Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології
Nanosystems, Nanomaterials, Nanotechnologies
2010, т. 8, № 1, сс. 143–152

PACS numbers: 03.50.De, 61.05.cc, 61.72.Ff, 68.35.Ct, 68.37.Yz, 68.49.Uv, 81.70.Fy

Розсіяння електромагнетного випромінення шорсткими фрактальними поверхнями

Д. Л. Водоп'янов, Л. Г. Гречко, О. Ю. Грищук, Л. Ю. Куницька, О. Ю. Семчук

Інститут хімії поверхні ім. О. О. Чуйка НАН України,
вул. Генерала Наумова, 17,
03164 Київ, Україна

Виконано комп'ютерне моделювання реальних шорстких поверхонь за допомогою двовимірної Вейєрштрассової функції. На основі скалярної Кірхгоффової теорії розраховано індикатрису розсіяння електромагнетних хвиль для різних типів шорстких поверхонь і кутів падіння. Показано, що індикатриса розсіяння електромагнетних хвиль шорсткою поверхнею з фрактальним рельєфом має складну структуру і містить сплески інтенсивности в напрямках, які лежать досить далеко від напрямку дзеркального відбиття.

A two-dimensional Weierstrass function is applied for computer simulation of real rough fractal surfaces. Using the scalar Kirchhoff theory as the basis, the electromagnetic-wave scattering indicatrix is calculated for different types of rough surfaces and falling angles. As shown, the indicatrix of electromagnetic-waves scattering by a rough surface with a fractal relief has a complex structure and contains bursts of intensity in directions, which lay well away from the mirror reflection direction.

Проведено компьютерное моделирование реальных шероховатых поверхностей с помощью двумерной функции Вейерштрасса. На основе скалярной теории Кирхгофа рассчитана индикатриса рассеяния электромагнитных волн для разных типов шероховатых поверхностей и углов падения. Показано, что индикатриса рассеяния электромагнитных волн шероховатой поверхностью с фрактальным рельефом имеет сложную структуру и содержит всплески интенсивности в направлениях, которые лежат достаточно далеко от направления зеркального отражения.

Ключові слова: фрактали, розсіяння, електромагнетне випромінення, шорстка поверхня.

(Отримано 12 лютого 2009 р.)

1. ВСТУП

Геометричні образи та поняття займають важливе місце у фізичних дослідженнях. По-перше, фізичні властивості будь-яких об'єктів завжди тісно пов'язані з їх геометрією. Наприклад, фізичні властивості кристалів багато у чому визначаються геометрією їх кристалічних ґратниць. По-друге, переважна більшість фізичних структур та процесів дозволяють геометричну інтерпретацію (наприклад, у вигляді репрезентації графіками функцій, фазовими траєкторіями та інше). У переважній більшості випадків у фізиці для побудови таких об'єктів використовуються традиційні геометрії: Евклідова, Ріманова, Лобачевського та інші. Логічним продовженням цього процесу стало введення в фізику нового, спочатку суто геометричного поняття — фракталу. Підвищення зацікавлености до подібних об'єктів та усвідомлення їх важливого місця у фізиці пов'язане з ім'ям Б. Мандельброта [1], який ввів термін «фрактал» і дав загальне визначення цього поняття. Дуже перспективним може виявитися застосування фрактального підходу до опису процесів розсіяння електромагнетного випромінення реальними поверхнями. Всі реальні поверхні є в тій чи іншій мірі шорсткими. Тому дослідження розсіяння електромагнетних хвиль шорсткими поверхнями є важливою та цікавою експериментальною і теоретичною проблемою. Вивчення закономірностей такого розсіяння важливо, насамперед, для неруйнівного контролю реальних поверхонь [2].

В даній роботі на основі чисельних розрахунків середнього коефіцієнта розсіяння нами було побудовано графіки залежности середнього коефіцієнта розсіяння (індикатриси розсіяння) для різних типів поверхонь та кутів падіння. При розрахунках ми не враховували реальну залежність коефіцієнта відбиття від довжини падаючої хвилі та кута падіння та використовували простий скалярний варіянт Кірхгоффової теорії розсіяння.

