УДК 519.2

С.Р. КОСТАДИНОВА

СПЛАЙН-ФУНКЦИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СИСТЕМ

Ключевые слова: *сплайн, экспоненциальный сплайн, многомерный сплайн, плотность вероятностей случайного вектора.*

Теория многомерных сплайнов берет свое начало с 1976 г., когда Карл де Бор [5] дал свое определение B-сплайнов многих переменных, а Мичели и Дамен [4] опубликовали впоследствии первые работы в этом направлении. В настоящее время эта теория находится в процессе интенсивного развития и многие вопросы ожидают своего решения.

В данной статье рассмотрена идея развития и приложения многомерных экспоненциальных сплайнов с целью аппроксимации. Дана явная формула многомерного B-сплайна, изложены исследования автора в области линейных преобразований независимых экспоненциально распределенных случайных величин и дается формула для их плотностей с помощью многомерных экспоненциальных сплайнов. Полученные результаты могут быть использованы для исследования и прогнозирования систем разного характера — как технических, так и социальных.

Пусть $t^0, t^1, \ldots, t^r$ представляет $r+1$ точку в k-мерном евклидовом пространстве R_k с координатами соответственно $t^i = (t_1^i, t_2^i, \ldots, t_k^i)'$, $i = 0, \ldots, r$. Допустим, что $r > k$ и $t^0, t^1, \ldots, t^r$ — точки «общего положения». Это означает, что для каждого $j = 1, \ldots, k$ и различных $0 \le i_1, \ldots, i_{j+1} \le r$ детерминанты отличны от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1^{i_1} & \ldots & t_j^{i_1} \\ 1 & t_1^{i_2} & \ldots & t_j^{i_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_1^{i_{j+1}} & \ldots & t_j^{i_{j+1}} \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{1}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$\eta = \xi_1 t^1 + \ldots + \xi_r t^r , \tag{2}$$

где ξ_i, $i = 1, \ldots, r$, — ряд независимых и одинаково экспоненциально распределенных случайных величин с плотностями вероятностей $f_{\xi_i}(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

Основная задача — дать представление плотности вероятностей случайного вектора η как многомерной разделенной разности определенных функций.

Напомним определение α — разделенной разности ($\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$) достаточно гладкой функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ k переменных [1]. Величина

$$[t^0, \ldots, t^r]^\alpha f := \frac{r!}{\alpha!} \int\limits_{[t^0, \ldots, t^r]} D^\alpha f$$

называется α-разделенной разностью функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ в точках $t^0, \ldots, t^r \in R_k$, где

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_k! ,$$

$$D^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{\alpha_k} f ,$$

$[t^0, \ldots, t^r]$ — выпуклая оболочка точек $t^0, \ldots, t^r$. Кроме того, предполагаем, что выполнено равенство $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = r - k + 1$.

Приведем явную формулу многомерного B-сплайна.

Теорема 1. Многомерный B-сплайн $M(x \mid x^0, \ldots, x^r)$ является α-разделенной разностью ($\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$) по аргументу $\vec{\lambda}$ функции $\alpha_1 (\lambda_1 - x_1)_+^{\alpha_1 - 1} \ldots \alpha_k (\lambda_k - x_k)_+^{\alpha_k - 1}$, т.е.

$$M(x \mid x^0, \ldots, x^r) = [x^0, \ldots, x^r]^{\vec{\alpha}} (\alpha_1 (\lambda_1 - x_1)_+^{\alpha_1 - 1} \ldots \alpha_k (\lambda_k - x_k)_+^{\alpha_k - 1})$$

или

$$M(x \mid x^0, \ldots, x^r) = [x^0, \ldots x^r]^{\vec{\alpha}} \frac{\vec{\alpha}!}{(\vec{\alpha} - \vec{1})!} (\vec{\lambda} - \vec{x})_+^{\vec{\alpha} - \vec{1}},$$

где вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = r - k + 1$.

