УДК 517 . 927

ПАРНІ СИСТЕМИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ І МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ*

А. Ю. Лучка

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We propose an approach to study even systems of functional-differential equations with restrictions and a control, where solvability of the problem is reduced to finding whether a system of integral equations has a solution. We substantiate the iteration and projective-iteration methods.

Предложен подход к исследованию четных систем функционально-дифференциальных уравнений с ограничениями и управлением, согласно которому совместность рассматриваемой задачи сводится к установлению существования решений системы интегральных уравнений. Обосновано применение к задаче итерационного и проекционно-итеративного методов.

1. Об'єкт дослідження. Парні системи рівнянь виникають при математичному моделюванні процесів, що відбуваються в неоднорідних середовищах. Будемо досліджувати модель, згідно з якою еволюційний процес, що відбувається при $t \in [a, c]$ в одному середовищі і описується системою функціонально-диференціальних рівнянь з керуванням

$$\left(\frac{d}{dt} + P(t)\right) x(t) = u(t) + f(t, x(t), x(\nu(t))), \tag{1}$$

в момент часу $t = c$ переходить у друге середовище, еволюція в якому при $t \in [c, b]$ описується системою функціонально-диференціальних рівнянь вигляду

$$\left(\frac{d}{dt} + Q(t)\right) x(t) = u(t) + g(t, x(t), x(\tau(t))). \tag{2}$$

При цьому припускаємо, що елементи заданих матриць $P(t)$ та $Q(t)$ розмірності $m \times m$ сумовні з квадратом на відрізках $[a, c]$ та $[c, b]$ відповідно, а задані вектор-функції $f : [a, c] \times \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ та $g : [c, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ такі, що породжувані ними оператори Немицького відображають відповідно простори $L_2([a, c], \mathbb{R}^m)$ та $L_2([c, b], \mathbb{R}^m)$ в себе.

Будемо розглядати випадок, коли керування визначається формулою

$$u(t) = C(t)\lambda, \tag{3}$$

а строго монотонно зростаючі неперервні функції $\nu(t)$ та $\tau(t)$, визначені на $[a, c]$ та $[c, b]$ відповідно, такі, що $\nu(a) = a, \nu(c) \geq \tau(c), \tau(c) \geq a, \tau(b) \leq b$, зокрема $\nu(t) = t, \tau(t) = t - \Delta$, $\Delta = \text{const} > 0$, причому $\Delta \leq c - a$.

* Підтримано грантом Президії НАН України (тема № 21).

Ставиться задача: знайти вектор-функцію $x(t)$ із класу $W_2^1([a,b],\mathbb{R}^m)$ та вектор $\lambda \in \mathbb{R}^l$ такі, щоб майже скрізь справджувались рівності (1), (2) та обмеження

$$x(a) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{4}$$

де $(m \times l)$-матриця $C(t)$ та $(l \times m)$-матриця $S(t)$ із сумовними з квадратом на $[a,b]$ елементами і $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$ задані, причому стовпці матриці $C(t)$ лінійно незалежні. Якщо така пара існує, задачу (1) – (4) вважаємо сумісною.

2. Підхід до дослідження сумісності задачі. Питання сумісності задачі (1) – (4) можна звести до питання існування розв'язків системи інтегральних рівнянь. При цьому важливу роль відіграє допоміжна задача

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x(t) = C(t)\lambda + y(t), \tag{5}$$

$$x(a) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{6}$$

в якій вектор-функція $y \in L_2([a,b],\mathbb{R}^m)$ задана і

$$A(t) = \begin{cases} P(t), & t \in J_1, \\ Q(t), & t \in J_2, \end{cases} \tag{7}$$

де $J_1 = [a,c]$, $J_2 = [c,b]$.

