K_0c_0}{-a}\right).$$

Відповідно при $\tau - t \ge \tau - \bar{t}(\tau)$ має місце оцінка $y(t,\tau,-M) \le -M$.

З урахуванням останніх оцінок запишемо $y(t,\tau,-M)$ у явному вигляді при $t > \tau$:

$$y(t,\tau,-M) = a\int\limits_\tau^t U(t,s)y(s-h,\tau,-M)ds \le$$

$$\le -a\int\limits_\tau^{\bar{t}+h} U(t,s)Mds + a\int\limits_{\bar{t}+h}^t U(t,s)\frac{aM}{K_0c_0}\left(e^{c_0(\tau-s+h)}-1\right)ds \le$$

$$\le -aMK_1\int\limits_\tau^{\bar{t}+h} e^{c_1(s-t)}ds + \frac{a^2MK_1}{K_0c_0}\int\limits_{\bar{t}+h}^t e^{c_1(s-t)}\left(e^{c_0(\tau-s+h)}-1\right)ds =$$

$$= \frac{a^2MK_1}{K_0c_0(c_1-c_))}e^{c_0h}e^{-c_0(t-\tau)} - \frac{a^2MK_1}{K_0c_0c_1} +$$

$$+\frac{a^2K_1M}{K_0c_1(c_1-c_0)}\left(\frac{(c_1-c_0)K_0}{a} - e^{c_1h}\left(\frac{a-K_0c_0}{a}\right)^{1-c_1/c_0}\right)e^{-c_1(t-\tau)} = z(t-\tau). \tag{19}$$

Знайдемо найбільше значення функції $z(t-\tau)$. Її похідна дорівнює нулю, якщо

$$e^{-c_0(t-\tau-h)} + e^{-c_1(t-\tau-h)}\left(\frac{(c_1-c_0)K_0e^{-c_1h}}{a} - \left(\frac{a-K_0c_0}{a}\right)^{1-c_1/c_0}\right) = 0. \tag{20}$$

З (20) отримуємо точку максимуму функції $z(t-\tau)$:

$$\xi = h + \frac{1}{c_1 - c_0} \ln \left(\frac{K_0(c_1 - c_0)e^{-c_1 h}}{-a} + \left(\frac{-a + K_0 c_0}{-a} \right)^{1 - c_1/c_0} \right).$$

З формул (19) і (20) визначаємо максимальне значення функції $z(t)$:

$$z(\xi) = \frac{a^2 M K_1}{K_0 c_0 c_1} \left(e^{-c_0(\xi - h)} - 1 \right). \tag{21}$$

З формул (19) і (21) отримуємо оцінку

$$r(\tau) = \frac{1}{M} y(\tilde{t}(\tau), \tau, -M) \leq \frac{z(\xi)}{M}.$$

Тому нерівність $(1+b)^N z(\xi)/M < 1$ є достатньою для виконання умови (9), яка за теоремою 3 забезпечує глобальну стійкість рівняння (1), (2).

Наслідок доведено.

5. Доведення наслідку 2. Доведення проводимо аналогічно доведенню наслідку 1.

При $t < \tau$ і $a \int_\tau^t U(t,s)ds \leq 1$ маємо оцінку

$$y(t, \tau, -M) \geq \frac{aM}{K_0 c} \left(e^{-c(t-\tau)} - 1 \right).$$

Нерівність $a \int_\tau^t U(t,s)ds \leq 1$ еквівалентна такій:

$$\tau - t \leq \tau - \bar{t}(\tau) = \frac{1}{c} \ln \left(1 + \frac{K_0 c}{-a} \right).$$

Відповідно при $\tau - t \geq \tau - \bar{t}(\tau)$ справедливою є оцінка $y(t, \tau, -M) \leq -M$.

