УДК 519.248

В.И. НОРКИН, Б.О. ОНИЩЕНКО

ОПТИМИЗАЦИЯ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Ключевые слова: *оптимизация надежности, оптимальное резервирование, миноранты, мажоранты, стохастические миноранты, стохастическое программирование, дискретная оптимизация, стохастический метод ветвей и границ, перестановочная релаксация, динамическое программирование.*

ВВЕДЕНИЕ

Обычно задача оптимизации надежности и, в частности, оптимального резервирования ставится как задача минимизации вероятности отказа системы при ограничении на стоимость ресурсов (резервных элементов), предназначенных для повышения надежности [1–3]. Если отказы подсистем или элементов происходят независимо, то для заданной топологии системы и законов ее функционирования вероятность отказа всей системы может быть вычислена как нелинейная и невыпуклая функция вероятностей отказа элементов. Вероятность отказа каждого элемента является функцией количества ресурсов, вложенных в повышение надежности этого элемента, и может быть как непрерывной, так и дискретной зависимостью, в последнем случае, например, от числа находящихся в резерве элементов. Поэтому, в целом, задача оптимального резервирования является сложной задачей нелинейной непрерывной или дискретной оптимизации. Для ее решения широко используются методы нелинейного программирования и дискретной оптимизации, такие как метод динамического программирования, ветвей и границ, последовательного анализа вариантов, различные эвристические процедуры. Для специальных задач развиваются специальные методы сокращения перебора.

В случае зависимых отказов подсистем выписать в явном виде вероятность отказа всей системы как функцию вероятностей отказа отдельных элементов, как правило, не удается, поэтому практическая постановка задачи тогда представляет проблему. Необходимо представить показатель надежности как функцию непрерывных или дискретных оптимизируемых параметров. Однако задачу оптимизации надежности можно переформулировать в терминах времени жизни системы и ее подсистем. Оказывается, случайное время жизни всей системы сравнительно просто выражается через случайные времена жизни элементов, которые, в свою очередь, можно выразить через числа резервных элементов и их времена жизни. Теперь задачу оптимизации надежности можно представить как задачу максимизации среднего времени жизни системы при ограничении на стоимость резервных элементов [1, 2]. Целевая функция в этой задаче, как правило, не вычисляется в явном виде, поскольку является математическим ожиданием (многомерным интегралом) сложной подынтегральной функции, а параметры этой функции — времена жизни элементов — являются зависимыми случайными величинами. Такая целевая функция может быть оценена только статистически. Поэтому данная задача относится к классу нелинейных задач дискретного стохастического программирования.

В случае так называемых высоконадежных систем, когда время практического использования системы мало по сравнению с временем ее жизни, последнее не является адекватным параметром оценки надежности. Тогда используют вероятность отказа системы на заданном интервале времени [4, 5], т.е. вероятность того, что случайное время жизни системы меньше, чем заданная граница. Получить аналитическое выражение для этой вероятности в виде функции от параметров системы, как правило, не удается, поэтому значительные усилия исследователей направлены на получение детерминированных и стохастических оценок вероятности отказа [4, 5]. Задача оптимизации высоконадежных систем также относится к классу задач стохастического программирования, но уже с вероятностными функциями цели или ограничений [4, 6].

Отметим, что существуют и другие вероятностные и невероятностные подходы к оптимизации надежности случайных сетей [7, 8].

В настоящей работе рассматривается задача оптимального резервирования ненадежных элементов в сложной системе с зависимыми отказами элементов в терминах времени жизни системы и подсистем. В качестве максимизируемой характеристики надежности используется математическое ожидание времени жизни системы, т.е. не рассматривается описанный выше случай высоконадежных систем. Для решения применяется стохастический метод ветвей и границ, учитывающий специфику задачи. А именно, для получения оценок ветвей используется прием перестановочной релаксации [9, 10] (перестановки операций максимизации и математического ожидания) и стохастические миноранты и мажоранты целевой функции [11]. Это позволяет свести получение оценок ветвей к многократному решению некоторых специальных детерминированных задач динамического программирования.

В то же время настоящая статья является иллюстрацией применения минорантно-мажорантного метода решения задач дискретной оптимизации. Для решения задач непрерывной глобальной оптимизации данный метод был обоснован в [12] и затем переоткрывался и использовался во многих работах. Несмотря на то что этот метод в основном использовался для решения непрерывных задач, очевидно, что, в принципе, он применим и для решения дискретных задач. Ключевым понятием минорантно-мажорантного метода оптимизации являются касательные миноранты (мажоранты) функции, которые служат источником глобальной информации об оптимизируемой функции. Поэтому в ряде работ развивалось исчисление касательных минорант сложных функций [11–15], в частности, в [11, 15] указан способ построения касательных минорант функций минимума, функций математического ожидания и вероятности. Это открывает возможность применения метода минорант для решения задач стохастической глобальной оптимизации [11] и, в частности, как показано в настоящей статье, задач оптимизации надежности.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ И МАКСИМИЗАЦИЯ НАДЕЖНОСТИ (СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ) СЕТИ

Рассмотрим надежность сети (системы) с точки зрения времени ее жизни. Сеть состоит из множества узлов, соединенных дугами. Сообщения входят в сеть в некоторых узлах входа и проходят по сети к некоторым узлам назначения. Дуги и узлы могут выходить из строя, в таком случае сообщение не может пройти через них. Сеть считается работоспособной, если существует путь от каждого узла входа к каждому узлу назначения. Очевидно, можно рассматривать только выходы из строя дуг. Действительно, выходы из строя узлов могут быть представлены как выходы из строя всех смежных с ними дуг. Считаем, что каждая дуга имеет случайное время жизни. Тогда надежность сети выражается через времена жизни дуг. Если имеется только один вход и один выход, то случайное время жизни равняется

$$f = \max_{i \in I} \min_{j \in i} f_{ij},$$

где максимум берется по путям $i \in I$, соединяющим вход и выход, а минимум — по временам жизни дуг j, входящих в путь i. Если есть несколько пар вход-выход, то для получения времени жизни всей системы нужно взять минимум по всем парам.

