УДК 517 . 9

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ГРИНА ИМПУЛЬСНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

А. А. Бойчук

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: boichuk@imath.kiev.ua

С. М. Чуйко

Славян. пед. ун-т
Украина, 84116, Славянск Донецкой обл., ул. Г. Батюка, 19
e-mail: chujko-slav@inbox.ru

We obtain constructive existence conditions and build a generalized Green's operator for constructing solutions of a Noetherian linear boundary-value problem for a system of ordinary differential equations with switchings and impulsive effects in the critical and noncritical cases.

Одержано конструктивні умови існування та побудовано узагальнений оператор Гріна для побудови розв'язків нетерової лінійної крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь з перемиканнями та імпульсним впливом у критичному та некритичному випадках.

1. Постановка задачі. Рассмотрим задачу о нахождении решения

$$z(t) = \operatorname{col}\left(z^{(1)}(t), \ldots, z^{(n)}(t)\right), \quad z^{(j)}(\cdot) \in C^1\Big\{\, [a; b\,] \setminus \{\tau_i\}_I \Big\},$$

$$z^{(j)}(\cdot) \in C[a; b], \quad j = 1,\, 2, \ldots, n,$$

линейного однородного дифференциального уравнения с переключениями

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t) z, \quad t \in [\tau_i; \tau_{i+1}], \tag{1}$$

где $A_i(t)$ — $(n \times n)$-матрицы, непрерывные на отрезках $[a; \tau_1],\ [\tau_1; \tau_2], \ldots, [\tau_p; b]$.

Пусть $W_0(t)$ — нормальная $(W_0(a) = I_n)$ фундаментальная матрица системы (1) на отрезке $[a; \tau_1]$, а $W_1(t)$– фундаментальная матрица этой системы на отрезке $[\tau_1; \tau_2]$, которая удовлетворяет условию $W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1)$. Существование нормальной $(W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1))$ фундаментальной матрицы системы (1) на отрезке $[\tau_1; \tau_2]$ следует из невырожденности фундаментальных матриц системы (1) на отрезках $[a; \tau_1]$ и $[\tau_1; \tau_2]$. Таким образом, нормальная $(X_0(a) = I_n)$ фундаментальная матрица $X_0(t)$ системы (1) представима в виде

$$X_0(t) = \begin{cases} W_0(t), & t \in [a;\tau_1], & W_0(a) = I_n, \\ W_1(t), & t \in [\tau_1;\tau_2], & W_0(\tau_1) = W_1(\tau_1), \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Wp(t), & t \in [\tau_p;b], & W_p(\tau_p) = W_{p-1}(\tau_1). \end{cases} \tag{2}$$

Матрица $X_0(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и удовлетворяет системе (1).

Лемма 1. *Общее решение системы (1) обыкновенных дифференциальных уравнений с переключениями представимо в виде*

$$z(t,c) = X_0(t)c, \; c \in R^n,$$

где $X_0(t)$ — нормальная $(X_0(a) = I_n)$ фундаментальная матрица (2) этой системы.

Пример 1. Нормальная $(X_0(0) = 1)$ фундаментальная матрица системы с переключениями

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= A_1(t)z, \quad t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \\ \frac{dz}{dt} &= A_2(t)z, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right], \\ \frac{dz}{dt} &= A_3(t)z, \quad t \in \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right], \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$A_1(t) = A_3(t) = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = \begin{pmatrix} O_{2\times 2} & O \\ O & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

имеет вид

$$X_0(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} X_2(t) & O \\ O & e^t \end{pmatrix}, & t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], \\ \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & e^t \end{pmatrix}, & t \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right], \\ \begin{pmatrix} -X_2(t) & O \\ O & e^t \end{pmatrix}, & t \in \left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]. \end{cases}$$

Здесь

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

2. Линейные однородные краевые задачи с импульсным воздействием общего вида. Исследуем задачу о нахождении условий существования и построении решений

$$z = z(t) = \operatorname{col}\left(z^{(1)}(t), \ldots, z^{(n)}(t)\right), \quad z^{(j)}(\cdot) \in C^1\left\{\, [a; b\,] \setminus \{\tau_i\}_I \right\}, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переключениями

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t)z, \quad t \neq \tau_i, \tag{4}$$

удовлетворяющих однородному краевому условию

$$\mathcal{L}z(\cdot) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{5}$$

где $\mathcal{L}z(\cdot)$– линейный ограниченный векторный функционал вида

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i \, z(\cdot),$$

причем

$$\ell_i \, z(\cdot) : C^1[\tau_i; \tau_{i+1}[\times \ldots \times C^1[\tau_i; \tau_{i+1}[\to R^m, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, p-1, \tau_0 = a,$$

$$\ell_p \, z(\cdot) : C^1[\tau_p; b] \times \ldots \times C^1[\tau_p; b] \to R^m$$