Аналогічно (19) запишемо $y(t, \tau, -M)$ у явному вигляді при $t > \tau$:

$$y(t, \tau, -M) \leq -\frac{a^2 M K_1}{K_0 c^2} + \left(\frac{a^2 M K_1 e^{ch}}{K_0 c} \left(t - \tau - h + \frac{1}{c} \ln \left(1 + \frac{K_0 c}{-a} \right) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a M K_1}{c} + \frac{a^2 M K_1 e^{ch}}{K_0 c^2} \right) e^{-c(t-\tau)} = z(t-\tau). \tag{22}$$

Функція $z(t-\tau)$ досягає максимуму в точці

$$\xi = h - \frac{K_0 e^{-ch}}{a} - \frac{1}{c} \ln \left(1 + \frac{K_0 c}{-a} \right).$$

Максимальне значення функції $z(t-\tau)$ дорівнює

$$z(\xi) = \frac{a^2 M K_1}{K_0 c^2} \left(e^{-c(\xi - h)} - 1 \right). \tag{23}$$

З формул (22) і (23) отримуємо оцінку

$$r(\tau) = \frac{1}{M} y(\tilde{t}(\tau), \tau, -M) \leq \frac{1}{M} z(\xi).$$

Тому нерівність $(1+b)^N z(\xi)/M < 1$ є достатньою для виконання умови (9), яка за теоремою 3 забезпечує глобальну стійкість рівняння (1), (2).

Наслідок доведено.

1. *Kuang Y.* Delay differential equations with applications in population dynamics. — Boston: Acad. Press, 1993. — 398 p.
2. *Ruan S.* Delay differential equations in single species dynamics // Delay Different. Equat. with Appl. — Berlin: Springer, 2006. — P. 1–40.
3. *Cooke K., Van den Driessche P., Zou X.* Interaction of maturation delay and nonlinear lirth in population and epidemic models // J. Math. Biol. — 1999. — **39.** — P. 332–352.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
5. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapure: World Sci., 1989. — 273 p.
6. *Smith H. L.* Monotone dynamical systems. — Providence: Amer. Math. Soc., 1995. — 174 p.
7. *Liz E., Tkachenko V., Trofimchuk S.* A global stability criterion for scalar functional differential equations // SIAM J. Math. Anal. — 2003. — **35**. — P. 596–622.
8. *Liz E., Pinto M., Tkachenko V., Trofimchuk S.* A global stability criterion for a family of delayed population models // Quart. Appl. Math. — 2005. — **63**. — P. 56–70.
9. *Berezansky L., Braverman E.* Explicit conditions of exponential stability for a linear impulsive delay differential equation // J. Math. Anal. and Appl. — 1997. — **214**, № 2. — P. 439–458.
10. *Yu J.S.* Stability for nonlinear delay differential equations of unstable type under impulsive perturbations // Appl. Math. Lett. — 2001. — **14**, № 7. — P. 849–857.
11. *Yu J. S.* Explicit conditions for stability of nonlinear scalar delay differential equations with impulses // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. — 2001. — **46**, № 1. — P. 53–67.
12. *Yu J. S., Tang X. H.* Global attractivity in a delay population model under impulsive perturbations // Bull. London Math. Soc. — 2002. — **34**, № 3. — P. 319–328.
13. *Zhang X., Yan J.* Stability of nonlinear delay differential equations with impulses // Nonlinear Anal. — 2004. — **59**, № 4. — P. 453–464.
14. *Tang S., Chen L.* Global attractivity in a "food-limited"population model with impulsive effects // J. Math. Anal. and Appl. — 2004. — **292**, № 1. — P. 211–221.
15. *Zhang Y., Sun J.* Stability of impulsive infinite delay differential equations // Appl. Math. Lett. — 2006. — **19**, № 10. — P. 1100–1106.
16. *Wei G., Shen J.* Asymptotic behavior of solutions of nonlinear impulsive delay differential equations with positive and negative coefficients // Math. Comput. Modelling. — 2006. — **44**, № 11-12. — P. 1089–1096.
17. *Ivanov A., Liz E., Trofimchuk S.* Halanay inequality, Yorke $3/2$ stability criterion, and differential equations with maxima // Tohoku Math. J. — 2002. — **54**. — P. 277–295.
18. *Liu X., Ballinger G.* Existence and continuability of solutions for differential equations with delays and state-dependent impulses // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. — 2002. — **51**, № 4. — P. 633–647.

Одержано 24.09.2006