Может существовать несколько типов отказов дуг, например обрывы и короткие замыкания. Различаем также отказы в дугах и отказы, вызванные поломкой узлов. Отказы в разных дугах и разные отказы в одной дуге могут быть зависимыми.

Представляет интерес оптимизация надежности по параметрам $x = \{x_{ij}\}$, поэтому необходимо составить некоторую модель, определяющую зависимость между временем жизни и параметрами решения. Полагаем, что все времена жизни f_{ij} зависят от вектора x_{ij} и случайны, таким образом, они являются функциями от соответствующей абстрактной случайной переменной ω_{ij} или общей случайной переменной ω, определенных на индивидуальном или общем вероятностном пространстве, т.е. на $(\Omega_{ij}, \Sigma_{ij}, P_{ij})$ или (Ω, Σ, P).

Обычно введение резервных дуг ограничено наличными ресурсами, что выражается в виде неравенства $\sum_{(i,\, j) \in R} c_{ij}\, x_{ij} \le C$, где R обозначает множество дуг, которые потенциально можно зарезервировать. Обозначим $F(x)$ ожидаемое время жизни сети, например

$$F(x) = E\Big[f(x, \omega) = \max_{i \in I} \min_{j \in i} f_{ij}(x_{ij}, \omega)\Big].$$

Тогда типичная задача оптимизации резерва имеет вид

$$F(x) \to \max_{x \in \{0,1\}^n}$$

при ограничениях $\sum_{(i,\, j) \in R} c_{ij}\, x_{ij} \le C$.

Заметим, что здесь целевая функция — это функция математического ожидания с операциями max / min под знаком математического ожидания, а ограничения могут содержать несколько видов ресурсов.

1.1. Надежность зарезервированного элемента. Обозначим $t(\omega)$ случайное время жизни дуги (элемента). Если увеличивать надежность соответствующего соединения резервной (не работающей) дугой с временем жизни $\tau(\omega)$, то время жизни этого соединения становится равным $t(\omega) + \tau(\omega)$. Если использовать переменную $x \in \{0, 1\}$ для обозначения наличия $(x = 1)$ или отсутствия $(x = 0)$ резервной дуги, то время жизни будет равно $f(x, \omega) = t(\omega) + x\tau(\omega)$. Если использовать в холодном резерве несколько типов резервных элементов $k = 1, \ldots, n$ (резервные элементы включаются по мере выхода из строя основного прибора и ранее задействованных резервных элементов) с временами жизни $\tau_k(\omega)$ в количествах $x_k \in \{0, 1\}$, то соответствующее время жизни дуги определяется величиной

$$f(x, \omega) = t(\omega) + \sum_{k=1}^{n} x_k \tau_k(\omega),$$

где вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$ имеет 0-1 компоненты. В данной модели имеем линейную зависимость времени жизни дуги от параметров решения $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$. Задача оптимального резервирования с разнотипными независимыми резервными элементами рассматривалась в [16].

Модель зависимости времени жизни элемента от вложенных ресурсов может быть введена с другой точки зрения. Предположим, что время жизни $f(x)$ дуги имеет экспоненциальное распределение,

$$P\{f(x) \geq t\} = e^{-t/\lambda(x)},$$

где среднее время жизни $\lambda(x)$ дуги зависит от инвестиции некоторого ресурса в размере x в надежность дуги. Введем случайную переменную ω, равномерно распределенную на $[0, 1]$. Тогда случайное время жизни дуги может быть выражено в виде

$$f(x, \omega) = \lambda(x) \ln \frac{1}{1-\omega}.$$

1.2. Надежность восстанавливаемого элемента. Предположим, что основной ненадежный, но восстанавливаемый элемент дублируется вспомогательным, также ненадежным элементом. Если основной элемент находится в состоянии поломки, он временно заменяется вспомогательным. После восстановления основной элемент начинает работать, а резервный переходит в режим ожидания. Такие циклы регенерации повторяются до того момента, пока резервный элемент не выйдет из строя раньше, чем основной элемент восстановится. Составим модель времени жизни зарезервированного элемента. Пусть t^k и τ^k — случайное время работы и случайное время восстановления основного элемента на k-м цикле регенерации, T^k — случайное время безотказной работы резервного элемента на k-м цикле регенерации. Случайное время жизни восстанавливаемого зарезервированного элемента τ может быть легко промоделировано путем последовательной имитации случайных величин $\{t^k, \tau^k, T^k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ Введем бинарную переменную $x \in \{0, 1\}$ такую, что $x = 1$, если резервный элемент существует, и $x = 0$ — в противном случае. Тогда случайное время жизни восстанавливаемого элемента, как функция от x, задается выражением

$$f(x) = (1-x)t^1 + x\left(\sum_{k=1}^{k^*} (t^k + \tau^k) + T^{k^*+1} \right),$$

где $k^* = \sup\left\{ k : T^i > \tau^i \quad \forall i \in [1, \ldots, k] \right\}$ — число успешных циклов регенерации.

Таким образом, $f(x)$ является линейной функцией от бинарной переменной x со случайными коэффициентами. Формально обозначим эти показатели случайной переменной ω так, что время жизни резервного элемента равняется $f(x, \omega)$.