— линейные ограниченные функционалы. Задача (4), (5) является обобщением краевой задачи [1] на случай систем с переключениями. Если импульсное воздействие (5) определяется посредством функционалов

$$\ell_0 z(\cdot) = \begin{bmatrix} N_1 z(\tau_1 - 0) \\ O_{n\times 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ O_{n\times 1} \\ O_{n\times 1} \end{bmatrix}, \; \ell_1 z(\cdot) = \begin{bmatrix} M_1 z(\tau_1 + 0) \\ N_2 z(\tau_2 - 0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ O_{n\times 1} \\ O_{n\times 1} \end{bmatrix}, \ldots,$$

действующих соответственно из пространств

$$C^1[a; \tau_1[\times \ldots \times C^1[a; \tau_1[, \; C^1[\tau_1; \tau_2[\times \ldots \times C^1[\tau_1; \tau_2[, \ldots$$

в пространство R^{pk}, а также функционалов

$$\ell_{p-1} z(\cdot) = \begin{bmatrix} O_{n\times 1} \\ O_{n\times 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{p-1} z(\tau_{p-1} + 0) \\ N_p z(\tau_p - 0) \end{bmatrix}, \; \ell_p z(\cdot) = \begin{bmatrix} O_{n\times 1} \\ O_{n\times 1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ O_{n\times 1} \\ M_p z(\tau_p + 0) \end{bmatrix},$$

действующих соответственно из пространств

$$C^1[\tau_{p-1};\tau_p[\times\ldots\times C^1[\tau_{p-1};\tau_p[,\ C^1[\tau_p;b]\times\ldots\times C^1[\tau_p;b]$$

в пространство R^{pk}, получаем задачу, рассмотренную в [2]. Здесь $M_i,\ N_i-$ $(k\times n)$-матрицы. В частности, при $R(N_i)=R(M_i), N(N_i)=\varnothing$ имеем задачу, исследованную в [3], в случае $k=n$ — исследованную в [4, 5], а при условии невырожденности матриц M_i, N_i — исследованную в [6]. Здесь $R(N_i), N(N_i)$ — соответственно образы и нуль-пространства матриц N_i. Далее, при условии, что все матрицы $N_i=-(I_n+S_i)$ невырождены, а матрицы $M_i=I_n$, получаем задачу, исследованную в [7–9]. В частности, если $S_i=0$, имеем задачу, исследованную в [10]. Если для некоторых i матрицы I_n+S_i вырождены, имеет место вырожденное импульсное воздействие [11].

Таким образом, для задач, исследованных С. Швабиком, А. М. Самойленко, Н. А. Перестюком и А. А. Бойчуком, а также для задач с вырожденным импульсным воздействием функционал, определяющий разрыв интегральной кривой в точках $\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_p$, использует информацию об этой кривой только в этих точках: функционалы $\ell_0z(\cdot)$ и $\ell_1z(\cdot)$ определяют первый $(i=1)$ разрыв интегральной кривой в точке τ_1 , функционалы $\ell_1z(\cdot)$ и $\ell_2z(\cdot)$ — второй $(i=2)$ разрыв интегральной кривой в точке τ_2 и так далее, функционалы $\ell_{p-1}z(\cdot)$ и $\ell_pz(\cdot)$ — последний $(i=p)$ разрыв интегральной кривой в точке τ_p.

Если импульсное воздействие (5) определяется посредством функционалов

$$\ell_0z(\cdot)=\begin{bmatrix}\ell_1^{(0)}z(\cdot)\\ \ell_2^{(0)}z(\cdot)\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ell_{p-1}^{(0)}z(\cdot)\\ \ell_p^{(0)}z(\cdot)\end{bmatrix},\ \ell_1z(\cdot)=\begin{bmatrix}\ell_1^{(1)}z(\cdot)\\ \ell_2^{(1)}z(\cdot)\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ell_{p-1}^{(1)}z(\cdot)\\ \ell_p^{(1)}z(\cdot)\end{bmatrix},\ \ell_2z(\cdot)=\begin{bmatrix}O_{n\times1}\\ \ell_2^{(2)}z(\cdot)\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ell_{p-1}^{(2)}z(\cdot)\\ \ell_p^{(2)}z(\cdot)\end{bmatrix},\ldots,$$

действующих соответственно из пространств

$$C^1[a;\tau_1[\times\ldots\times C^1[a;\tau_1[,\quad C^1[\tau_1;\tau_2[\times\ldots\times C^1[\tau_1;\tau_2[,\quad C^1[\tau_2;\tau_3[\times\ldots\times C^1[\tau_2;\tau_3[,\ldots$$

в пространство $R^{(p+1)k}$, а также функционалов

$$\ell_{p-1}z(\cdot)=\begin{bmatrix}O_{n\times1}\\ O_{n\times1}\\ \ldots\ldots\ldots\\ \ell_{p-1}^{(p-1)}z(\cdot)\\ \ell_p^{(p-1)}z(\cdot)\end{bmatrix},\ \ell_pz(\cdot)=\begin{bmatrix}O_{n\times1}\\ O_{n\times1}\\ \ldots\ldots\ldots\\ O_{n\times1}\\ \ell_p^{(p)}z(\cdot)\end{bmatrix},$$