Припустимо, що однорідна задача

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x(t) = C(t)\lambda, \quad x(a) = 0, \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = 0, \tag{8}$$

має лише тривіальний розв'язок. Тоді, використавши методику, розроблену в [1 – 4], можна встановити існування вектор-функції $h(t)$, вектора σ і матриць $G(t,s)$ та $\Gamma(s)$ розмірності $m \times m$ та $l \times m$ відповідно таких, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (5), (6) зображується формулами

$$x(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)y(s)ds, \quad \lambda = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)y(s)ds \tag{9}$$

і справджуються співвідношення

$$\int_a^b G(t,s)C(s)ds = O, \quad I + \int_a^b \Gamma(s)C(s)ds = O, \tag{10}$$

де I – одинична матриця в $\mathbb{R}^l$.

Введемо до розгляду функцію та вектор-функцію, які визначаються формулами

$$\omega(t) = \begin{cases} \nu(t), & t \in J_1, \\ \tau(t), & t \in J_2, \end{cases} \tag{11}$$

$$F(t, x(t), x(\omega(t))) = \begin{cases} f(t, x(t), x(\nu(t))), & t \in J_1, \\ g(t, x(t), x(\tau(t))), & t \in J_2. \end{cases} \tag{12}$$

За допомогою формул (3), (7), (11), (12) системи рівнянь (1) та (2) можна записати у вигляді

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x(t) = C(t)\lambda + F(t, x(t), x(\omega(t))). \tag{13}$$

На основі формул (5), (9) і (13) неважко отримати систему інтегральних рівнянь

$$y(t) = F\left(t, h(t) + \int_a^b G(t,s)y(s)ds, h(\omega(t)) + \int_a^b G(\omega(t),s)y(s)ds\right). \tag{14}$$

Із викладеного випливає, що задача (1) – (4) рівносильна системі інтегральних рівнянь (14) в такому сенсі: якщо $y^* \in L_2([a,b], \mathbb{R}^m)$ — розв'язок системи (14), то задача (1) – (4) сумісна і її розв'язок визначається формулами

$$x^*(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)y^*(s)ds, \quad \lambda^* = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)y^*(s)ds, \tag{15}$$

і, навпаки, якщо $(x^*(t), \lambda^*)$ – розв'язок задачі (1) – (4), то існує розв'язок системи інтегральних рівнянь (14)

$$y^*(t) = \left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x^*(t) - C(t)\lambda^*. \tag{16}$$

Якщо система рівнянь (14) має єдиний розв'язок, то існує єдиний розв'язок задачі (1) – (4). Таким чином, правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо однорідна задача (8) має лише тривіальний розв'язок, то задача (1) – (4) сумісна тоді і лише тоді, коли існує розв'язок системи інтегральних рівнянь (14). Їх розв'язки пов'язані співвідношеннями (15) та (16).*

Зауваження 1. Якщо однорідна задача (8) з матрицею (7) має нетривіальний розв'язок, то матрицю $A(t)$ можна задати таким чином, щоб неоднорідна задача (5), (6) мала єдиний розв'язок і його можна було б побудувати в явному вигляді порівняно легко. Тоді задачу (1) – (4) також можна звести до системи інтегральних рівнянь вигляду (14), однак у правій частині з'явиться ще додатковий член

$$B(t)h(t) + \int_a^b B(t)G(t,s)y(s)ds, \quad B(t) = \begin{cases} A(t) - P(t), & t \in J_1, \\ A(t) - Q(t), & t \in J_2. \end{cases}$$

3. Лінійна задача. Самостійне значення має лінійна задача

$$\left(\frac{d}{dt} + M(t)\right) x(t) = C(t)\lambda + f(t) + D(t)x(\omega(t)), \tag{17}$$

$$x(a) = \gamma, \quad \int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{18}$$

в якій функція $\omega(t)$ має вигляд (11), а $(m \times m)$-матриці $M(t)$ та $D(t)$ із сумовними з квадратом на $[a,b]$ елементами і $f \in L_2([a,b], \mathbb{R}^m)$ є заданими.