1.3. Надежность параллельной/последовательной схемы. Задано n устройств со случайными временами жизни $t_i(\omega)$, связанных параллельно и, таким образом, гарантирующих всей схеме время жизни $\max_{1 \leq i \leq n} t_i(\omega)$. Предположим, что каждое устройство в случае отказа может быть потенциально заменено резервным устройством со случайным временем жизни $\tau_i(\omega)$ и стоимостью c_i. Введем бинарную переменную x_i, обозначающую в случае $x_i = 1$, что соответствующее устройство имеет резерв, и $x_i = 0$ — в противном случае. Тогда время жизни $f(x, \omega)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, в параллельной схеме с резервами будет

$$f_{\text{par}}(x, \omega) = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i(\omega) + x_i \tau_i(\omega)).$$

Оптимальный план резервирования $x = (x_1, \ldots, x_n)$ при стоимостном ограничении является решением задачи

$$F_{\text{par}}(x) = Ef_{\text{par}}(x, \omega) = E \max_{1 \leq i \leq n} (t_i(\omega) + x_i \tau_i(\omega)) \to \max_{x \in \{0,1\}^n}$$

при ограничениях $cx = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \leq C$.

Аналогично оптимизируется ожидаемое время жизни последовательной схемы:

$$F_{\text{seq}}(x) = E\left[f_{\text{seq}}(x, \omega) := \min_{1 \le i \le n} (t_i(\omega) + x_i \tau_i(\omega))\right] \to \max_{x \in \{0,1\}^n : cx \le C}.$$

В случае дискретного распределения вероятности $\{p_\omega\}$ величины ω последняя задача решается сравнительно просто. А именно, вводим новые переменные z_ω, $\omega \in \Omega$, тогда эта задача эквивалентна задаче

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega z_\omega \to \max_{x, \{z_\omega\}}$$

при ограничениях

$$z_\omega \le t_i(\omega) + x_i \tau_i(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, n; \quad cx \le C; \quad x \in \{0,1\}^n.$$

В случае непрерывного распределения величины ω математическое ожидание может быть аппроксимировано дискретным эмпирическим средним, но соответствующая смешанная аппроксимация целочисленной задачи может быть чрезмерно громоздкой.

1.4. Надежность параллельно-последовательной схемы. Рассмотрим параллельно-последовательную схему, состоящую из m параллельно соединенных последовательных цепей (путей), i-я цепь содержит n_i элементов. Заметим, что всякая общая схема с одним узлом входа и одним узлом выхода может быть представлена как параллельно-последовательная схема (с зависимыми отказами). Обозначим $t_{ij}(\omega)$ время жизни j-го элемента в i-й цепи. Тогда время жизни всей системы равняется

$$f(\omega) = \max_{1 \le i \le m} \left\{\min_{1 \le j \le n_i} t_{ij}(\omega)\right\}.$$

Предположим, что для каждого (i, j)-го элемента схемы можем использовать резервный элемент с временем жизни $\tau_{ij}(\omega)$ и стоимостью c_{ij}. Введем бинарную переменную x_{ij}, при этом если $x_{ij} = 1$, то (i, j)-й элемент имеет резервный прибор, и $x_{ij} = 0$ — в противном случае. Резервная схема имеет время жизни

$$f(x, \omega) = \max_{1 \le i \le m} f_i(x_i, \omega),$$

$$f_i(x_i, \omega) = \min_{1 \le j \le n_i} f_{ij}(x_{ij}, \omega), \quad x_i = \{x_{ij}\}_{j=1}^{n_i},$$

$$f_{ij}(x_{ij}, \omega) = t_{ij}(\omega) + x_{ij} \tau_{ij}(\omega), \quad x = \{x_{ij}\}.$$

Задача оптимизации времени жизни имеет вид

$$F(x) = Ef(x, \omega) \to \max_{x \in X},$$

где

$$X = \left\{x_{ij} \in \{0,1\} : \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} x_{ij} \le C\right\}.$$

1.5. Надежность схемы с двумя видами отказов элементов. Допустим в предположениях п. 1.4, что каждый элемент может испытать два вида отказов: поломка и короткое замыкание. Допустим также, что время жизни (ij)-го элемента без поломки равно $f_{ij}^{\,b}(\omega)$, а время жизни без короткого замыкания — $f_{ij}^{s}(\omega)$. Схема жизнеспособна, если есть путь из рабочих элементов и нет пути, состоящего из закороченных элементов. Данная схема может быть смоделирована схемой с только одним видом отказа (поломкой). Эквивалентная схема состоит из $(m+1)$-й последовательно соединенной секции: сначала идет оригинальная схема только с ошибками-поломками, следующие m компонентов соответствуют параллельным путям оригинальной схемы, каждый состоит из параллельно соединенных соответствующих элементов, но только с короткими замыканиями. Время жизни такой схемы равняется

$$f = \min\Big\{\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n_i}\min(f_{ij}^b, f_{ij}^s);\ \max_{1\le j\le n_1} f_{1j}^s, \ldots, \max_{1\le j\le n_m} f_{mj}^s\Big\},$$

где $f_{ij}^b(x_{ij}, \omega) = t_{ij}^b(\omega) + x_{ij}\tau_{ij}^b(\omega)$, $f_{ij}^s(x_{ij}, \omega) = t_{ij}^s(\omega) + x_{ij}\tau_{ij}^s(\omega)$, $t_{ij}^b(\omega)$ и $t_{ij}^s(\omega)$ — времена жизни (ij)-го элемента, $\tau_{ij}^b(\omega)$ и $\tau_{ij}^s(\omega)$ — времена жизни (ij)-го резервного элемента, соответственно без поломки и без короткого замыкания.

