УДК 519.21

Б.В. НОРКИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАХОВОГО ДЕЛА[1]

Ключевые слова: *страховая математика, процесс риска, вероятность разорения, оптимизация, оптимальное управление, страховой портфель, перестрахование, метод Монте-Карло*.

ВВЕДЕНИЕ

Суть страхового бизнеса состоит в получении максимума чистой прибыли при достаточных страховых резервах для покрытия возможных страховых требований с заданной степенью надежности [1, 2]. В конкурентной среде компания стремится увеличить свою долю на рынке.

Для усовершенствования бизнеса используются гибкие (новые) страховые тарифы (цены), перестрахование рисков, введение новых страховых продуктов, расширение дилерской сети, использование рекламы, инвестиций и др. [3]. Все это требует расходов, которые, конечно, осуществляются либо за счет поступающих премий, либо за счет уменьшения стартового резерва. Расходы уменьшают страховые резервы или доходы компании и тем самым влияют на ее надежность. Поэтому требуется тонкая балансировка между задачами максимизацией прибыли и поддержанием стабильности компании. Страховой бизнес основан на законе больших чисел — чем больше складывается независимых случайных величин (рисков), тем более прогнозируемо их среднее. Грамотный страховой бизнес — наукоемкий вид деятельности, в котором используются сложные математические модели теории случайных процессов, математической статистики, оптимизации и оптимального управления.

Традиционная теория микроэкономики страхования основана на понятии ожидаемой полезности [2, 4]. Экономические агенты, включая страховые компании, руководствуются принципом максимизации ожидаемой полезности. Функции полезности позволяют качественно объяснить многие явления экономики, но малопригодны для практических расчетов, поскольку они не измеримы физическими или иными прямыми методами.

Другой подход к анализу страховой деятельности основан на исследовании доходности и риска (вероятности разорения). В качестве меры доходности может выступать капитал компании в конце планового периода [1, 3, 5] или средняя доходность страховой деятельности [6], а в качестве меры риска — дисперсия капитала [1, 3, 5], вероятность разорения [1, гл. 10], ее экспоненциальные оценки сверху [6, 7], коэффициент Лундберга [2, разд. 14.5], математическое ожидание максимальных суммарных потерь [2, разд. 13.6, 14.4, 14.5] и другие характеристики события разорения. В этом подходе основная проблема — вычисление или оценка вероятности разорения страховой компании. Данной проблеме посвящена обширная литература [1, 2, 7–9].

В работах [6, 10] рассматривались задачи оптимизации перестрахования рисков в рамках классической модели коллективного риска Крамера–Лундберга, а именно, максимизировался средний темп роста капитала компании при ограничении на вероятность разорения, оцененную для бесконечного интервала времени. В качестве переменных оптимизации выступали параметры договоров перестрахования. Поскольку вычислить вероятность разорения не просто, то в ограничении использовалась ее верхняя оценка, а именно, експоненциальная граница Крамера–Лундберга. В [2] при выборе параметров перестрахования максимизировался

[1] Работа поддержана грантом № GP/F27/0088 президента Украины для молодых ученых.

коэффициент Лундберга, который входит со знаком минус в экспоненциальную оценку вероятности разорения.

В настоящей статье применяется другой критерий оптимизации — уровень чистой прибыли (дивидендов) при ограничениях на вероятность разорения. Мы применяем этот подход для решения ряда задач управления страховым бизнесом, а именно, для выбора начального страхового резерва, оптимизации тарифов, страхового портфеля, договоров перестрахования и оптимального управления дивидендной политикой компании. При этом вместо точной вероятности разорения используется ее оценка. В качестве переменных оптимизации выступают как параметры договоров перестрахования, так и иные характеристики деятельности страховой компании: цены полисов, уровни инвестиций в ту или иную сферу деятельности компании и др. Искомыми величинами выступают уровень дивидендов и другие параметры управления компанией, рассчитанные как функции начального капитала. Подобный подход для компании в целом рассмотрен в [7]. Полученные функции могут использоваться для текущего управления компанией, а именно, в эти функции подставляется текущее случайное значение капитала и полученные параметры управления используются для оперативного управления компанией. Однако при таком управлении процесс становится нелинейным, хотя текущее управление строилось исходя из предположения, что после выбора новых параметров управления с этого момента они меняться не будут. Поэтому возникает необходимость в повторной оценке вероятности разорения нового нелинейно управляемого процесса риска, в котором премии зависят от текущего капитала. Это уже не классический процесс риска, для него не применимы классические модели оценки риска разорения, но применим общий метод Монте-Карло и метод последовательных приближений [11–14]. Повторная оценка риска тем более оправдана, поскольку в процессе оптимизации параметров деятельности компании использовались упрощенные оценки для вероятности разорения. Отметим, что для оценки малых вероятностей разорения необходимо огромное число испытаний в методе Монте-Карло, поэтому имеет смысл применять его на параллельных вычислительных системах (многоядерных вычислительных машинах или кластерах).