Зведемо задачу (17), (18) до системи лінійних інтегральних рівнянь. Для цього вибираємо неперервну на $[a,b]$ $(m \times m)$-матрицю $A(t)$ таким чином, щоб однорідна задача (8) мала лише тривіальний розв'язок. Запишемо систему (17) у вигляді

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x(t) = C(t)\lambda + f(t) + B(t)x(t) + D(t)x(\omega(t)),$$

де $B(t) = A(t) - M(t)$, і покладемо

$$y(t) = f(t) + B(t)x(t) + D(t)x(\omega(t)). \tag{19}$$

Тоді задача (17), (18) набере вигляду (5), (6), а її єдиний розв'язок можна знайти за формулами (9). Підставивши першу з них у співвідношення (19), отримаємо

$$y(t) = p(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \tag{20}$$

де

$$p(t) = f(t) + B(t)h(t) + D(t)h(\omega(t)), \tag{21}$$

$$K(t,s) = B(t)G(t,s) + D(t)G(\omega(t),s). \tag{22}$$

Справедливим є очевидне твердження.

Теорема 2. *Якщо спектральний радіус оператора, що фігурує в правій частині системи (20),* $\rho(K) < 1$, *то існує єдиний розв'язок задачі (17), (18) і його можна побудувати методом послідовних наближень.*

Для отримання конструктивних достатніх умов збіжності доцільно систему (20) в усьому просторі звести до системи інтегральних рівнянь у його підпросторі. Щоб отримати останню систему, введемо оператор ортогонального проектування

$$(\Pi z)(t) := \int_a^b \Pi(t,s)z(s)ds, \tag{23}$$

ядро якого визначається формулою

$$\Pi(t,s) = C(t)\left(\int_a^b C^*(\xi)C(\xi)d\xi\right)^{-1} C^*(s),$$

де $C^*(t)$ – матриця, спряжена до матриці $C(t)$.

За допомогою оператора (23) та першої властивості (10) формулі (9) можна надати вигляду

$$x(t) = h(t) + \int_a^b G(t,s)v(s)ds, \tag{24}$$

де

$$v(t) = y(t) - \int_a^b \Pi(t,s)y(s)ds. \tag{25}$$

Використавши формули (24), (25) та (21), (22), дослідження розв'язуваності системи (20) зведемо до питання існування розв'язків системи

$$v(t) = q(t) + \int_a^b L(t,s)y(s)ds \tag{26}$$

в певному підпросторі простору $L_2([a,b],\mathbb{R}^m)$, де

$$q(t) = p(t) - \int_a^b \Pi(t,s)p(s)ds, \tag{27}$$

$$L(t,s) = K(t,s) - \int_a^b \Pi(t,\xi)K(\xi,s)d\xi. \tag{28}$$

Зауваження 2. Дослідження розв'язуваності системи нелінійних рівнянь (14) таким же способом також можна звести до питання існування розв'язків системи інтегральних рівнянь, аналогічної системі (26), у певному підпросторі.

4. Проекційно-ітеративний метод. До задачі (1) – (4) можна застосувати наближені методи, зокрема методи проекційно-ітеративного типу. Суть проекційно-ітеративного методу полягає в тому, що для побудови наближених розв'язків використовуються ідеї як проекційних, так і ітераційних методів.

Нехай наближення $(x_{k-1}(t), \lambda_{k-1})$ уже побудовано, отже, відома також вектор-функція $y_{k-1}(t)$. Тоді знаходимо вектор-функції

$$z_k(t) = x_{k-1}(t) + \delta_k(t), \tag{29}$$

$$y_k(t) = F(t, z_k(t), z_k(\omega(t))), \tag{30}$$

використовуючи при цьому формулу (12), і наступне наближення визначаємо із задачі

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x_k(t) = C(t)\lambda_k + y_k(t), x_k(a) = \gamma, \tag{31}$$

$$\int_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha. \tag{32}$$

Поправку шукаємо у вигляді

$$\delta_k(t) = W(t)\mu_k, \tag{33}$$

де $(m \times n)$-матриця $W(t)$ визначається із допоміжної задачі

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) W(t) = C(t)E + \Phi(t), \tag{34}$$

$$W(a) = O, \quad \int_a^b S(t)W(t)dt = O, \tag{35}$$

а невідомий вектор $\mu_k \in \mathbb{R}^n$ — з умови

$$\int_a^b \Psi(t)\left(y_k(t) - y_{k-1}(t) - \Phi(t)\mu_k\right)dt = 0. \tag{36}$$