1.6. Надежность параллельно-последовательной схемы, состоящей из *n* идентичных элементов (или как максимум из *n* идентичных элементов). Допустим, в параллельно-последовательной схеме $m = n$ и $n_i = n$. Для всех $i = 1, \ldots, n$ $x_{ij} = 1$, если j-й элемент присутствует в i-й цепи, и $x_{ij} = 0$ — в противном случае, $\sum_{i,\,j=1}^{n} x_{ij} = n(\le n)$. Время жизни данной схемы равняется

$$f(x, \omega) = \max_{1\le i\le n}\min_{1\le j\le n}(T(1 - x_{ij}) + t_{ij}(\omega_{ij})x_{ij}),$$

где T — очень большое число (плюс бесконечность), $t_{ij}(\omega_{ij})$ — время жизни (ij)-го элемента, зависящее от собственных случайных факторов ω_{ij}, $x = \{x_{ij}\}$, $\omega = \{\omega_{ij}\}$. В работах [1, 3, 17] изучалась подобная модель, но с двумя типами отказов и в терминах вероятностей отказов элементов и схемы в целом.

2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ МАКСИМИЗАЦИИ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ СЕТИ

В методе ветвей и границ исходная задача оптимизации разбивается на подзадачи путем последовательной фиксации некоторых компонент вектора x на их возможных значениях 0 или 1, остальные компоненты являются свободными (могут принимать оба значения — 0 или 1). С течением итераций каждая подзадача может разбиваться таким же образом на подзадачи меньшей размерности путем фиксации некоторых свободных переменных этой подзадачи на их возможных значениях 0 или 1. Порождаемые в этом процессе подзадачи называются также ветвями. Допустимое множество некоторой ветви может оказаться пустым, такая ветвь заведомо исключается из дальнейшего рассмотрения. Таким образом, на каждой итерации метода некоторые переменные $i \in \bar{I}_k$ имеют фиксированное значение $\bar{x}_i$, а оставшиеся $i \in I_k = \overline{I \setminus I_k}$ — свободные. Обозначим $x^k = \{x_i, i \in I_k\} \in \{0, 1\}^{n_k}$. Тогда при оптимизации надежности параллельной схемы методом ветвей и границ решаются подзадачи

$$F_k(x^k) = E\max\left\{\max_{i\in I_k}(t_i(\omega) + x_i\tau_i(\omega)),\ \max_{i\in \bar{I}_k}(t_i(\omega) + \bar{x}_i\tau_i(\omega))\right\} \to$$
$$\to \max_{x^k \in \{0,1\}^{n_k}} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I_k} c_i x_i \le C - \sum_{i\in \bar{I}_k} c_i \bar{x}_i. \tag{2}$$

Перепишем (1), (2) в виде

$$F(x^k) = E\Big[f_k(x^k, \omega) = \max_{i\in\{I_k, 0\}}\varphi_i(x_i, \omega)\Big] \to \max_{x^k\in\{0,1\}^{n_k}} \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in I_k} c_i x_i \le C_k, \tag{4}$$

где $\varphi_i(x_i, \omega) = t_i(\omega) + x_i\tau_i(\omega)$, $\varphi_0(x_0, \omega) = \max_{i\in\bar{I}_k}(t_i(\omega) + \bar{x}_i\tau_i(\omega))$, $C_k = C - \sum_{i\in\bar{I}_k} c_i\bar{x}_i$, x_0 — фиктивная переменная, введенная для удобства записи.

Аналогично, соответствующие подзадачи для последовательной схемы имеют вид
$$F(x^k) = E\left[f_k(x^k, \omega) = \min_{i \in \{I_k, 0\}} \varphi_i(x_i, \omega) \right] \to$$
$$\to \max_{x^k \in \{0,1\}^{n_k} : \sum_{i \in I_k} c_i x_i \le C_k} . \qquad (5)$$

В методе ветвей и границ для сокращения перебора (отсечения бесперспективных подзадач/ветвей) используются также оценки сверху и снизу оптимальных значений подзадач.

2.1. Оценка сверху для параллельной схемы. Обозначим F_k^* оптимальное значение в (3), (4), в силу перестановочной релаксации оно мажорируется величиной $Ef_k^*(\omega)$, где $f_k^*(\omega)$ — оптимальное значение в задаче
$$f_k(x^k, \omega) = \max_{i \in \{I_k, 0\}} \varphi_i(x_i, \omega) \to \max_{x^k = \{x_i : i \in I_k\}}$$
при ограничениях $\sum_{i \in I_k} c_i x_i \le C_k$.

Последняя задача может быть решена для небольших размерностей полным перебором, а для больших размерностей — методом динамического программирования.

Рассмотрим задачу
$$\varphi(y) = \max_{1 \le i \le m} \varphi_i(y_i) \to \max_y$$
при ограничениях $\sum_{i=1}^m c_i \; y_i \le C$, где $\varphi_i(y_i) = t_i + y_i \tau_i$. Обозначим
$$\Phi_i(z) = \max_{\{y_j : 1 \le j \le i\}} \left\{ \max_{1 \le j \le i} \varphi_j(y_j) \,|\, \sum_{j=1}^i c_j \; y_j \le z \right\},$$
$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \varphi_1(0), & z < c_1, \\ \varphi_1(1), & z \ge c_1, \end{cases} \qquad 0 \le z \le C.$$