2. ФУНКЦІЯ ВЕЙЄРШТРАССА–МАНДЕЛЬБРОТА

При теоретичних дослідженнях розсіяння електромагнетних хвиль (світла) самоподібними неоднорідними об'єктами (шорсткими (фрактальними) поверхнями) виникає необхідність використовувати ті чи інші математичні моделі розсіювальних поверхонь. Як основний розсіювальний об'єкт оберемо шорстку поверхню. Шорстка поверхня, як відомо, описується функцією $z(x, y)$ відхилень z точок M поверхні від опорової площини (x, y) (рис. 1) і вимагає безпосереднього задавання рельєфу поверхні.

В сучасних моделях шорсткої поверхні використовують різні модифікації функції Вейєрштрасса–Мандельброта. В цій роботі для моделювання шорсткої поверхні використовується двовимірна об-

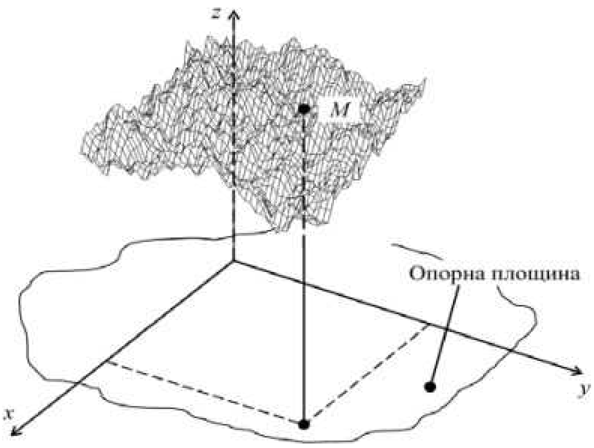

Рис. 1. Схема опису шорсткої поверхні.

межена смугою Вейєрштрассова функція $z(x, y)$ [3, 4]:

$$z(x,y)=c_w\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=1}^{M}q^{(D-3)n}\sin\left\{Kq^n\left[x\cos\frac{2\pi m}{M}+y\sin\frac{2\pi m}{M}\right]+\varphi_{nm}\right\}, \quad (1)$$

де c_w — нормувальна константа; $q > 1$ — основна просторова частота поверхні; K — фундаментальне хвильове число поверхні; D — фрактальна розмірність розсіювальної поверхні ($2 < D < 3$); N, M — кількість обертонів; φ_{nm} — фазові доданки.

Фази φ_{nm} можна обирати детерміновано або випадково, одержуючи відповідно детерміновані або випадкові функції $z(x, y)$. Ми надалі вважатимемо φ_{nm} випадковими величинами, що рівномірно розподілені на відрізку $[-\pi; \pi]$. При кожному конкретному виборі числових значень всіх $N \times M$ фаз φ_{nm} (наприклад, за допомогою ґенератора випадкових чисел) одержуємо конкретну (при заздалегідь обраних значеннях параметрів c_w, q, K, D, N, M) реалізацію функції $z(x, y)$.

Всі можливі реалізації функції $z(x, y)$ утворюють ансамбль поверхонь. Відхилення точок шорсткої поверхні від опорової площини пропорційні c_w; тому цей параметер пов'язаний з висотою нерівностей профілю поверхні. В подальшому виявляється зручнішим задавати шорстку поверхню, вказуючи середню квадратичну висоту її профілю σ, що визначається таким чином:

$$\sigma \equiv \sqrt{\langle h^2 \rangle}\,,$$

де $h = z(x, y)$, $\langle\ldots\rangle = \prod_{n=0}^{N-1}\prod_{m=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi_{nm}}{2\pi}(\ldots)$ — визначає усереднення за ансамблем поверхонь.

Після дещо громіздких обчислень одержуємо наступний вираз для середньоквадратичної висоти профілю шорсткої поверхні з фрактальним рельєфом:

$$\sigma = \left[\prod_{n=0}^{N-1} \prod_{m=1}^{M} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi_{nm}}{2\pi} z^2\left(x, y\right) \right]^{\frac{1}{2}} = c_w \left[\frac{M\left(1 - q^{2N(D-3)}\right)}{2\left(1 - q^{2(D-3)}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

Отже, величина σ є пропорційною величині нормувальної константи c_w, залежить від фрактальної розмірности D поверхні й величин q, N, M.