действующих соответственно из пространств

$$C^1[\tau_{p-1};\tau_p[\times\ldots\times C^1[\tau_{p-1};\tau_p[,\quad C^1[\tau_p;b]\times\ldots\times C^1[\tau_p;b]$$

в пространство $R^{(p+1)k}$, получаем задачу с краевыми условиями типа „interface conditions", исследованную в [2, 12, 13]; здесь

$$\ell_i^{(0)}z(\cdot): C[a;\tau_1[\to R^k,\ldots,\ell_i^{(i)}\,z(\cdot): C\,[\tau_i;\tau_{i+1}[\to R^k,\ i=1,\ldots,p-1,\ldots,$$

$$\ell_p^{(0)}\,z(\cdot): C[a;\tau_1[\to R^k,\ldots,\ell_p^{(p)}\,z(\cdot): C\,[\tau_p;b]\to R^k$$

— линейные ограниченные функционалы.

Таким образом, для задач с краевыми условиями типа „interface conditions" разрыв интегральной кривой при продолжении с промежутка $[a;\tau_1\,[$ на промежуток $[\tau_1;\tau_2[$ определяется посредством функционалов $\ell_1^{(0)}z(\cdot)$ и $\ell_1^{(1)}z(\cdot)$, определенных, в отличие от задач, исследованных А. М. Самойленко, Н. А. Перестюком и С. Швабиком, а также от задач с вырожденным импульсным воздействием, на всей длине этих промежутков, а не только на концах τ_1-0 и τ_1 этих промежутков. Разрыв интегральной кривой при продолжении с промежутка $[a;\tau_1\,[\cup[\tau_1;\tau_2[$ на промежуток $[\tau_2;\tau_3[$ определяется посредством функционалов $\ell_2^{(0)}z(\cdot)$, $\ell_2^{(1)}z(\cdot)$ и $\ell_2^{(2)}z(\cdot)$, определенных на промежутке $[a;\tau_3\,[$, за исключением точек τ_1 и τ_2. И далее, разрыв интегральной кривой при продолжении с промежутка $[a;\tau_1\,[\cup[\tau_1;\tau_2[\cup\,\ldots\,\cup[\tau_{p-1};\tau_p[$ на промежуток $[\tau_p;b]$ определяется посредством функционалов $\ell_p^{(0)}\,z(\cdot)$, $\ell_p^{(1)}\,z(\cdot),\ldots,\ell_p^{(p)}\,z(\cdot)$, определенных на промежутке $[a;b]$, за исключением точек $\tau_1,\tau_2,\ldots,\ \tau_p$. Частным случаем задач вида (4), (5) является и серия из p не связанных между собою краевых задач

$$\frac{dz}{dt}=A_i(t)z,\ \ell_i z(\cdot)=\alpha_i,$$

определенных на промежутках $[\tau_i;\tau_{i+1}[,\ \ i=1,2,\ldots,\ p$, где

$$\alpha_i\in R^{m_i},\ \mathrm{col}\left(\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_p\right)\in R^m,\ \ m_1+m_2+\ldots+m_p=m.$$

И наконец, краевая задача (4), (5) является обобщением традиционной задачи о нахождении гладких решений системы (4), удовлетворяющих линейному краевому условию [7]. С другой стороны, краевое условие (5) эквивалентно условию [14], при этом краевая задача (4), (5) является частным случаем краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений [14]. В отличие от задач с невырожденным импульсным воздействием, а также от задач с краевыми условиями типа „interface conditions" [12, 13] ранг любой фундаментальной матрицы $X(t)$ задачи (4), (5) может быть меньше n на любом из промежутков $[a;\tau_1[,\ [\tau_1;\tau_2[,\ldots,[\tau_p;b]\subset[a;b]$, в том числе и на полуинтервале $[a;\tau_1[$. Примером последней ситуации является любая фундаментальная матрица $X(t)$ традиционной задачи [7] о нахождении гладких периодических решений системы (4) при условии наличия у системы (4) как периодических, так и непериодических решений. Поскольку ранг любой из фундаментальных матриц $X(t)$ задачи (4), (5) может быть меньше n на полуинтервале

$[a;\tau_1[$, подлежит обобщению само определение нормальной фундаментальной матрицы $X(t)$ задачи (4), (5).

Пример 2. Решения краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = 0,\ t \in [0;3], \qquad t \neq \tau_1, \tau_2,$$
$$\int\limits_0^1 z(t)dt = 0,\ \int\limits_2^3 z(t)dt = 0 \qquad \tau_1 = 1, \tag{6}$$
$$z(1+0) - z(2-0) = 0, \qquad \tau_2 = 2,$$

представимы в виде $z(t,c) = X(t)c,\ c \in R^1$, где

$$X(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;1[, \\ 1, & t \in [1;2[, \\ 0, & t \in [2;3]. \end{cases}$$

Таким образом, размерность общего решения задачи (6) не нулевая лишь при $t \in \in [1;2[$, при этом естественно из всех фундаментальных систем решений задачи (6) выделить решение, норма которого при $t \in [1,2[$ равна единице. Полученная в примере 2 структура фундаментальной системы решений задачи (6) невозможна ни для задач с вырожденным импульсным воздействием [11], ни для задач с краевыми условиями типа „interface conditions” [12].