Тогда для динамического программирования рекуррентное соотношение имеет вид
$$\Phi_i(z) = \max_{\{y_j : 1 \le j \le i\}} \left\{ \max_{1 \le j \le i} \varphi_j(y_j) \,|\, \sum_{j=1}^i c_j \; y_j \le z \right\} =$$
$$= \max\left\{ \max_{\{y_j : 1 \le j \le i-1\}} \left\{ \max\left\{ \varphi_i(0), \max_{1 \le j \le i-1} \varphi_j(y_j) \right\} \,|\, \sum_{j=1}^{i-1} c_j \; y_j \le z \right\}, \right.$$
$$\left. \max_{\{y_j : 1 \le j \le i-1\}} \left\{ \max\left\{ \varphi_i(1), \max_{1 \le j \le i-1} \varphi_j(y_j) \right\} \,|\, \sum_{j=1}^{i-1} c_j \; y_j \le z - c_i \right\} \right\} =$$
$$= \begin{cases} \max\{\varphi_i(0),\ \varphi_i(1), \Phi_{i-1}(z),\ \Phi_{i-1}(z - c_i)\}, & z - c_i \ge 0, \\ \max\{\varphi_i(0),\ \Phi_{i-1}(z)\}, & z - c_i < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi_i(0) \le \varphi_i(1)$ и $\Phi_{i-1}(z)$ монотонно возрастает по z, последняя формула принимает вид
$$\Phi_i(z) = \begin{cases} \max\{\varphi_i(1),\ \Phi_{i-1}(z)\}, & c_i \le z \le C, \\ \max\{\varphi_i(0),\ \Phi_{i-1}(z)\}, & 0 \le z < c_i. \end{cases}$$

Пронаблюдав значения $\{t_i, \tau_i, i = 1, \ldots, m\}$, находим, таким образом, значения $\{\varphi_i(0) = t_i, \varphi_i(1) = t_i + \tau_i,\ i = 1, \ldots, m\}$. Полученное рекуррентное соотношение позволяет экономно и быстро найти значения $\Phi_i(z)$, $0 \le z \le C$, подправляя значения $\Phi_{i-1}(z)$ на части области определения $z \in [0, C]$, и в конце концов найти оптимальное значение рассматриваемой задачи $\Phi_m(C)$.

2.2. Оценка сверху для последовательной схемы. Рассмотрим задачу

$$\varphi(y) = \min_{1 \le i \le m} \varphi_i(y_i) \to \max_y$$

при ограничениях $\sum_{i=1}^m c_i\ y_i \le C$, где $\varphi_i(y_i) = t_i + y_i \tau_i$.

Во-первых, данная задача сводится к задаче смешанного целочисленного программирования

$$z \to \max_{y,\, z \ge 0}$$

при ограничениях

$$z \le t_i(\omega) + y_i \tau_i(\omega), \quad i = 1, \ldots, m; \ \sum_{i=1}^m c_i y_i \le C; \ y \in \{0, 1\}^m,$$

и, таким образом, может быть решена любым подходящим методом целочисленной оптимизации.

Во-вторых, исходная задача может быть решена также методом динамического программирования. В случае последовательной схемы соответствующее рекуррентное соотношение имеет аналогичную форму:

$$\Phi_i(z) = \max_{y_j : 1 \le j \le i} \left\{ \min_{1 \le j \le i} \varphi_j(y_j) \,|\, \sum_{j=1}^i c_j y_j \le z \right\} =$$

$$= \max \left\{ \max_{\{y_j : 1 \le j \le i-1\}} \left\{ \min \left\{ \varphi_i(0), \min_{1 \le j \le i-1} \varphi_j(y_j) \right\} \,|\, \sum_{j=1}^{i-1} c_j y_j \le z \right\}, \right.$$

$$\left. \max_{\{y_j : 1 \le j \le i-1\}} \left\{ \min \left\{ \varphi_i(1), \min_{1 \le j \le i-1} \varphi_j(y_j) \right\} \,|\, \sum_{j=1}^{i-1} c_j y_j \le z - c_i,\, z \ge c_i \right\} \right\} =$$

$$= \begin{cases} \min\{\varphi_i(0), \Phi_{i-1}(z)\}, 0 \le z < c_i, \\ \max\left\{ \min\{\varphi_i(0), \Phi_{i-1}(z)\}, \min\{\varphi_i(1), \Phi_{i-1}(z - c_i)\} \right\}, \ c_i \le z \le C, \end{cases}$$

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} \varphi_1(0), \ z < c_1, \\ \varphi_1(1), \ z \ge c_1. \end{cases}$$

Еще одна оценка сверху для последовательной схемы следует из неравенства Иенсена

$$\max_{x^k : \sum_{i \in I_k} c_i x_i \le C_k,\ x_i \in \{0,1\}} \left\{ \min_{i \in I_k} (Et_i(\omega) + x_i E\tau_i(\omega)) \right\} \ge$$

$$\ge \max_{x^k : \sum_{i \in I_k} c_i x_i \le C_k, x_i \in \{0,1\}} E \min_{i \in I_k} (t_i(\omega) + x_i \tau_i(\omega)).$$

2.3. Оценки снизу для оптимальных значений подзадач. Отметим, что оптимальное значение задачи максимизации всегда минорируется значением целевой функции в любой допустимой точке. Эту точку нужно эвристически выбрать так, чтобы значение целевой функции в ней было, по возможности, максимальным.

Для оценки оптимальных значений подзадач в методе ветвей и границ можно использовать стохастические касательные миноранты (и мажоранты) целевой функции.

Определение 1 [13]. Пусть X — топологическое пространство, функции $F(x)$, $x \in X$, и $\varphi(x, y)$, $x \in X$, $y \in X$, связаны следующими условиями:

а) $F(x) \geq \varphi(x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in X$;

б) $F(y) = \varphi(y, y)$ для всех $y \in X$;

в) функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по x равностепенно по y.