Таким чином, шорстка поверхня в нашому моделі описується функцією із шістьма параметрами: c_w (або σ), q, K, D, N, M. Вплив різних параметрів на вигляд поверхні можна дослідити вивчаючи профілі поверхонь, побудованих за результатами чисельних розрахунків Вейєрштрассової функції. Аналіза профілів поверхонь побудованих за результатами чисельних розрахунків Вейєрштрассової функції (рис. 2) призводить до таких висновків: хвильове число K задає довжину хвилі основної гармоніки поверхні, на яку накладаються дрібномасштабні брижі від додаткових гармонік; числа N,

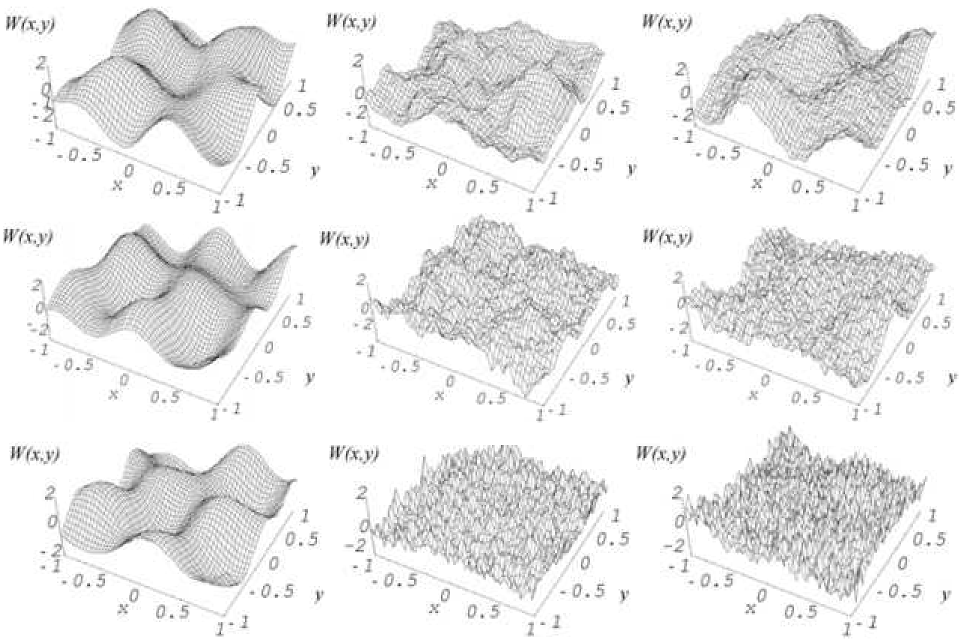

Рис. 2. Приклади моделювання шорсткої поверхні Вейєрштрассовою функцією. $K = 2\pi$; $N = M = 5$; $\sigma = 1$. $D = 2{,}1$, $D = 2{,}5$, $D = 2{,}9$ (зверху донизу); $q = 1{,}1$, $q = 3$, $q = 7$ (зліва направо).

M, D та q визначають ступінь покарбованости профілю за рахунок накладання на основну хвилю додаткових гармонік, причому N та M визначають кількість гармонік, що накладаються; D визначає амплітуду гармонік; q і амплітуду, і частоту гармонік водночас. Зауважимо, що зі збільшенням N, M, D та q збільшується і просторова неоднорідність поверхні у великому масштабі: великомасштабні «пагорби» зникають, а дрібномасштабні неоднорідності все більше нагадують брижі на пласкій поверхні.

3. РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНЕТНИХ ХВИЛЬ НЕОДНОРІДНОЮ ФРАКТАЛОПОДІБНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Нехай на шорстку поверхню S під кутом Θ_1 падає електромагнетна хвиля і розсіюється в усіх напрямках. Розсіяна хвиля спостерігається за допомогою детектора D в напрямку, що характеризується полярним кутом Θ_2 та азимутальним кутом Θ_3. Вимірюваною величиною є інтенсивність електромагнетної хвилі (світла) I_s, розсіяного в напрямку (Θ_2, Θ_3). Нам необхідно побудувати індикатрису розсіяння $I_s = I_s(\theta_2, \theta_3)$ електромагнетної хвилі шорсткою фракталоподібною поверхнею, яка моделюється Вейєрштрассовою функцією (1). На рисунку 3 наведено схему експерименту зі спостереження розсіяння електромагнетних хвиль шорсткою поверхнею.

Оскільки інтенсивність розсіяної хвилі I_s пов'язана з напруженістю її електричного поля співвідношенням

$$I_s = \mathbf{E}_s\mathbf{E}_s^*, \tag{3}$$

де $\mathbf{E}_s$ — електричне поле розсіяної хвилі в комплексному представленні, то проблема знаходження I_s зводиться до знаходження розсіяного поля $\mathbf{E}_s$.

Розсіяне поле будемо знаходити за Кірхгоффовою методою [3], причому з огляду на складність задачі, скористуємося більш прос-

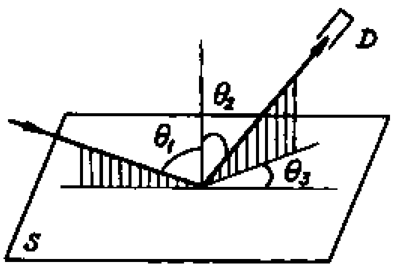

Рис. 3. Схема експерименту з розсіяння електромагнетних хвиль шорсткою (фрактальною) поверхнею: S — розсіювальна поверхня; D — детектор, θ_1 — кут падіння; θ_2 — полярний кут розсіяння; θ_3 — азимутальний кут розсіяння.

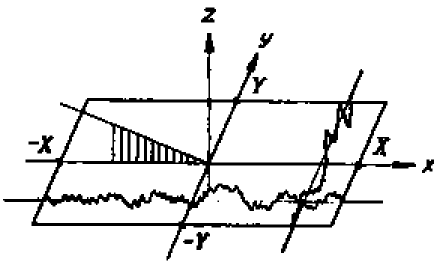

Рис. 4. Фраґмент розсіювальної поверхні та вибір осей координат.

тим скалярним варіантом теорії, згідно якого електромагнетне поле описується скалярною величиною $E(\mathbf{r},t)=\left|\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\right|$. При цьому ми втрачаємо можливість аналізувати поляризаційні ефекти. Структуру розсіювальної поверхні й вибір осей координат показано на рис. 4.

Базова формула Кірхгоффової методи дозволяє знайти розсіяне поле $E_s(\mathbf{r}, t)$ за таких умов: падаюча хвиля є монохроматичною пласкою; розсіювальна поверхня є шорсткою всередині деякого прямокутника ($-X < x_0 < X$, $-Y < y_0 < Y$) та гладкою поза його межами (рис. 4); розмір шорсткої ділянки набагато більший за довжину падаючої хвилі; всі точки поверхні мають скінчений ґрадієнт; коефіцієнт відбиття однаковий для всіх точок поверхні; розсіяне поле спостерігається у хвильовій зоні, тобто достатньо далеко від розсіювальної поверхні. За цих умов розсіяне поле є також монохроматичним з просторовою залежністю [3]:

$$E_s(\mathbf{r})=-ikrF(\Theta_1,\Theta_2\Theta_3)\frac{e^{ikr}}{2\pi r}\int\limits_{S_0}\exp\left[ik\varphi(x_0,y_0)\right]dx_0dy_0+E_e(\mathbf{r}),\quad(4)$$