У формулах (34 – (36) стала $(l \times n)$-матриця E є шуканою і $(m \times n)$-матриця $\Phi(t)$ та $(n \times \times m)$-матриця $\Psi(t)$ із сумовними з квадратом на $[a, b]$ елементами задані, причому стовпці матриці $\Phi(t)$ та рядки матриці $\Psi(t)$ лінійно незалежні і справджується важлива умова

$$\int_a^b \Psi(t)C(t)dt = O. \tag{37}$$

Початкове наближення $(x_0(t), \lambda_0)$ визначаємо із задачі (31), (32) при $k = 0$ і заданій вектор-функції $y_0(t)$.

На основі співвідношень (29), (30), (33) і (36) для визначення невідомого вектора $\mu_k \in \in \mathbb{R}^n$ отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Знайшовши її розв'язок, точний чи наближений, і розв'язавши задачу (31), (32), отримаємо шукане наближення.

За припущення, що однорідна задача (8) має лише тривіальний розв'язок, метод (29) – (37) зводиться до проекційно-ітеративного методу стосовно системи інтегральних рівнянь (14), умови збіжності якого висвітлено в низці праць, зокрема в [5] (§ 4, 16). Справді, за цього припущення задачі (31), (32) і (34), (35) мають єдині розв'язки

$$x_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t, s)y_k(s)ds, \quad \lambda_k = \sigma + \int_a^b \Gamma(s)y_k(s)ds, \tag{38}$$

$$W(t) = \int_a^b G(t, s)\Phi(s)ds, \quad E = \int_a^b \Gamma(s)\Phi(s)ds. \tag{39}$$

Використовуючи формули (38), (39) та (33), співвідношення (29) записуємо у вигляді

$$z_k(t) = h(t) + \int_a^b G(t, s)(y_{k-1}(s) + \Phi(s)\mu_k)ds. \tag{40}$$

Підставляючи тепер (40) у (30) і враховуючи умову (36), приходимо до висновку, що послідовність $\{y_k(t),\ k \geq 1\}$ справді побудована за проекційно-ітеративним методом стосовно системи інтегральних рівнянь (14).

Зауваження 3. Окремим випадком запропонованого методу, коли $\delta_k(t) = 0$ при всіх k, є ітераційний метод, згідно з яким послідовні наближення до шуканого розв'язку задачі (1) – (4) будуються за формулами

$$y_k(t) = F(t, x_{k-1}(t), x_{k-1}(\omega(t))), \tag{41}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + A(t)\right) x_k(t) = C(t)\lambda_k + y_k(t), \tag{42}$$

$$x_k(a) = \gamma, \quad \int\limits_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha. \tag{43}$$

Ітераційний метод (41) – (43) за допомогою формул (38) очевидним чином зводиться до методу послідовних наближень для системи інтегральних рівнянь (14), умови збіжності та оцінки похибки якого відомі.

Зауваження 4. У випадку лінійної задачі (17), (18) для визначення вектора μ_k, як це встановлено в [6], отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Lambda\mu_k(t) = \int\limits_a^b \Psi(t)\varepsilon_k(t)dt, \tag{44}$$

де

$$\Lambda = \int\limits_a^b \Psi(t)(\Phi(t) - B(t)W(t) - D(t)W(\omega(t)))dt, \tag{45}$$

$$\varepsilon_k(t) = f(t) + B(t)x_{k-1}(t) + D(t)x_{k-1}((\omega(t)) - y_{k-1}(t). \tag{46}$$

5. Приклад. Розглянемо просту парну задачу з обмеженням

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda + 1 - 2t^3 + 3\sqrt{t} + x(t^2), \quad t \in J_1, \tag{47}$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda - 2 - 3\sqrt{t-1} + x(t) + x(t-1), \quad t \in J_2, \tag{48}$$

$$x(0) = 1, \quad \int\limits_0^2 x(t)dt = 4, \quad J_1 = [0,1], \quad J_2 = [1,2], \tag{49}$$