Тогда функции $\{\varphi(\cdot, y), \ y \in X\}$ называются касательными (в точках y) минорантами для $F(x)$.

Аналогично определяются касательные мажоранты. Отметим, что пространство X в определении 1 может быть и дискретным.

Например, пусть $f(x) = \inf_{z \in Z} \psi(x, z)$ и функции $\psi(\cdot, z)$ для всех $z \in Z$ допускают (вогнутые) касательные в точках y миноранты $\phi(x, y, z)$. Тогда функция $\varphi(x, y) = \inf_{z \in Z} \phi(x, y, z)$ является (вогнутой) касательной в y минорантой для $f(x)$ [15].

Определение 2[11]. Функции $\{\phi(\cdot, y, \theta)\}, \ y \in X, \ \theta \in \Theta\}$, где Θ — носитель некоторого вероятностного пространства (Θ, Σ, P), называются стохастическими касательными минорантами для $F(x)$, если функции $\phi(x, y, \theta)$ измеримы по θ, а математические ожидания $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ конечны и для каждого $y \in X$ являются касательными в точке y минорантами для $F(x)$ (в смысле определения 1).

Следующая лемма показывает, что в качестве стохастических касательных минорант функции математического ожидания $F(x) = Ef(x, \theta)$ можно брать касательные миноранты подынтегральной функции $f(x, \theta)$. Здесь ситуация аналогична вычислению стохастических градиентов функции математического ожидания [7]. Нахождение детерминированных градиентов, как и детерминированных минорант функций математического ожидания, может быть проблематично, однако вычисление и использование стохастических квазиградиентов и стохастических минорант вполне возможно.

Лемма 1[11]. Предположим, что функция $f(\cdot, \theta)$ допускает касательные миноранты $\phi(x, y, \theta)$ в точках $y \in X$, т.е. почти для всех θ выполнены следующие условия:

1) $f(x, \theta) \geq \phi(x, y, \theta)$ для всех $x \in X$, $y \in X$;

2) $f(y, \theta) = \phi(y, y, \theta)$ для всех $y \in X$;

3) функция $\phi(x, y, \theta)$ непрерывна по (x, y) почти для всех θ;

4) $\phi(x, y, \theta)$ измерима по θ для любых $x, y \in X$;

5) $|\phi(x, y, \theta)| \leq M(\theta)$ для всех $x, y \in X$ с некоторой интегрируемой функцией $M(\theta)$.

Тогда функции $\varphi(x, y) = E\phi(x, y, \theta)$ непрерывны и являются касательными минорантами для функции математического ожидания $F(x) = Ef(x, \theta)$.

Построим минорантную оценку снизу для оптимального значения в задаче (1), (2) или (3), (4) для параллельной схемы. Зададим $y^k = \{y_i, \ i \in I_k \cup 0\}$ — фиксированную точку, удовлетворяющую ограничениям (2). Обозначим

$$i_k(y^k, \omega) = \arg\max_{i \in \{I_k \cup 0\}} \varphi_i(y_i, \omega),$$

$$\mathbf{1}(i = i_k(y^k, \omega)) = \begin{cases} 1, & i = i_k(y^k, \omega), \\ 0, & i \neq i_k(y^k, \omega). \end{cases}$$

Функция

$$\Psi(x^k, y^k) = E\varphi_{i_k(y^k, \omega)}(x^k, \omega) = \sum_{i \in I_k} E\,\mathbf{1}(i = i_k(y^k, \omega))\varphi_{i_k(y^k, \omega)}(x^k, \omega)$$

является касательной (в точке y^k) минорантой для целевой функции $F_k(x^k)$ задачи (1), (2).

В случае линейных составляющих $\varphi_i(y_i, \omega)$ функция $\Psi(x^k, y^k)$ также линейна. Тогда величина

$$\underline{F}_k^* = \max_{x^k} \left\{ \Psi(x^k, y^k) \mid \sum_{i \in I_k} c_i x_i \le C_k \right\}$$

является оценкой снизу для оптимального значения F_k^* и может быть найдена элементарно. Эта нижняя оценка может быть улучшена повторением указанных выше шагов построения новых касательных минорант и максимизации минорантных функций.

2.4. Границы оптимальных значений для параллельно-последовательной схемы. Зафиксируем некоторые допустимые планы, $\bar{x} = \{\bar{x}_{ij}\}$, $\underline{x} = \{\underline{x}_{ij}\}$ и найдем критический путь $i^*(\underline{x}) = \arg\max_{1 \le i \le m} f_i(\underline{x}_i, \omega)$ и касательную миноранту

$$\underline{f}(x, \omega) = f_{i^*(\underline{x})}(x_{i^*(\underline{x})}, \omega) = \min_{1 \le j \le n_{i^*(\underline{x})}} f_{i^*(\underline{x})j}(x_{i^*(\underline{x})j}, \omega)$$

для времени жизни всей схемы. Очевидно, $f(\underline{x}, \omega) = \underline{f}(\underline{x}, \omega)$ и $\underline{f}(x, \omega) \le f(x, \omega)$ для всех x.

Аналогично, для $\bar{x}$ найдем критический элемент в i-м пути $j^*(i, \bar{x}) = \arg\min_{1 \le j \le n_i} f_{ij}(\bar{x}_{ij}, \omega)$ и касательную мажоранту $\bar{f}_i(x_i, \omega) = f_{ij^*(i,\bar{x})}(x_{ij^*(i,\bar{x})}, \omega)$ для времени жизни i-го пути. Очевидно, $f_i(x_i, \omega) \le \bar{f}_i(x_i, \omega)$ для всех x и $f_i(\bar{x}_i, \omega) = \bar{f}_i(\bar{x}_i, \omega)$. Функция $\bar{f}(x, \omega) = \max_{1 \le i \le m} \bar{f}_i(x, \omega)$ является касательной мажорантой для $f(x, \omega)$.