Явная формула многомерного B-сплайна, когда узлы расположены в «общем положении», выведена Али и Медом [3] в терминах плотностей вероятностей линейных комбинаций спейсингов равномерного распределения.

Рассмотренные примеры с использованием явной формулы многомерного B-сплайна из теоремы 1 дают одинаковые результаты с теми, которые вычислены с использованием формулы Али и Меда.

Приведем теорему о линейных преобразованиях экспоненциально распределенных случайных величин и многомерных экспоненциальных сплайнов. Доказательство теоремы дано в [2].

Теорема 2. Пусть нулевой вектор $t^0 \equiv (0, 0, \ldots, 0) \in R_k$ и векторы $t^1, \ldots, t^r$ находятся в общем положении. Пусть также $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — фиксированный вектор с целочисленными положительными координатами, удовлетворяющими условию $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = r - k + 1$. Тогда случайный вектор

$$\eta = \xi_1 t^1 + \ldots + \xi_r t^r$$

имеет плотность вероятностей $f_\eta(x)$, $x \in R_k$, $x = (x_1, \ldots, x_k)'$, относительно k-мерной лебеговой меры μ_k. Ее можно представить в виде α-разделенной разности в точках $t^0, t^1 \ldots, t^r$ функции

$$f(z_1, \ldots, z_k) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\theta^{k-1}}{r!} e^{-\theta} \prod_{i=1}^{k} \alpha_i (z_i \theta - x_i)_+^{\alpha_i - 1} d\theta,$$

где $(y)_+ = y$, если $y > 0$, и $(y)_+ = 0$ в остальных случаях.

Пример. Найти плотность вероятностей случайного вектора $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + 1{,}5\xi_2 + 0{,}5\xi_3, \\ \quad \eta_2 = \xi_2 + \xi_3, \end{cases} \tag{3}$$

где ξ_i, $i = 1, 2, 3$, — независимые одинаково экспоненциально распределенные случайные величины.

Представим вектор $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ в виде

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xi_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xi_1 + \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_2 + \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \xi_3,$$

где $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ — независимые экспоненциально распределенные случайные величины.

Используя обозначения из теоремы 2, получаем

$$t^0 \equiv 0^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t^2 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix},\ t^3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1, 2 даны геометрические интерпретации примера, где $l_1\colon y_2 = 2y_1$,

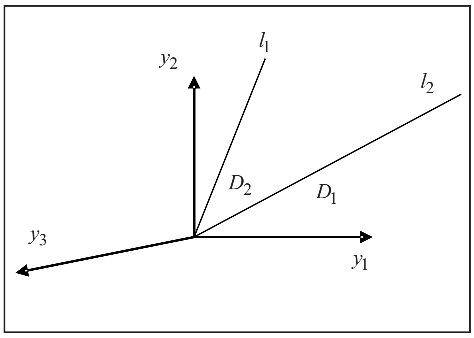

Рис. 1

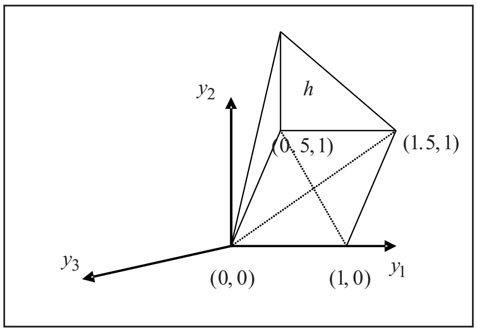

Рис. 2

$l_2\colon y_2 = \dfrac{1}{1{,}5} y_1$, D_1 и D_2 даны ниже.

Вначале найдем плотность вероятностей вектора $(\eta_1\ \eta_2)'$ классическими методами, добавляя новую подходящую координату $\eta_3 \equiv \xi_3$ и получая плотность вероятностей вектора $(\eta_1\ \eta_2)'$ на основании плотности вероятностей вектора $(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)'$.