де $F(\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3)=-\dfrac{R}{2C}\left(A^2+B^2+C^2\right)$ — кутовий фактор, R — коефіцієнт відбиття, $\varphi(x_0,y_0)=Ax_0+By_0+Ch(x_0,y_0)$ — фазова функція, $A=\sin\Theta_1-\sin\Theta_2\cos\Theta_3$, $B=-\sin\Theta_2\sin\Theta_3$, $C=-\cos\Theta_1-\cos\Theta_2$, $h(x_0,y_0)=z(x_0,y_0)$, $E_e(\mathbf{r})=-\dfrac{R}{C}\dfrac{\exp(ikr)}{4\pi r}\left(AI_1+BI_2\right)$ — крайовий доданок, k — хвильове число падаючої хвилі,

$$I_1=\int\limits_{-Y}^{Y}\left[e^{ik\phi(X,y_0)}-e^{ik\phi(-X,y_0)}\right]dy_0,\ I_2=\int\limits_{-X}^{X}\left[e^{ik\phi(x_0,Y)}-e^{ik\phi(x_0,-Y)}\right]dx_0.\quad(5)$$

Після обчислення інтеґралів (4) та (5) за допомогою формули [5]

$$e^{iz\sin\phi}=\sum_{l=-\infty}^{\infty}I_l(z)e^{il\phi},$$

де $I_l(z)$ — Бесселева функція цілого порядку l, одержуємо:

$$E_s(\mathbf{r}) = -\frac{2ikFXY}{\pi r} e^{ikr} \sum_{l_{\{rs\}}} \left\{ \left[\prod_{uv} I_{l_{uv}}(\xi_u) \right] e^{i\sum_{nm} l_{nm}\phi_{nm}} \right\} \mathrm{sinc}(k_c X)\mathrm{sinc}(k_s Y) + E_e(\mathbf{r}), \tag{6}$$

де

$$F = F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3), \sum_{l_{\{rs\}}} \equiv \sum_{l_{0,1}=-\infty}^{\infty} \sum_{l_{0,2}=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_{(N-1),M}=-\infty}^{\infty}, \quad \prod_{uv} \equiv \prod_{u=1}^{N-1} \prod_{v=0}^{M}, \quad \sum_{nm} \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^{M},$$

$$\xi_u \equiv kc_w C q^{(D-3)u}, \quad \mathrm{sinc} x \equiv \frac{\sin x}{x},$$

$$k_c \equiv kA + K \sum_{nm} q^n l_{nm} \cos\frac{2\pi m}{M}, \quad k_s \equiv kB + K \sum_{nm} q^n l_{nm} \sin\frac{2\pi m}{M},$$

$$E_e(\mathbf{r}) = -ikXY \frac{R}{C}\left(A^2 + B^2\right) \frac{e^{ikr}}{\pi r} \mathrm{sinc}(kAX)\,\mathrm{sinc}(kBY).$$

Отже, вираз (6) дає розв'язок задачі про знаходження поля, розсіяного шорсткою (фрактальною) поверхнею (1), в рамках Кірхгоффової методи. Тепер за формулою (6) можна обчислити інтенсивність розсіяної хвилі, якщо задати параметри розсівної поверхні c_w (або σ), D, q, K, N, M, X, Y, φ_{nm}, параметер k (або $\lambda = 2\pi/k$) падаючої хвилі та параметри Θ_1, Θ_2, Θ_3 геометрії експерименту. Ця інтенсивність характеризуватиме розсіяння на конкретній реалізації поверхні $z(x, y)$ (з конкретним набором випадкових фаз φ_{nm}). Для порівняння розрахунків з експериментальними даними необхідно оперувати середньою за ансамблем поверхонь інтенсивністю $\langle I_s \rangle = \langle \mathbf{E}_s \mathbf{E}_s^* \rangle$. Така інтенсивність виявляється пропорційною до інтенсивности хвилі $I_0 = \left(\frac{2kXY \cos\theta_1}{\pi r} \right)^2$, відбитої від відповідної гладкої опорової поверхні; тому для теоретичної аналізи результатів розрахунків зручніше користуватися середнім коефіцієнтом розсіяння $\langle \rho_s \rangle \equiv \langle I_s \rangle / I_0$. Після обчислення $\langle I_s \rangle$ згідно (2) та (3), виходячи з (6), одержуємо точний вираз:

$$\langle \rho_s \rangle = \left[\frac{F(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)}{\cos\Theta_1} \right]^2 \sum_{l_{\{rs\}}} \prod_{uv} I_{l_{uv}}^2(\xi_u) \mathrm{sinc}^2(k_c X)\,\mathrm{sinc}^2(k_s Y) + \left[\frac{R\left(A^2 + B^2\right)}{2C\cos\Theta_1} \right]^2 \mathrm{sinc}^2(kAX)\,\mathrm{sinc}^2(kBY). \tag{7}$$