Тогда для каждого допустимого x

$$\min_{1 \le j \le n_{i^*(\underline{x})}} f_{i^*(\underline{x})j}(x_{i^*(\underline{x})j}, \omega) =$$

$$= \underline{f}(x, \omega) \le f(x, \omega) \le \bar{f}(x, \omega) = \max_{1 \le i \le m} f_{ij^*(i,\bar{x})}(x_{ij^*(i,\bar{x})}, \omega)$$

и, следовательно, $E\underline{f}(x, \omega) \le F(x) \le E\bar{f}(x, \omega)$.

Таким образом, время жизни параллельно-последовательной схемы минорируется временем жизни некоторой последовательной схемы и мажорируется временем жизни некоторой параллельной схемы.

Обозначим

$$\underline{X} = \left\{ x_j = x_{i^*(\underline{x})j} \in \{0, 1\} : \sum_{j=1}^{n_{i^*(\underline{x})}} c_{i^*(\underline{x})j} x_{i^*(\underline{x})j} \le C \right\},$$

$$\bar{X} = \left\{ x_i = x_{ij^*(i,\bar{x})} \in \{0, 1\} : \sum_{i=1}^{m} c_{ij^*(i,\bar{x})} x_{ij^*(i,\bar{x})} \le C \right\}.$$

Получим

$$\max_{x \in \underline{X}} E\min_{1 \le j \le n_{i^*(\underline{x})}} \left(t_{i^*(\underline{x})}(\omega) + x_{i^*(\underline{x})j} \tau_{i^*(\underline{x})}(\omega) \right) \le F^* \le$$

$$\le E\max_{x \in \bar{X}} \max_{1 \le i \le m} f_{ij^*(i,\bar{x})}(x_{ij^*(i,\bar{x})}, \omega).$$

Таким образом, для получения оценок снизу заменяем оригинальную схему некоторой последовательной, состоящей из исходных элементов $\{i \equiv i^*(\underline{x}),\ j \in [1, n_{i^*(\underline{x})}]\}$, а для вычисления оценок сверху заменим оригинальную схему некоторой параллельной, состоящей из компонентов $\{(i \in [1, m],\ j^*(i, \bar{x})\}$ исходной параллельно-последовательной схемы.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Работа метода ветвей иллюстрируется на задачах оптимизации надежности (среднего времени жизни) трех видов сетей:

1) сеть параллельно соединенных элементов;

2) сеть последовательно соединенных элементов;

3) параллельно-последовательная сеть.

Результаты и время работы метода ветвей и границ сравниваются с методом полного перебора.

Параллельная и последовательная сети состоят из 20 узлов, каждый из которых характеризуется:

— параметром, обусловливающим случайное время жизни основного элемента (λ_t);

— параметром, обусловливающим случайное время жизни резервного элемента (λ_τ);

— стоимостью (c) введения резервного элемента.

Характеристики сетей приведены в табл. 1.

Параллельно-последовательная сеть имеет топологию, показанную на рис. 1, и суммарно состоит из 22 узлов с характеристиками, представленными в табл. 2.

Численные эксперименты проводились на ПК Celeron 1,1 ГГц, 256 Мб ОЗУ. Алгоритмы для численных экспериментов реализованы в среде программирования Borland Delphi 6. В частности, реализован вариант метода ветвей и границ с оценками сверху, описанными в пп. 2.1 (параллельная схема), 2.2 (последовательная схема), 2.4 (параллельно-последовательная сеть), и способом выбора для ветвления очередной свободной компоненты вектора решений с минимальной ценой резервирования соответствующего элемента. Для оценки математических ожиданий времени жизни, его нижних и верхних границ использовалось 100 независимых реализаций векторного случайного параметра с независимыми реализациями компонент. Результаты работы алгоритмов приведены в табл. 3.

Из результатов эксперимента видно, что предложенный алгоритм оптимизации среднего времени жизни существенно сокращает перебор вариантов.

Таблица 1. Характеристики узлов параллельной и последовательной сетей

Номер узла	λ_t	λ_τ	c	Номер узла	λ_t	λ_τ	c
1	20	40	30	11	20	40	30
2	10	10	20	12	10	10	20
3	20	10	10	13	20	10	10
4	20	10	40	14	20	10	40
5	30	20	30	15	30	20	30
6	20	10	20	16	20	10	20
7	40	20	50	17	40	20	50
8	20	20	20	18	20	20	20
9	10	30	30	19	10	30	30
10	10	30	10	20	10	30	10

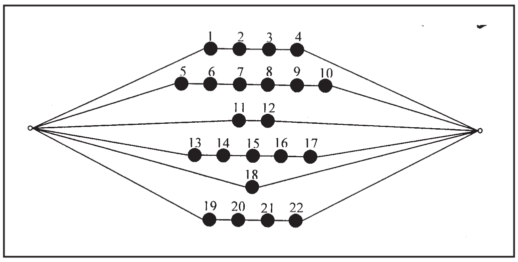

Рис. 1. Параллельно-последовательная сеть

Таблица 2. Характеристики узлов параллельно-последовательная сеть

Номер узла	λ_t	λ_τ	c	Номер узла	λ_t	λ_τ	c
1	20	40	30	12	10	20	30
2	10	10	20	13	10	10	20
3	20	10	10	14	10	10	10
4	20	10	40	15	20	30	30
5	30	20	30	16	10	30	20
6	20	10	20	17	30	30	10
7	40	20	50	18	40	30	20
8	20	20	20	19	20	30	30
9	10	30	30	20	40	20	50
10	10	30	10	21	20	20	20
11	20	10	20	22	10	30	30