Вводя случайные величины

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + 1{,}5\xi_2 + 0{,}5\xi_3, \\ \eta_2 = \xi_2 + \xi_3, \\ \eta_3 = \xi_3, \end{cases}$$

получаем представление

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3, \\ y_2 = x_2 - x_3, \\ y_3 = x_3, \end{cases} \tag{4}$$

где совместная плотность вероятностей $f_{\eta_1\eta_2\eta_3}$ случайных величин (y_1, y_2, y_3) η_1, η_2, η_3 имеет вид

$$f_{\eta_1\eta_2\eta_3}(y_1, y_2, y_3) = f_{\xi_1\xi_2\xi_3}(x_1(y_1, y_2, y_3), x_2(y_1, y_2, y_3), x_3(y_1, y_2, y_3))|J|,$$

J — якобиан, определяемый ниже.

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и одинаково экспоненциально распределены. Следовательно, их совместная плотность вероятностей равна

$$f_{\eta_1\eta_{21}\eta_3}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} e^{-(x_1+x_2+x_3)}, & \text{если } x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

якобиан J — детерминант матрицы

$$
\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{pmatrix},
$$

а система

$$
\begin{cases} x_1(y_1, y_2, y_3) = y_1 - 1{,}5\, y_2 + y_3, \\ x_2(y_1, y_2, y_3) = y_2 - y_3, \\ x_3(y_1, y_2, y_3) = y_3 \end{cases}
$$

представляет обратное преобразование для (4):

$$
\begin{cases} x_3 = y_3, \\ x_2 = y_2 - y_3, \\ x_1 = y_1 - 1{,}5\, y_2 + y_3. \end{cases}
$$

Плотность вероятностей вектора $(\eta_1\, \eta_2\, \eta_3)'$ имеет вид

$$
f_{\eta_1\eta_2\eta_3}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} e^{-(y_1 - 0{,}5 y_2 + y_3)}, & \text{если } (y_1, y_2, y_3) \in D, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}
$$

где $D = \{(y_1, y_2, y_3):\ y_3 \ge 0,\ y_2 - y_3 \ge 0,\ y_1 - 1{,}5\, y_2 + y_3 \ge 0\}$.

После интегрирования $f_{\eta_1\eta_2\eta_3}$ случайных величин (y_1, y_2, y_3) по переменной y_3 получаем

$$
f_{\eta_1\eta_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_1}(e^{0{,}5 y_2} - e^{-0{,}5 y_2}) & \text{для } (y_1, y_2) \in D_1, \\ e^{-y_2} - e^{-y_1 - 0{,}5 y_2} & \text{для } (y_1, y_2) \in D_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}
$$

где $D_1 = \{(y_1, y_2)\colon 1{,}5\, y_2 - y_1 < 0,\ y_2 \ge 0\}$, $D_2 = \{(y_1, y_2)\colon 1{,}5\, y_2 - y_1 \ge 0,\ 0{,}5\, y_2 - y_1 \le 0\}$.

Далее будем использовать формулу для $f(z_1, \ldots, z_k)$ из теоремы 2, где

$$
r = 3,\ k = 2,\ \alpha_1 = 1,
$$

$$
t^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t^2 = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix},\ t^3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Очевидно, что имеет место равенство

$$
\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = r - k + 1.
$$

Для функции $f(z_1, \ldots, z_k)$ получаем

$$
f(z_1, z_2) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta}{3!} e^{-\theta} (z_1\theta - x_1)_+^0 (z_2\theta - x_2)_+^0 \, d\theta.
$$

Обозначим I_k^r множество всех сочетаний из $r+1$ элемента $\{0, 1, 2, \ldots, r\}$ по k. Для каждой комбинации из k индексов $i = (i_0, \ldots, i_{k-1}) \in I_k^r$ представляем $f\{t^i\}$ следующим образом:

$$
f\{t^i\} := \frac{1}{\mu_{k-1}[t^{i_0}, \ldots, t^{i_{k-1}}]} \int_{[t^{i_0}, \ldots, t^{i_{k-1}}]} f \, d\mu_{k-1},
$$

где μ_{k-1} — лебегова мера в пространстве размерности $(k-1)$, $[t^{i_0}, \ldots, t^{i_{k-1}}]$ — выпуклая оболочка точек $t^{i_0}, \ldots, t^{i_{k-1}}$. Последнее равенство выполняется, когда $\mu_{k-1}([x^{i_0}, \ldots, x^{i_{k-1}}]^{i_{k-1}}) \ne 0$.