Пусть $X_0(t)$ — нормальная $(X_0(a) = I_n)$ фундаментальная матрица системы (4); фундаментальную матрицу нетривиальных решений задачи (4), (5) ищем в виде

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t)Y_0, & t \in [a;\tau_1[, \\ X_0(t)Y_1, & t \in [\tau_1;\tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0(t)Y_p, & t \in [\tau_p;b], \end{cases} \tag{7}$$

где $Y_0, \dots, Y_p$ — неизвестные постоянные $(n \times n)$-матрицы. Подставляя матрицу (7) в краевое условие (5), получаем равенство

$$\mathcal{L}X(\cdot) = \sum_{i=0}^{p} \ell_i\, X_0(\cdot)Y_i = O,$$

равносильное уравнению

$$QY = O, \tag{8}$$

где

$$Q = \begin{bmatrix} \ell_0 X_0(\cdot) & \ell_1 X_0(\cdot) & \dots & \ell_p X_0(\cdot) \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \dots \\ Y_p \end{bmatrix}$$

— соответственно $(m \times n(p+1))$- и $(n(p+1) \times n)$-постоянные матрицы, O — нулевая $(m \times n)$-матрица. Обозначим через $P_Q: \; R^{n(p+1)} \to N(Q)$ $(n(p+1) \times n(p+1))$-мерную матрицу-ортопроектор [7].

Лемма 2. *При условии $P_Q = O$ задача (4), (5) на всем отрезке $[a;b]$ имеет только нулевое решение.*

Пример 3. Условия леммы выполнены для переопределенной краевой задачи

$$\frac{dz}{dt} = z, \quad t \in [0;2], \quad t \neq 1, \; z(0) = 0, \; z(1+0) = 0. \tag{9}$$

Согласно принятым обозначениям $X_0(t) = e^t$,

$$\ell_0 z(\cdot) = \begin{bmatrix} z(0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ell_1 z(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 \\ z(1+0) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix}.$$

Поскольку матрица Q имеет полный ранг, то $P_Q = O_2$, при этом задача (9) на всем отрезке $[0;2]$ имеет только нулевое решение.

Пусть, далее, $P_Q \neq O$, при этом общее решение уравнения (8) имеет вид $Y = P_Q C$, где C — произвольная $((p+1)n \times n)$-матрица [7]. Положим

$$P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ P_Q^{(p)} \end{bmatrix}, \quad C = \tilde{I} \cdot C^{(0)}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} I_n \\ I_n \\ \ldots\ldots\ldots \\ I_n \end{bmatrix},$$

где $P_Q^{(0)}, P_Q^{(1)}, \ldots, P_Q^{(p)}$ — $(n \times n(p+1))$-мерные блоки ортопроектора P_Q, C^0 — произвольная постоянная $(n \times n)$-матрица, $\tilde{I}$ — постоянная $(n(p+1) \times n)$-матрица. В новых обозначениях общее решение уравнения (8)

$$Y = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \tilde{I} C^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \tilde{I} C^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_Q^{(p)} \tilde{I} C^{(0)} \end{bmatrix}$$

определяет искомые матрицы

$$Y_0 = P_Q^{(0)} \tilde{I} C^{(0)}, \; Y_1 = P_Q^{(1)} \tilde{I} C^{(0)}, \ldots, Y_p = P_Q^{(p)} \tilde{I} C^{(0)}.$$

Таким образом, приходим к матрице

$$X(t)=\begin{cases} X_0(t)P_Q^{(0)}\tilde{I}C^{(0)}, & t\in[a;\tau_1[,\\ X_0(t)P_Q^{(1)}\tilde{I}C^{(0)}, & t\in[\tau_1;\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\\ X_0(t)P_Q^{(p)}\tilde{I}C^{(0)}, & t\in[\tau_p;b].\end{cases}$$

Положим

$$C^{(0)}=\frac{1}{p_0}I_n,\quad \max\operatorname{rank}P_Q^{(i)}\tilde{I}=\operatorname{rank}P_Q^{(i_0)}\tilde{I},\quad ||X_0(\tau_{i_0+0})P_Q^{(i_0)}\tilde{I}||=p_0.$$

матрицу

$$X(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{p_0}X_0(t)P_Q^{(0)}\tilde{I}, & t\in[a;\tau_1[,\\ \dfrac{1}{p_0}X_0(t)P_Q^{(1)}\tilde{I}, & t\in[\tau_1;\tau_2[,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dfrac{1}{p_0}X_0(t)P_Q^{(p)}\tilde{I}, & t\in[\tau_p;b],\end{cases} \tag{10}$$

назовем фундаментальной матрицей задачи (4), (5), нормированной в точке $\tau_{i_0}+0$: $||X(\tau_{i_0}+0)||=1$. В случае, когда $\operatorname{rank}P_Q^{(i)}\tilde{I}$ достигает своего максимума сразу в нескольких точках $\tau_{i_0},\ \tau_{i_1},\dots$, нормируем матрицу $X(t)$ в точке τ_{i_0}, представляющей наименьшее из этих чисел. Норму функции $f(\cdot)\in C^1\Big\{[a,b\,]\setminus\{\tau_i\}_I\Big\}$ аналогично [14] полагаем равной $||f(t)||=|f(a)|+\operatorname{var}{}_a^b f(t)$.