Таблица 3. Результаты работы методов ветвей и границ и методов полного перебора

Network type	Алгоритм		Метод полного перебора	
	Число итераций	Время работы	Число итераций	Время работы
Параллельная	4146	13 с	1048576	2 мин 9 с
Последовательная	508	1 мин 6 с	1048576	2 мин 9 с
Параллельно-последовательная	7072	1 мин 50 с	4194304	8 мин 29 с

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе задача оптимизации надежности сложной системы понимается как задача оптимизации среднего времени жизни (работоспособности) соответствующей сети ненадежных и, возможно, зависимых элементов. Время жизни элемента представляется в виде функции вложенных в него ресурсов, в частности, числа дублирующих элементов. Случайное время жизни всей сети представляется как максиминная функция времен жизни элементов. Для оптимизации надежности максимизируется математическое ожидание времени жизни сети при ограничениях на затраты ресурсов. Это задача (дискретного) стохастического программирования, целевой функционал которой не вычисляется в явном виде. Задача решается специализированным стохастическим методом ветвей и границ, поскольку оценки ветвей, вообще говоря, являются случайными величинами. Для получения оценок ветвей используются стохастические миноранты и мажоранты целевого функционала как источники глобальной информации о целевой функции. Работоспособность алгоритма проиллюстрирована на задачах оптимизации параллельно-последовательных сетей с 22 зарезервированными элементами.

Отметим, что изложенный подход применим также для оптимизации надежности систем, отказы которых моделируются с помощью деревьев отказов [19]. В этом случае время жизни системы с помощью дерева отказов можно представить как максиминную функцию от времен жизни элементов (листьев дерева). Для подобных функций в [11] разработана методика построения стохастических касательных минорант и мажорант, а в настоящей статье на этой основе разработана методика получения оценок надежности для различных типов сетей.

Задача оптимизации высоконадежных систем отличается от рассмотренной постановки тем, что в ней оптимизируется вероятность отказа системы до определенного момента времени, значительно меньшего, чем среднее время жизни системы. Оценка вероятности как функции оптимизируемых параметров представляет большую проблему, точечным оценкам и оценкам чувствительности вероятности посвящены работы [4, 5]. Однако концептуально это также задача (дискретного или непрерывного) стохастического программирования со специфическим целевым функционалом — вероятностью. В принципе, оптимизировать такую вероятность можно методами дискретной стохастической оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. — М.: Сов. радио, 1969. — 488 с.
2. Ушаков И.А. Задачи оптимального резервирования // Оптимальное резервирование и управление запасами. — М.: Знание, 1979. — С. 3–69.

3. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / В.Л. Волкович, А.Ф. Волошин, В.А. Заславский, И.А. Ушаков — Киев: Наук. думка, 1993. — 312 с.
4. Коваленко И.Н., Наконечный А.Н. Приближенный расчет и оптимизация надежности. — Киев: Наук. думка, 1989. — 184 с.
5. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.
6. Наконечный А.Н. Синтез оптимальной системы при ограничении на надежность // Кибернетика и системный анализ. — 1993. — № 5. — С. 181–183.
7. Ермольев Ю.М. Задачи и методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976. — 240 с.
8. Шарифов Ф.А. Задача синтеза надежных сетей // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — № 4. — С. 145–156.
9. Norkin V., Pflug G.Ch., Ruszczynski A. A branch and bound method for stochastic global optimization // Math. Progr. — 1998. — **83**. — P. 425–450.
10. Norkin V., Ermoliev Yu.M., Ruszczcynski A. On optimal allocation of indivisibles under uncertainty // Oper. Res. — 1998. — **46**, N 3. — P. 381–395.
11. Норкин В.И., Онищенко Б.О. Минорантные методы стохастической глобальной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 2. — С. 56–70.
12. Пиявский С.А. Один алгоритм отыскания абсолютного минимума функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1972. — **12**, № 4. — С. 888–896.
13. Норкин В.И. О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации // Там же. — 1992. — **32**, № 7. — С. 992–1007.
14. Khamisov O. On optimization properties of functions with a concave minorant // J. Global Optimiz. — 1999. — **14**, N 1. — P. 79–101.
15. Норкин В.И., Онищенко Б.О. О глобальной минимизации функций минимума методом минорант // Теорія оптимальних рішень. — КиВв: Ін-т кібернетики АН УкраВни, 2004. — Вип. 3. — С. 56–63.
16. Волкович В.Л., Заславский В.А. Алгоритм решения задачи оптимизации надежности сложной системы с использованием в подсистемах разнотипных резервных элементов // Кибернетика и системный анализ. — 1986. — № 5. — С. 54–62.
17. Кирилюк В.С. О максимально надежной структуре параллельно-последовательных схем с двумя видами отказов // Там же. — 1995. — № 1. — С. 34–46.
18. Норкин В.И. Глобальная стохастическая оптимизация: метод ветвей и вероятностных границ // Методы управления и принятия решений в условиях риска и неопределенности. — Киев: Ин-т кибернетики АН Украины, 1993. — С. 3–12.
19. Кузнецов Н.Ю., Михалевич К.В. Анализ надежности систем, описываемых деревьями отказа с эффективностями // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — № 5. — С. 142–152.

Поступила 07.02.2007