Таким образом, основные наши инновации — это максимизация чистой прибыли (дивидендов), являющейся разницей между страховыми премиями и отчислениями в страховой резерв, и замена ограничения на вероятность разорения ее экспоненциальной оценкой Крамера–Лундберга (ранее этот прием использовался в [6]). В совокупности эти два приема позволяют получить выражение для коэффициента Лундберга в явном виде, исключить сложное вероятностное ограничение из формулировки задачи, декомпозировать задачу оптимизации страхового портфеля и во многих случаях получить аналитические решения. Для задачи оперативного оптимального управления дивидендной политикой компании при ограничении на вероятность разорения используются оптимальные для текущего состояния стационарные стратегии, которые вычисляются аналитически. Численными расчетами с помощью параллельного метода Монте-Карло показано, что полученная таким образом адаптивная стратегия значительно превосходит оптимальную для начального капитала стационарную стратегию как по уровню суммарных дивидендов, так и по вероятности разорения. Новым является также метод последовательных приближений для оценки риска разорения компании, когда премии и дивиденды зависят от текущего капитала компании.

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СТРАХОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ

Пусть в портфеле компании имеется n_i договоров стоимости p_i i-го типа с пуассоновской интенсивностью поступлений требований α_i (по одному договору) и функцией распределения независимых требований $F_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Будем предполагать, что моменты поступления и размеры всех страховых требований независимы. Пусть имеется $j = 1, \ldots, m$ текущих видов деятельности, направленных на совершенствование бизнеса, с постоянными интенсивностями x_j и затратами $b_j(x_j)$, таким образом, общие затраты на них в единицу времени равны $\sum_{i=1}^{m} b_j(x_j)$. Обозначим вектор $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$, где $X \subset R^m$ — некоторое множество допустимых решений. Всякая активность ведет к изменению числа договоров в портфеле компании, т.е. $n_i(x)$ — число договоров i-го типа зависит от вектора активностей x. В частности, в качестве переменной оптимизации может выступать само количество договоров n_j j-го типа, тогда $b_j(n_j)$ выражает стоимость обслуживания этих договоров. В этих предположениях суммарные страховые требования по каждому типу договора на любом конечном интервале времени — сложный пуассоновский процесс, поэтому суммарные страховые требования портфеля — также сложный пуассоновский процесс [2, разд. 12.4, 13.3], в котором совокупные премии $c(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i n_i(x)$, интенсивности прихода требований $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i(x)$ и распределение требований

$$F_x(\,\cdot\,) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i(x) F_i(\,\cdot\,) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i(x) \tag{1}$$

зависят от вектора x.

Задача принятия решений состоит в максимизации чистой текущей прибыли (нетто-премии, дивидендов) D при ограничениях на стабильность (безопасность) бизнеса:

$$D \to \max_{x \in X,\, D \ge 0}, \tag{2}$$

$$\psi_T\left(u, \sum_{i=1}^{n} p_i n_i(x) - \sum_{j=1}^{m} b_j(x_j) - D, \alpha(x), F_x\right) \le \varepsilon, \tag{3}$$

где $\psi_T(u, \widetilde{c}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{F})$ — вероятность разорения компании на интервале времени $[0, T \le \infty]$; параметр u обозначает начальный страховой резерв компании; $\widetilde{c} = \sum_{i=1}^{n} p_i n_i(x) - \sum_{j=1}^{m} b_j(x_j) - D$ — размер чистой совокупной премии в единицу времени; $\widetilde{\alpha} = \alpha(x)$ — интенсивность потока независимых требований; $\widetilde{F} = F_x$ — вероятностное распределения размера одного случайного требования в общем потоке требований; ε — параметр надежности бизнеса, $0 < \varepsilon < 1$. Постановка (2), (3) предполагает, что компания стабильно функционирует в течение длительного (в идеале бесконечного) интервала времени $[0, T]$, при этом параметры ее бизнеса при фиксированном управлении x не меняются.

Обычно функция $\psi_T(\,\cdot\,)$ не известна в явном виде. Она или задана приближенными формулами (аппроксимациями), или находится путем решения вспомогательной вычислительной задачи, например обращения преобразования Лапласа или решения интегрального уравнения для вероятности разорения [9]. Таким образом, постановка (2), (3) — сложная вычислительная задача.