в остальных случаях.

Если точки $t^0, t^1, \ldots, t^r \in R_k$ находятся в общем положении, а $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ — мультииндекс, удовлетворяющий условию $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = r - k + 1$, то α-разделенная разность функции f имеет вид [1]

$$[t^0, \ldots, t^r]^\alpha f = \sum_{i \in I_k^r} c_i^\alpha f(t^i),$$

где

$$c_i^\alpha = (-1)^{r-k+1} \frac{r!}{\alpha!(k-1)!} \frac{\prod_{l=1}^{k} [d(t^i, e_l, 0)]^{\alpha_l}}{\prod_{\substack{0 \le l \le r \\ i \ne i_0, \ldots, i_{k-1}}} d(t^i, t^l, 1)},$$

$$e_l = (\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 1}_{l}, \ldots, 0), \; l = 1, \ldots, k;$$

$$d(t^i, y, \gamma) = \begin{vmatrix} y_1 & t_1^{i_0} & \ldots & t_1^{i_{k-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_k & t_k^{i_0} & \ldots & t_k^{i_{k-1}} \\ \gamma & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

В силу вышеизложенного после ряда вычислений можно получить плотность вероятностей

$$f_{\eta_1, \eta_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_1}(e^{0,5y_2} - e^{-0,5y_2}) & \text{для } (y_1, y_2) \in D_1, \\ e^{-y_2} - e^{-y_1 - 0,5y_2} & \text{для } (y_1, y_2) \in D_2, \\ 0 & \end{cases}$$

Сделаем некоторые комментарии к теореме 2. Докажем, что плотность вероятностей $f_\eta(x)$, $x \in R_k$, есть многомерный экспоненциальный сплайн, умноженный на константу. Формула для функции плотности вероятностей линейных преобразований независимых экспоненциальных случайных величин получена в теореме 3, доказательство ее дано в [6].

В дальнейшем будем предполагать, что $t^0 = 0^* \equiv (0, \ldots, 0) \in R_k$. Дадим еще одно представление η:

$$\eta = \xi_0 t^0 + \xi_1 t^1 + \ldots + \xi_r t^r.$$

Если обозначить

$$d(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, x, \gamma) := \begin{vmatrix} 1 & t_1^{i_1} & \ldots & t_j^{i_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & t_1^{i_j} & \ldots & t_j^{i_j} \\ \gamma & x_1 & \ldots & x_j \end{vmatrix} \qquad (5)$$

для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$ и $d(x; \gamma) \equiv 1$ для $j = 0$, то получим $d(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, t^{i_{j+1}}; 1) \ne 0$ при условии, что точки находятся в общем положении.

Введем обозначения для каждого $j = 1, 2, \ldots, r$:

$$a(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, x) = 0, \text{ если } d(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, 0^*; 1) / d(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, 1) \le 0,$$

и $a(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, x) = -a(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, x; 0) / d(t^{i_1}, \ldots, t^{i_j}, 0^*; 1)$ в противном случае,