Оскільки вираз (7) містить нескінченну суму, користуватися ним для чисельних розрахунків індикатриси розсіяння незручно. Суттєве спрощення досягається у випадку $\xi_u < 1$. Використовуючи при цьому розклад Бесселевої функцій в ряд [5]

$$I_\nu(z) = \left(\frac{3}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-z^2/4\right)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)},$$

та відкидаючи члени порядків вищих, ніж ξ_u^2, одержуємо з (7) наближений вираз

$$\langle\rho_s\rangle \approx \left[\frac{F(\Theta_1,\Theta_2,\Theta_3)}{\cos\Theta_1}\right]^2 \times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\left[1-(k\sigma C)^2\right]\mathrm{sinc}^2(kAX)\,\mathrm{sinc}^2(kBY)+\\ \dfrac{1}{2}c_f^2\sum\limits_{nm} q^{2(D-3)n}\mathrm{sinc}^2\left[\left(kA+Kq^n\cos\dfrac{2\pi m}{M}\right)X\right]\mathrm{sinc}^2\left[\left(kB+Kq^n\sin\dfrac{2\pi m}{M}\right)Y\right]\end{array}\right\}+$$
$$+\left[\frac{R}{2C\cos\Theta_1}\left(A^2+B^2\right)\right]^2\mathrm{sinc}^2(kAX)\,\mathrm{sinc}^2(kBY), \qquad (8)$$

де $c_f \equiv kc_w C = k\sigma C\left[\dfrac{2}{M}\dfrac{1-q^{2(D-3)}}{1-q^{2N(D-3)}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Зауважимо, що одержані нами вирази (7) та (8) відрізняються від відповідних виразів з [2] наявністю крайових членів та коефіцієнтами перед $(k\sigma C)^2$ та c_f^2.

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗРАХУНКІВ

На основі виразів (1) та (8) за допомогою оригінальної програми, розробленої в середовищі Mathematika 5.1, нами виконано моделювання шорсткої поверхні Вейєрштрассовою функцією та чисельні розрахунки середнього коефіцієнта розсіяння та побудовано графіки залежности $\langle\rho_s\rangle$ (нормованої індикатриси розсіяння) від полярного (θ_2) та азимутального (θ_3) кутів розсіяння для різних типів фрактальних поверхонь та кутів падіння θ_1.

Середньоквадратична висота σ, фундаментальне хвильове число поверхні K та розміри X, Y фраґменту шорсткої поверхні задавались в одиницях k, оскільки хвильове число падаючої хвилі k входить у вигляді безрозмірних комбінацій $k\sigma$, kX та kY. В розрахунках використовувалось значення Френелевого коефіцієнта відбиття