Для вероятности разорения $\psi_T(\,\cdot\,)$ рассматриваемого сложного процесса риска имеет место оценка Крамера–Лундберга [9],

$$\psi_T(u, \widetilde{c}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{F}) \le \psi_\infty(u, \widetilde{c}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{F}) \le e^{-Ru}$$

при условии, что существует положительное решение (коэффициент Лундберга) R уравнения

$$\int_0^\infty e^{Ry}(1 - \widetilde{F}(y))\, dy = \widetilde{c} \,/\, \widetilde{\alpha}.$$

Такое решение заведомо существует, если $\tilde{\alpha}\int\limits_0^{\infty}(1-\tilde{F}(y))\,dy<\tilde{c}$ и страховые требования равномерно ограничены. Если заменить в ограничении (3) вероятность разорения $\psi_T(\cdot)$ ее экспоненциальной оценкой e^{-Ru}, то это ограничение усилится, т.е. сузится область допустимых решений задачи. Рассмотрим вместо (2), (3) задачу

$$D\to\max_{x\in X,\,D\ge 0,\,R\ge 0},\tag{4}$$

$$e^{-Ru}\le\varepsilon,\tag{5}$$

$$\alpha(x)\int\limits_0^{\infty}e^{Ry}(1-F_x(y))\,dy=\sum_{i=1}^{n}p_i n_i(x)-\sum_{j=1}^{m}b_j(x_j)-D.\tag{6}$$

Если допустимые решения этой задачи существуют, то, очевидно, в оптимальном решении ограничение-неравенство $e^{-Ru}\le\varepsilon$ выполняется как равенство. Это позволяет исключить величины R и D из постановки задачи, $R=(1/u)\ln(1/\varepsilon)$,

$$\begin{aligned}D&=\sum_{i=1}^{n}p_i n_i(x)-\sum_{j=1}^{m}b_j(x_j)-\alpha(x)\int\limits_0^{\infty}e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1-F_x(y))\,dy=\\&=\sum_{i=1}^{n}p_i n_i(x)-\sum_{j=1}^{m}b_j(x_j)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i n_i(x)\int\limits_0^{\infty}e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}\times\\&\times\left(1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i n_i(x)F_i(\cdot)\Big/\sum_{i=1}^{n}\alpha_i n_i(x)\right)dy=\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(p_i-\alpha_i\int\limits_0^{\infty}e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1-F_i(y))dy\right)n_i(x)-\sum_{j=1}^{m}b_j(x_j).\end{aligned}$$

В результате приходим к следующей задаче:

$$D(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i(u,\varepsilon)n_i(x)-\sum_{j=1}^{m}b_j(x_j)\to\max_{x\in X},\tag{7}$$

где коэффициенты

$$a_i(u,\varepsilon,p_i)=p_i-\alpha_i I_i(u,\varepsilon),\;\; I_i(u,\varepsilon)=\int\limits_0^{\infty}e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1-F_i(y))\,dy\tag{8}$$

могут быть вычислены независимо и до решения оптимизационной задачи (7).

Ут**верждение 1.** Предположим, что все интегралы $I_i(u,\varepsilon)$ в (8) конечны. Если в оптимальном решении x^* задачи (7) значение целевой функции неотрицательно, $D(x^*)\ge 0$, то набор $\{D^*=D(x^*),R^*=(1/u)\ln(1/\varepsilon),x^*\}$ является оптимальным решением задачи (4)–(6), а пара $\{D^*=D(x^*),\;x^*\}$ — допустимой для задачи (2), (3).

Доказательство. Обозначим D^{**} верхнюю грань значений целевой функции (4) на допустимом множестве (5), (6). Если x^* — оптимальное решение задачи (7), то очевидно, $\{D^*=D(x^*),R^*=(1/u)\ln(1/\varepsilon),x^*\}$ является допустимым решением задачи (4)–(6). Поэтому оптимальное значение D^{**} в (4)–(6) не меньше $D(x^*)$. Предположим, что $D^{**}>D(x^*)$. Тогда существует допустимый для (4)–(6) набор (D',R',x') такой, что $D^{**}\ge D'>D(x^*)\ge 0$. При этом без ограничения общности можно считать, что (5) выполняется как равенство, т.е. $R'=(1/u)\ln(1/\varepsilon)$. Тогда пара (D',x') является допустимой для задачи (7), (8), и, следовательно, $D'\le D(x^*)$, что противоречит ранее установленному неравенству $D'>D(x^*)$. Таким образом,

$D^{**} = D(x^*)$ и, следовательно, $\{D^* = D(x^*) R^* = (1/u)\ln(1/\varepsilon), x^*\}$ — оптимальное решение задачи (4)–(6).

По построению $R^* = (1/u)\ln(1/\varepsilon) > 0$ является положительным корнем уравнения

$$\alpha(x^*)\int_0^\infty e^{Ry}(1-F_{x^*}(y))\,dy = \sum_{i=1}^n p_i n_i(x^*) - \sum_{j=1}^m b_j(x_j^*) - D^*.$$

Поэтому согласно [9, теорема 3.8] для вероятности разорения $\psi(\cdot)$ справедливо неравенство Крамера–Лундберга и, таким образом, $\{D^* = D(x^*), x^*\}$ — допустимое решение задачи (2), (3).