і зведемо її до інтегрального рівняння. Для цього запишемо її у вигляді

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda + y(t), \quad x(0) = 1, \quad \int\limits_0^2 x(t)dt = 4, \tag{50}$$

$$y(t) = \begin{cases} 1 - 2t^3 + 3\sqrt{t} + x(t^2), & t \in J_1, \\ -2 - 3\sqrt{t-1} + x(t) + x(t-1), & t \in J_2. \end{cases} \tag{51}$$

Розв'язавши задачу (50), отримаємо

$$x(t) = 1 + t + \int_0^t y(s)ds + t\int_0^2 \left(\frac{s}{2} - 1\right) y(s)ds, \quad \lambda = 1 + \int_0^2 \left(\frac{s}{2} - 1\right) y(s)ds,$$

або, ввівши позначення

$$\Gamma(s) = \frac{s}{2} - 1, \quad G(t,s) = \theta(t-s) + t\Gamma(s), \tag{52}$$

$$x(t) = 1 + t + \int_0^2 G(t,s)y(s)ds, \quad \lambda = 1 + \int_0^2 \Gamma(s)y(s)ds, \tag{53}$$

де $\theta(t-s)$ — функція Хевісайда.

Якщо підставити перший вираз (53) у формулу (51), то отримаємо інтегральне рівняння

$$y(t) = \begin{cases} 2 + t^2 - 2t^3 + 3\sqrt{t} + \displaystyle\int_0^2 G(t^2,s)y(s)ds, & t \in J_1, \\ 32t - 1 - 3\sqrt{t-1} + \displaystyle\int_0^2 (G(t,s) + G(t-1,s))y(s)ds, & t \in J_2, \end{cases} \tag{54}$$

тобто рівняння (20), у якому

$$p(t) = \begin{cases} 2 + t^2 - 2t^3 + 3\sqrt{t}, & t \in J_1, \\ 2t - 1 - 3\sqrt{t-1}, & t \in J_2, \end{cases} \qquad K(t,s) = \begin{cases} G(t^2,s), & t \in J_1, \\ G(t,s) + G(t-1,s), & t \in J_2. \end{cases} \tag{55}$$

Неважко перевірити безпосередніми обчисленнями, що функція

$$y^*(t) = \begin{cases} 2 + 3\sqrt{t}, & t \in J_1, \\ 2 - 3\sqrt{t-1}, & t \in J_2, \end{cases} \tag{56}$$

є розв'язком інтегрального рівняння (54). Отже, використавши формули (53) та (56), отримаємо розв'язок задачі (47) – (49)

$$\lambda^* = 1 + \int_0^2 \Gamma(s)y^*(s)ds = -2, \tag{57}$$

$$x^*(t) = 1 + t + \int_0^2 G(t,s)y^*(s)ds = \begin{cases} 1 + 2t\sqrt{t}, & t \in J_1, \\ 3 - (2t-2)\sqrt{t-1}, & t \in J_2. \end{cases} \tag{58}$$

Зауважимо, що інтегральне рівняння (54) в усьому просторі за допомогою формул (27), (28) та (23), (52), (55) можна звести до інтегрального рівняння вигляду (26) у підпросторі.

Застосуємо до задачі (47) – (49) ітераційний метод (41) – (43), згідно з яким наближення до шуканого розв'язку, з урахуванням співвідношень (50), (51) будуються за формулами

$$y_k(t) = \begin{cases} 1 - 2t^3 + 3\sqrt{t} + x_{k-1}(t^2), & t \in J_1, \\ -2 - 3\sqrt{\tau} + x_{k-1}(t) + x_{k-1}(\tau), & t \in J_2, \end{cases} \tag{59}$$

$$\frac{d}{dt}x_k(t) = \lambda_k + y_k(t), \quad x_k(0) = 1, \quad \int\limits_0^2 x_k(t)dt = 4. \tag{60}$$

Тут і в подальшому $\tau = t - 1$.