Лемма 3. *При условии $P_Q\neq O$ задача (4), (5) имеет семейство решений*

$$z(t,c)=X(t)c,\ c\in R^n,$$

представимое нормированной $(||X(\tau_{i_0}+0)||=1)$ *фундаментальной матрицей (10) задачи (4), (5).*

Нормированная фундаментальная матрица $X(t)$ задачи (4), (5) является обобщением нормальной $(X(a)=I_n)$ фундаментальной матрицы $X(t)$ задачи о нахождении непрерывных решений системы (1), удовлетворяющих линейному краевому условию [7], задачи с вырожденным или невырожденным импульсным воздействием, а также задачи с краевыми условиями типа „interface conditions”, в том числе с переключениями. Для этих задач $\tau_{i_0}=a$, условие же нормировки $||X(\tau_{i_0}+0)||=1$ заменяет условие $X(a)=I_n$. С другой стороны, нормальная фундаментальная матрица $X(t)$ задачи (4), (5) является обобщением соответствующей матрицы [1] на случай краевой задачи с переключениями.

Пример 4. Условия леммы 3 выполнены для антипериодической задачи

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= A_i(t)z, & t &\in [0; 2\pi], \\ z(+0) + z(2\pi - 0) &= 0, & \tau_1 &= \frac{\pi}{2}, \\ z\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) + z\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) &= 0, & \tau_2 &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

матрицы $A_i(t)$ и $X_0(t)$ приведены в примере 1. Согласно принятым обозначениям

$$\ell_0 z(\cdot) = \begin{bmatrix} z(0+) \\ O \end{bmatrix}, \quad \ell_1 z(\cdot) = \begin{bmatrix} O \\ z\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) + z\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) \end{bmatrix}, \quad \ell_2 z(\cdot) = \begin{bmatrix} z(2\pi - 0) \end{bmatrix},$$

следовательно,

$$\ell_0 X_0(\cdot) = \begin{bmatrix} I_2 & O \\ O & 1 \\ O_{2\times 2} & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \ell_1 X_0(\cdot) = \begin{bmatrix} O_{2\times 2} & O \\ O & O \\ 2J_2 & O \\ O & e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{3\pi}{2}} \end{bmatrix}, \ \ell_2 X_0(\cdot) = \begin{bmatrix} -I_2 & O \\ O & e^{2\pi} \\ O_{2\times 2} & O \end{bmatrix}.$$

Условия леммы 3 выполнены, так как для матрицы

$$Q = [\ell_0 X_0(\cdot)\ \ell_1 X_0(\cdot)\ \ell_2 X_0(\cdot)] = \begin{bmatrix} I_2 & O & O_{2\times 2} & O & -I_2 & O \\ O & 1 & O & O & O & e^{2\pi} \\ O_{2\times 2} & O & 2J_2 & O & O_{2\times 2} & O \\ O & O & O & e^{\frac{3\pi}{2}} + e^{\frac{3\pi}{2}} & O & O \end{bmatrix}$$

ортопроектор

$$P_Q = \begin{bmatrix} P_Q^{(0)} \\ P_Q^{(1)} \\ P_Q^{(2)} \end{bmatrix} \neq O_{9\times 9}.$$

Здесь

$$P_Q^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & qe^{4\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -q \end{bmatrix},$$

$$P_Q^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_Q^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -qe^{2\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \end{bmatrix}.$$

Поскольку

$$\max \operatorname{rank} P_Q^{(i)} \tilde{I} = \operatorname{rank} P_Q^{(0)} \tilde{I} = \operatorname{rank} P_Q^{(2)} \tilde{I} = 3,$$

то $\tau_{i_0} = 0$ и $p_0 = 1$, при этом нормированная фундаментальная матрица задачи (11) имеет вид

$$X(t) = \begin{cases} X_0(t) P_Q^{(0)} \tilde{I}, & t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ X_0(t) P_Q^{(1)} \tilde{I}, & t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \quad q = \dfrac{1}{1+e^{4\pi}}. \\ X_0(t) P_Q^{(2)} \tilde{I}, & t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