а также

$$A(t^{i_1}, \ldots, t^{i_s}, x) = \max(0, a(t^{i_1}, x), a(t^{i_1}, t^{i_2}, x), \ldots, a(t^{i_1}, \ldots, t^{i_s}, x)), \; j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$c(t^{i_1},\dots,t^{i_j},x)=-d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},x;0)/d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},0^*;1),$$

$$\text{если } d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},0^*;1)/d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},1)<0;$$

$$c(t^{i_1},\dots,t^{i_j},x)=\infty, \text{ если } d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},0^*;1)/d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},1)>0;$$

$$c(t^{i_1},\dots,t^{i_j},x)=0, \text{ если } d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},0^*;1)=0$$

$$\text{и } d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},x;0)/d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},1)<0;$$

$$c(t^{i_1},\dots,t^{i_j},x)=\infty, \text{ если } d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},0^*;1)=0$$

$$\text{и } d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},x;0)/d(t^{i_1},\dots,t^{i_j},1)\ge 0;$$

$$C(t^{i_1},\dots,t^{i_s},x)=\min(0,c(t^{i_1},x),c(t^{i_1},t^{i_2},x),\dots,c(t^{i_1},\dots,t^{i_s},x));$$

$$B(t^{i_1},\dots,t^{i_s},x)=\max\{A(t^{i_1},\dots,t^{i_s},x),C(t^{i_1},\dots,t^{i_s},x)\}.$$

Теорема 3. Плотность вероятностей случайного вектора $\eta=\xi_1 t^1+\ldots+\xi_r t^r$ в точке $x\in R_k$ имеет вид

$$f_\eta(x)=\sum_{i_1=0}^{r}\sum_{\substack{i_2=0\\ i_2\ne i_1}}^{r}\dots\sum_{\substack{i_k=0\\ i_k\ne i_j\\ j=1,\dots,k}}^{r}\frac{1}{\prod\limits_{\substack{i_{k+1}=0\\ i_{k+1}\ne i_j\\ j=1,\dots,k}}^{r} d(t^{i_1},\dots,t^{i_{k+1}};1)}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{r-k}\frac{(d(t^{i_1},\dots,t^{i_k},0^*;1))^j\,(d(t^{i_1},\dots,t^{i_k},x;0))^{r-k-j}}{(r-k-j)!}\times$$

$$\times\sum_{l=0}^{j}\frac{(A(t^{i_1},\dots,t^{i_k},x))^l e^{-A(t^{i_1},\dots,t^{i_k},x)}-(B(t^{i_1},\dots,t^{i_k},x))^l e^{-B(t^{i_1},\dots,t^{i_k},x)}}{l!},$$

где $t^0\equiv 0^*\in R_k$; векторы $t^1,\dots,t^r\in R_k$ находятся в общем положении; $0^0\equiv 1$; $(+\infty)^m e^{-\infty}\equiv 0$ (здесь m — неотрицательное целое).

Результаты из теорем 1, 2 и 3 могут быть использованы для алгоритмизации компьютерных вычислений и решения прикладных задач. Вероятностное распределение линейной комбинации из независимых экспоненциально распределенных случайных величин находит широкое приложение в теории риска, в теории очередей, в многофакторном анализе надежности и в психологии. Полученные результаты могут быть использованы для исследования и прогнозирования влияния субъективного фактора на экономические и социальные системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А.А., Боянов Б.Д. Теория на сплайн функциите. — София: Наука и изкуство, 1990. — 182 с.
2. Костадинова С.Р., Игнатов Цв. Линейни трансформации на експоненциално разпределени случайни величини и многомерни експоненциални сплайни // Год. На СУ, Стопански факултет. — 2006. — **5.** — С. 109–114.
3. Ali M.M., Mead E.R. On the distribution of several linear combinations of order statistics from the uniform distribution // The University of Western Ontario, 1968. — P. 22–41.
4. Dahmen W., Micchelli C.A. On the linear independence of mulivariate B-splines. II. Complete configurations. — Preprint 460, Bonn, 1981.
5. De Boor C. Splines as linear combinations of B-splines. Approximation Theory. II. — New York: Acad. Press, 1976. — P. 1–47.
6. Ignatov Zv.G., Dialo M.O., Kostadinova S.R. The density of linear transformations of independent exponential random variables // XXXIV Spring Conf. of UBM, 2005. — P. 164–168.

Поступила после доработки 23.05.2008