Нехай

$$y_0(t) = \begin{cases} 1 - 2t^3 + 3\sqrt{t}, & t \in J_1, \\ -2 - 3\sqrt{\tau}, & t \in J_2, \end{cases} \tag{61}$$

тоді початкове наближення знаходимо із задачі

$$\frac{d}{dt}x_0(t) = \lambda_0 + y_0(t), \quad x_0(0) = 1, \quad \int\limits_0^2 x_0(t)dt = 4. \tag{62}$$

Розв'язавши задачу (62) із урахуванням (61), отримаємо початкове наближення

$$\lambda_0 = \frac{1}{20}, \quad x_0(t) = \frac{1}{20}\begin{cases} 20 + 21t - 10t^4 + 40t\sqrt{t}, & t \in J_1, \\ 71 - 39\tau - 40\tau\sqrt{\tau}, & t \in J_2. \end{cases} \tag{63}$$

Продовживши обчислення за формулами (59), (60), можна знайти послідовність наближених розв'язків. На її побудові не зупиняємось, оскільки нас цікавить поведінка похибки

$$\Delta_k(t) = x_k(t) - x^*(t), \quad \beta_k = \lambda_k - \lambda^*, \tag{64}$$

яку, беручи до уваги формули (60), (50), (59), (51) та (64), визначаємо із задачі

$$\frac{d}{dt}\Delta_k(t) = \beta_k + w_k(t), \quad \Delta_k(0) = 0, \quad \int\limits_0^2 \Delta_k(t)dt = 0, \tag{65}$$

$$w_k(t) = \begin{cases} \Delta_{k-1}(t^2), & t \in J_1, \\ \Delta_{k-1}(t) + \Delta_{k-1}(\tau), & t \in J_2. \end{cases} \tag{66}$$

Початкова похибка нам відома, оскільки відомі точний розв'язок (57), (58) і початкове наближення (63), тобто

$$\beta_0 = \frac{41}{20}, \quad \Delta_0(t) = \frac{1}{20}\begin{cases} 21t - 10t^4, & t \in J_1, \\ 11 - 39\tau, & t \in J_2. \end{cases} \tag{67}$$

Її можна також знайти із задачі (65) при $k = 0$, задаючи

$$w_0(t) = \begin{cases} -1 - 2t^3, & t \in J_1, \\ -4, & t \in J_2. \end{cases} \tag{68}$$

Отже, ми визначили за методом (65), (66) ще три наступні послідовні похибки в явному вигляді, а їх затухання видно із таблиці.

t	$\Delta_0(t)$	$\Delta_1(t)$	$\Delta_2(t)$	$\Delta_3(t)$	$x_1(t)$	$x_2(t)$
0,25	0,2606	-0,0551	0,0030	-0,0009	-0,0045	-0,0002
0,5	0,4938	-0,0775	-0,0013	-0,0015	-0,0152	-0,0006
0,75	0,6293	-0,0383	-0,0148	-0,0022	-0,0145	-0,0026
1	0,5500	0,0521	-0,0168	-0,0068	0,0227	-0,0036
1,25	0,0625	0,1008	0,0005	-0,0092	0,0296	0,0045
1,5	-0,4250	0,0903	0,0123	-0,0050	-0,0008	0,0064
1,75	-0,9125	0,0060	0,0144	0,0089	-0,0168	-0,0011
2	-1,4000	-0,1903	0,0001	0,0410	0,0094	-0,0046
β, λ	2,0500	-0,2424	0,0169	-0,0042	-0,0134	-0,0009

Проілюструємо застосування проекційно-ітеративного методу до задачі

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda + \begin{cases} x(t^2), & t \in J_1, \\ x(t) + x(\tau), & t \in J_2, \end{cases} \tag{69}$$

$$x(0) = 0, \quad \int\limits_0^2 x(t)dt = 0. \tag{70}$$

За початкове наближення візьмемо $\lambda_0 = \beta_0$, $x_0(t) = \Delta_0(t)$. Тоді наближені розв'язки, побудовані за проекційно-ітеративним методом (29) – (37) стосовно задачі (69), (70), означатимуть похибку наближених розв'язків задачі (47) – (49), знайдених за цим же проекційно-ітеративним методом.