Таким образом,

$$X(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} X_2(t) & O \\ O & e^t \dfrac{e^{2\pi}(e^{2\pi}-1)}{1+e^{4\pi}} \end{pmatrix}, & t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[, \\ \begin{pmatrix} O_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}, & t \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[, \\ \begin{pmatrix} -X_2(t) & O \\ O & e^t \dfrac{1-e^{2\pi}}{1+e^{4\pi}} \end{pmatrix}, & t \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]. \end{cases}$$

Полученная фундаментальная матрица $X(t)$ задачи (11) нормирована в точке $\tau_{i_0} + 0 = = +0$, причем $||X(1+0)|| = X(1+0) = 1$. Ранг нормированной фундаментальной матрицы задачи (11) ненулевой на промежутках $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ и $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, что невозможно для нормальной $(X(a) = I_n)$ фундаментальной матрицы $X(t)$ задачи о нахождении гладких решений системы (1), удовлетворяющих линейному краевому условию, и задачи с невырожденным импульсным воздействием [7].

3. Импульсная краевая задача с переключениями в критическом случае. Исследуем задачу о нахождении условий существования и построении решений

$$z = z(t) = \operatorname{col}\left(z^{(1)}(t), \ldots, z^{(n)}(t)\right), \quad z^{(j)}(\cdot) \in C^1\left\{[a;b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переключениями

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t)z + f_i(t), \quad t \neq \tau_i, \ i = 1, 2, \ldots, p, \tag{12}$$

с неоднородным импульсным воздействием

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \alpha, \tag{13}$$

где функции $f_i(t)$ непрерывны на отрезках $[a, \tau_1],\ [\tau_1, \tau_2],\ [\tau_p, b],\ \alpha \in R^m$. Предположим выполненными условия леммы 3. Решение задачи (12), (13) ищем в виде

$$z(t) = \begin{cases} X_0(t)\gamma_0 + K\left[f_i(s)\right](t), \quad t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)\gamma_1 + K\left[f_i(s)\right](t), \quad t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0(t)\gamma_p + K\left[f_i(s)\right](t), \quad t \in [\tau_p; b], \end{cases} \tag{14}$$

где

$$K\left[f_i(s)\right](t) = X_0(t)\int\limits_a^t X_0^{-1}(s)f_i(s)ds$$

— оператор Грина задачи Коши для системы (12), $\gamma_0,\ \gamma_1, \dots,\ \gamma_p$ — неизвестные постоянные из R^n, для нахождения которых используем условие (13):

$$Q\gamma = \alpha - \mathcal{L}K\left[f_i(s)\right](\cdot). \tag{15}$$

Здесь

$$\gamma = \mathrm{col}\,(\gamma_0, \dots, \gamma_p) \in R^{n(p+1)}, \quad Q = \left[\ell_0 X_0(\cdot)\ell_1 X_0(\cdot)\dots\ell_p X_0(\cdot)\right]$$

— $(m \times n(p+1))$-матрица. Система (15) разрешима тогда и только тогда, когда

$$P_{Q^*}\left\{\alpha - \mathcal{L}K\left[f_i(s)\right](\cdot)\ \right\} = O, \tag{16}$$

где P_{Q^*} — $(m \times m)$-матрица-ортопроектор: $R^m \rightarrow N(Q^*),\ O \in R^m$. При выполнении условия (16) общее решение задачи (12), (13) имеет вид

$$z(t,\ c) = X(t)\,c + G\left[f_i(s); \alpha\right](t),$$

где

$$\mathrm{col}\,(\bar\gamma_0, \bar\gamma_1, \dots, \bar\gamma_p) = Q^+\left\{\alpha - \mathcal{L}K\left[f_i(s)\right](\cdot)\right\},$$

$$G\left[f_i(s); \alpha\right](t) = \begin{cases} X_0(t)\bar\gamma_0 + K\left[f_i(s)\right](t), \quad t \in [a; \tau_1[, \\ X_0(t)\bar\gamma_1 + K\left[f_i(s)\right](t), \quad t \in [\tau_1; \tau_2[, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0(t)\bar\gamma_p + K\left[f_i(s)\right](t), \quad t \in [\tau_p; b], \end{cases} \tag{17}$$

— обобщенный оператор Грина задачи (12), (13). При условии $P_{Q^*} \neq O$ задача (12), (13) разрешима для тех и только тех неоднородностей $f_i(t) \in C^1\left\{[a, b] \setminus \{\tau_i\}_I\right\}$ и $\alpha \in R^m$, которые удовлетворяют условию (16). Следуя традиционной классификации краевых задач

[7], случай $P_{Q^*} \neq O$ назовем критическим; в этом случае условия существования и вид общего решения задачи (12), (13) определяет следующая теорема.