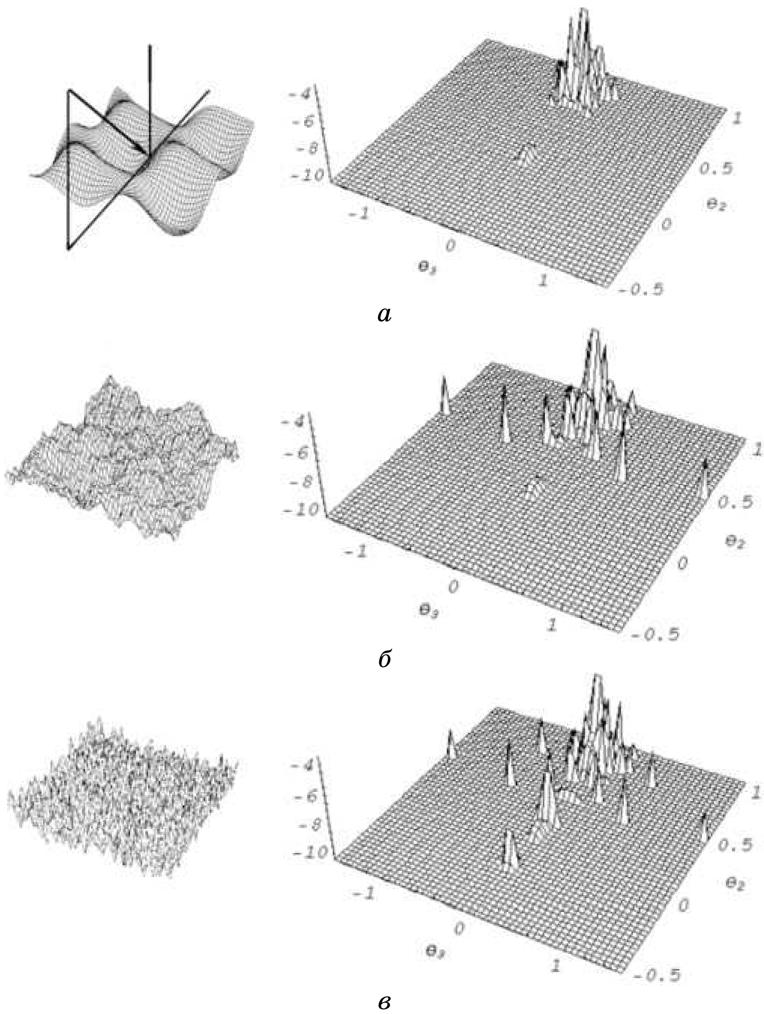

Рис. 5. Залежності коефіцієнта розсіяння $\ln\langle\rho_s\rangle$ від θ_2 та θ_3 для різних фрактальних поверхонь при $D = 2{,}5$, $q = 1{,}8$, $K = 1/(2\lambda)$, $\sigma = 0{,}05\lambda$, $X = Y = 30\lambda$, $\theta_1 = 45°$. *а* — $N = 2$, $M = 3$; *б* — $N = M = 5$; *в* — $N = M = 10$. Напрямок падіння хвилі на поверхню показано стрілкою вгорі ліворуч.

поверхні $R = 1$.

Приклади типових індикатрис розсіяння, одержаних нами при чисельних розрахунках, наведено на рис. 5.

5. ВИСНОВКИ

Аналіза графіків залежности коефіцієнта розсіяння $\ln\langle\rho_s\rangle$ від θ_2 та

θ_3 для різних типів фрактальних поверхонь, наведених на рис. 5, призводить до наступних висновків:

— розсіяння є симетричним відносно площини падіння;

— найбільша інтенсивність розсіяної хвилі спостерігається в напрямку віддзеркаленої хвилі;

— існують інші напрямки, в яких спостерігаються сплески інтенсивности;

— зі збільшенням ступеня викарбуваности поверхні (або з ростом її великомасштабної однорідности) картина розсіяння ускладнюється.

Зазначені особливості розсіяння є наслідками поєднання хаотичности та самоподібности рельєфу фракталоподібної поверхні.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного проєкту НАН України та Російського фонду фундаментальних досліджень (договір № 28) та наукового проєкту «Моделювання процесів взаємодії електромагнітного випромінення з реґулярними, стохастичними та фрактальними поверхневими структурами» програми НАН України «Наноструктурні системи, наноматеріали, нанотехнології» (договір № 37/07-Н).

ЦИТОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Б. Мандельброт, *Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике* (Москва: Мир: 1988).
2. S. H. Wang, C. J. Tay, and H. M. Shang, *Opt. Eng.*, **39**, No. 6: 1597 (2000).
3. M. V. Berry and Z. V. Lewis, *Proc. R. Soc. London A*, **370**: 459 (1980).
4. N. Lin, H. P. Lee, S. P. Lim, and K. S. Lee, *J. Mod. Opt.*, **42**, No. 1: 225 (1995).
5. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям* (Москва: Наука: 1979).