Нехай $n = 1$ і $\Phi(t) = 6t$, $\Psi(t) = t - 1$, тоді, оскільки $C(t) = 1$, $A(t) = 0$, умова (37) виконується, а задача (34), (35) зведеться до задачі

$$\frac{d}{dt}W(t) = E + 6t, \quad W(0) = 0, \quad \int\limits_0^2 W(t)dt = 0,$$

розв'язком якої є функція $W(t) = 3t^2 - 4t$. Після цього визначаємо функцію

$$\eta(t) = \begin{cases} W(t^2), & t \in J_1, \\ W(t) + W(\tau), & t \in J_2, \end{cases} = \begin{cases} 3t^4 - 4t^2, & t \in J_1, \\ 6\tau^2 - 2\tau - 1, & t \in J_2, \end{cases} \tag{71}$$

а за формулою (45) обчислюємо

$$\Delta = \int\limits_0^2 \Psi(t)(\Phi(t) - \eta(t))dt = \frac{103}{30}.$$

Побудуємо перше наближення. Для цього спочатку за проекційним методом знаходимо функцію

$$z_1(t) = x_0(t) + \mu_1(3t^2 - 4t). \tag{72}$$

Згідно з цим методом для визначення параметра μ_1 потрібно сформувати систему (44) і знайти її розв'язок. Праву частину системи обчислюємо за допомогою формули (46), тобто будуємо функцію

$$v_1(t) = \begin{cases} x_0(t^2), & t \in J_1, \\ x_0(t) + x_0(\tau), & t \in J_2, \end{cases} = \frac{1}{20} \begin{cases} 21t^2 - 10t^8, & t \in J_1, \\ 11 - 10\tau^4 - 18\tau, & t \in J_2, \end{cases} \tag{73}$$

і нев'язку

$$\varepsilon_1(t) = v_1(t) - y_0(t) = \frac{1}{20} \begin{cases} 20 + 21t^2 + 40t^3 - 10t^8, & t \in J_1, \\ 91 - 10\tau^4 - 18\tau, & t \in J_2, \end{cases}$$

де $y_0(t) = w_0(t)$. Виконавши обчислення, отримаємо

$$\frac{103}{30}\mu_1 = \frac{871}{720}, \qquad \mu_1 = \frac{871}{2472}.$$

Після цього перше наближення знаходимо за ітераційним методом, тобто виконуємо ітерацію

$$y_1(t) = \begin{cases} z_1(t^2), & t \in J_1, \\ z_1(t) + z_1(\tau), & t \in J_2, \end{cases} = v_1(t) + \mu_1\eta(t) \tag{74}$$

і шукане наближення визначаємо із задачі

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = \lambda_1 + y_1(t), \quad x_1(0) = 0, \quad \int\limits_0^2 x_1(t)dt = 0. \tag{75}$$

Розв'язавши задачу (75) із урахуванням формул (71) – (74), отримаємо

$$\lambda_1 = -0,01334,$$

$$x_1(t) = \begin{cases} -0,01334 - 0,11979t^3 + 0,21141t^5 - 0,05556t^9, & t \in J_1, \\ 0,02272 + 0,18432\tau - 0,80235\tau^2 + 0,70469\tau^3 - 0,1\tau^5, & t \in J_2. \end{cases}$$

Таким же способом можна побудувати друге наближення. Відхилення побудованих наближень від нуля видно з двох останніх стовпців таблиці.

1. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю.Д. Соколова // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1501 – 1509.
2. *Лучка А. Ю.* Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 465 – 488.
3. *Лучка А. Ю., Кучерук Т. А.* Ітераційний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 472 – 482.
4. *Лучка А. Ю., Ферук В. А.* Проекційно-ітеративний метод для систем диференціальних рівнянь із загаюванням та обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2003. — **6**, № 2. — С. 206 – 232.
5. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. — 288 с.
6. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язування систем функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. — Чернівці: Прут, 2006. — Вип. 13. — С. 134 – 152.

Одержано 09.10.2006