Теорема. *В критическом* $(P_{Q^*} \neq O)$ *случае задача (12), (13) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (16), и для любого* $c \in R^n$ *имеет решение*

$$z(t,c) = X(t)c + G\left[f_i(s);\alpha\right](t), \tag{18}$$

где $G\left[f_i(s);\alpha\right](t)$ — *обобщенный оператор Грина (17) задачи (12), (13).*

Доказанная теорема обобщает аналогичные утверждения для различных гибридных задач. Действительно, для систем с толчками в заданные моменты времени, исследованных А. Д. Мышкисом и А. М. Самойленко, неоднородная задача Коши $z(a) = \alpha$ для системы (12) в критическом случае разрешима не для всех $\alpha \in R^n$ (условие 3 в статье [15, с. 203]). Для задачи [11] с вырожденным импульсным воздействием $(np \times n(p+1))$-матрица

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} (I_n+S_1)X_0(\tau_1) & X_0(\tau_1) & \ldots\ldots & O_{n\times n} & O_{n\times n} \\ O_{n\times n} & (I_n+S_2)X_0(\tau_2) & \ldots\ldots & O_{n\times n} & O_{n\times n} \\ \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} & \ldots\ldots & X_0(\tau_{p-1}) & O_{n\times n} \\ O_{n\times n} & O_{n\times n} & \ldots\ldots & (I_n+S_p)X_0(\tau_{p-1}) & X_0(\tau_p) \end{pmatrix}$$

не является матрицей полного ранга, поскольку вырождается хотя бы одна из матриц $(I_n+S_1), (I_n+S_2), \ldots, (I_n+S_p)$; при этом $\operatorname{rank}\tilde{Q} = n_1 < np$, следовательно, $\operatorname{rank} P_{\tilde{Q}^*} = np - n_1 > 0$ и задача с вырожденным импульсным воздействием [11] представляет критический случай $(P_{\tilde{Q}^*} \neq O)$ и разрешима не для всех неоднородностей, а лишь для тех и только тех, для которых выполнено условие (16). Доказанная теорема обобщает также соответствующие утверждения для задач с краевыми условиями типа „interface conditions" [12] и более общими импульсными условиями [1] на случай задач с переключениями.

Пример 5. Условия теоремы выполнены для задачи

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t)z + f_i(t), \quad t \in [0;3],\ t \neq 1,\ t \neq 2,\ \mathcal{L}z(\cdot) = \alpha, \tag{19}$$

где

$$\mathcal{L}z(\cdot) = \operatorname{col}\left(z(1+0) - z(2-0);\ z(0) - z(3)\right),$$

$$A_i(t) = \begin{cases} 2t-2, & t \in [0;1[, \\ 0, & t \in [1;2[, \\ 2t-2, & t \in [2;3], \end{cases} \quad f_i(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;1[, \\ 2t-3, & t \in [1;2[, \\ 0, & t \in [2;3], \end{cases} \quad \alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нормальная фундаментальная матрица однородной части дифференциальной системы (19)

$$X_0(t) = \begin{cases} e^{t^2-2t}, & t \in [0;1[, \\ e^{-1}, & t \in [1;2[, \\ e^{t^2-2t-1}, & t \in [2;3], \end{cases}$$

определяет матрицы

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & e^2 \end{pmatrix}, \quad Q^+ = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{1+e^4} \\ 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{e^2}{1+e^4} \end{pmatrix}$$

и проекторы

$$P_{Q^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_Q = \begin{pmatrix} \dfrac{e^4}{1+e^4} & 0 & \dfrac{e^2}{1+e^4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{e^2}{1+e^4} & 0 & \frac{1}{1+e^4} \end{pmatrix}.$$

Строки проектора P_Q определяют фундаментальную матрицу задачи (19); нормируя ее, получаем

$$X(t) = \begin{cases} e^{t^2-2t}, & t \in [0;1[, \\ \dfrac{1+e^4}{e^3(1+e^2)}, & t \in [1;2[, \\ e^{t^2-2t-3}, & t \in [2;3]. \end{cases}$$

Поскольку $P_{Q^*} \neq 0$, имеет место критический случай;

$$K\left[f_i(s)\right](t) = \begin{cases} 0, & t \in [0;1[, \\ t-1, & t \in [1;2[, \\ 0, & t \in [2;3], \end{cases} \qquad \mathcal{L}K\left[f_i(s)\right](\cdot) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

поэтому согласно теореме условие (16) разрешимости задачи (20) выполнено, при этом общее решение задачи (20) имеет вид (18), где

$$G\left[f_i(s);\alpha\right](t) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^4} e^{t^2-2t}, & t \in [0;1[, \\ t-1, & t \in [1;2[, \\ -\dfrac{1}{1+e^4} e^{t^2-2t+1}, & t \in [2;3]. \end{cases}$$

4. Некритическая импульсная краевая задача с переключениями. В простейшем случае, когда $P_{Q^*} = O$, задача (12), (13) разрешима при любых неоднородностях $f_i(t)$ и α. Следуя традиционной классификации краевых задач [7], случай $P_{Q^*} = O$ назовем некритическим. В этом случае вид общего решения задачи (12), (13) определяет следующее утверждение, обобщающее соответствующие результаты [3, 7, 8, 11], а также [14] в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следствие. *В некритическом* $(P_{Q^*} = O)$ *случае задача (12), (13) разрешима при любых неоднородностях* $f_i(t) \in C^1\{[a,b] \setminus \{\tau_i\}_I\}$ *и* $\alpha \in R^m$ *и для любого* $c \in R^n$ *имеет решение* $z(t,\, c) = X(t)\, c + G\,[f_i(s);\alpha]\,(t)$, *где* $G\,[f_i(s);\alpha]\,(t)$*– обобщенный оператор Грина (4) задачи (12), (13).*

Доказанное следствие обобщает аналогичные утверждения для задач с невырожденным импульсным воздействием [11] и для задач с краевыми условиями типа „interface conditions" [12]. Действительно, для задачи с невырожденным импульсным воздействием матрица $\tilde{Q}$ является матрицей полного ранга, поскольку не вырождается ни одна из матриц $(I_n + S_1),\ \ (I_n + S_2), \ldots, (I_n + S_p)$; при этом $\operatorname{rank} \tilde{Q} = n_1 = np$. Следовательно, $\operatorname{rank} P_{\tilde{Q}^*} = 0$ и задача с невырожденным импульсным воздействием [11] представляет некритический случай $(P_{\tilde{Q}^*} \neq O)$ и, как видно из следствия, разрешима для любых неоднородностей $f_i(t)$ и α.

Пример 6. Условия следствия выполнены для задачи

$$\frac{dz}{dt} = A_i(t)z, \ \ t \in [0;2\pi], \ \ t \neq \frac{\pi}{2}, \ \ t \neq \frac{3\pi}{2}, \ \ \mathcal{L}z(\cdot) = \alpha, \tag{20}$$

где функционал $\mathcal{L}z(\cdot)$, матрицы $A_i(t)$ и $X_0(t)$ определены в примере 1,

$$\alpha = \operatorname{col}\,(\,2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\,)\,, \ \ f_i(t) \equiv O.$$

Нормальная фундаментальная матрица этой задачи найдена в примере 4; соответствующая ей (6×9)-матрица Q является матрицей полного ранга, следовательно, $\operatorname{rank} P_{Q^*} = 0$. Это означает, что задача (20) представляет некритический случай. Частное решение этой задачи

$$G\,[O;\alpha]\,(t) = \begin{cases} X_0(t)\bar{\gamma}_0, & t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \\[2mm] X_0(t)\bar{\gamma}_1, & t \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[, \\[2mm] X_0(t)\bar{\gamma}_2, & t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right], \end{cases}$$

определяет вектор

$$\operatorname{col}(\bar{\gamma}_0,\ \bar{\gamma}_1,\ \bar{\gamma}_2) = Q^+\alpha = \operatorname{col}\,(\,0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\,)\,.$$

Таким образом, для любого $c \in R^3$ решение этой задачи имеет вид

$$z(t,c) = X(t)c + G\,[O;\alpha]\,(t),$$

где

$$G\,[O;\alpha]\,(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right[, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right[, \\ \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, & t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]. \end{cases}$$

1. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Докл. РАН. — 2001. — **379**, № 2. — С. 170 – 172.

2. *Conti R.* On ordinary differential equation with interface conditions // J. Different. Equat. — 1968. — **4**, № 1. — P. 4 – 11.

3. *Sčhwabik S.* Differential equations with interface conditions// Čas. pestov. mat. — 1980. — № 105. — P. 391 – 410.

4. *Pignani T. J., Whyburn W. M.* Differential systems with interface and general boundary conditions // F. Elisha Mitchell Sci. Soc. — 1956. — № 72. — P. 1 – 14.

5. *Stallard F. W.* Differential systems with interface conditions // Oak Ridge Nat. Laboratory, Rept № 1876.

6. *Pham D., Weiss D.* Sur un probléme aux limites pour un systéme ordinaire d'équations differentielles // C. r. Acad. sci. Paris. — 1966. — № 262. — P. 123 – 126.

7. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 p.

8. *Бойчук А. А., Перестюк Н. А., Самойленко А. М.* Периодические решения импульсных дифференциальных систем в критических случаях // Дифференц. уравнения. — 1991. — **5**, № 9. — С. 1516 – 1521.

9. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.

10. *Wexler D.* On boundary value problems for an ordinary linear differential systems // Ann. mat. pura ed appl. — 1968. — **80**. — P. 123 – 136.

11. *Бойчук А. А., Чуйко Е. В., Чуйко С. М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1996.– **48**, № 5. — С. 588 – 594.

12. *Чуйко С. М.* Оператор Грина краевой задачи с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**. № 8. — С. 1132 – 1135.

13. *Чуйко С. М., Чуйко Е. В.* Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием // Докл. НАН Украины. — 1999. — № 6. — С. 43 – 47.

14. *Анохин А. В.* О линейных импульсных системах для функционально-дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. — 1986. — **286**, № 5. — С. 1037 – 1040.

15. *Мышкис А. Д., Самойленко А. М.* Системы с толчками в заданные моменты времени // Мат. сб. — 1967. – **74 (116)**, № 2. — С. 202 – 208.

Получено 30.08.2006