Утверждение доказано.

При $a_i(u, \varepsilon, p_i) < 0$ соответствующее слагаемое в (7) отрицательно, это означает, что данный вид страхования убыточен при данных параметрах u, ε, p_i. Таким образом, величины $p_i^*(u,\varepsilon) = \alpha_i I_i(u,\varepsilon)$ задают нижнюю границу безубыточных цен для договоров i-го типа при данном страховом резерве u и уровне надежности ε.

В текущей деятельности страховой компании величины $p_i^*(\xi_t, \varepsilon) = \alpha_i I_i(\xi_t, \varepsilon)$, где ξ_t — текущий (в момент t) страховой резерв, показывают величины текущих безубыточных страховых тарифов (премий). Сравнение фактических тарифов p_i с ориентирами $p_i^*(\xi_t, \varepsilon)$ позволит менеджерам компании расставить правильные акценты по расширению или сворачиванию того или иного вида страхования с учетом принятого уровня риска ε.

Замечание. Задачи (4)–(6) и (8), (9) дают только приближенное решение проблемы оптимизации дивидендов. Реальные дивиденды за время T меньше DT, поскольку они теряются в случае разорения, но больше $(1-\varepsilon)DT$, поскольку вероятность разорения меньше ε.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ДАННЫЕ И АППРОКСИМАЦИИ

Проиллюстрируем предлагаемый подход к оптимизации страхового бизнеса на ряде задач. В дальнейшем будем сопровождать теоретические результаты численными расчетами. Исходные данные для расчетов взяты из работы [6] и приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры	Результаты расчетов						
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
$\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i n_i$	0.2	0.5	1	1.2	2	3	4
μ_i	3	2	3	2	1	0.3	0.1
$c_i = p_i n_i$	0.8	1.2	3.5	2.8	2.4	1	0.5
$\alpha_i \mu_i / c_i$	0.7500	0.8333	0.8571	0.8571	0.8333	0.9000	0.8000

Здесь $\widetilde{\alpha}_i$ обозначает интенсивность пуассоновского потока страховых требований по договорам i-го типа; c_i — интенсивность потока премий; функции распределения требований экспоненциальны со средним μ_i, $F_i(y) = 1 - e^{-y/\mu_i}$.

Поток требований можно моделировать сложным пуассоновским процессом с интенсивностью поступления требований $\alpha = \sum_i \alpha_i = 11.9$, с интенсивностью поступления премий $c = \sum_i c_i = 122$ и распределением требований $F(y) = \sum_i \alpha_i F_i(y) \big/ \sum_i \alpha_i$,

$\mu = \sum_i \alpha_i \mu_i \,/ \sum_i \alpha_i = 0.8655$. Соответствующая страховая нагрузка $\rho = c/(\alpha\mu) - 1 = = \sum_i c_i \,/ \sum_i \alpha_i \mu_i - 1 = 0.1845$. Оценка Крамера–Лундберга для вероятности разорения имеет вид $\psi(u) \le e^{-Ru} = e^{-0.0773 \cdot u}$, где $R = 0.0773$ — коэффициент Лундберга, являющийся решением уравнения $\alpha \int\limits_0^\infty e^{Ry}(1 - F(y))\,dy = c$.

Экспоненциальное приближение $\overline{F}(y) = 1 - e^{-y/\overline{\mu}}$ распределения страховых требований применяется в аппроксимации Де Вильдера [9, разд. III, § 5]. При этом исходный процесс с параметрами (μ, ρ, α) заменяется процессом с параметрами

$$\overline{\mu} = \frac{m_3}{3m_2} = 2.4151, \quad \overline{\rho} = \frac{2m_1 m_3}{3m_2^2}\rho = 0.2305, \quad \overline{\alpha} = \frac{9m_2^3}{2m_3^2}\alpha = 3.4135,$$

где $m_j = (1/\alpha)\sum_i \alpha_i \mu_{ij}$ — j-й момент исходного распределения требований $F(y) = (1/\alpha)\sum_i \alpha_i F_i(y)$, $\mu_{ij} = \int\limits_0^\infty y^j dF_i(y)$ — j-й момент распределения требований $F_i(y)$. В данном случае $m_1 = 0.8655$, $m_2 = 3.3462$, $m_3 = 24.2445$. Соответствующая аппроксимация вероятности разорения имеет вид

$$\overline{\psi}(u) = \frac{1}{1+\overline{\rho}} e^{-\frac{\overline{\rho} u}{(1+\overline{\rho})\overline{\mu}}} = 0.8127 e^{-0.0776 \cdot u}. \tag{9}$$

В работе [2, с. 375] предлагается также использовать экспоненциальную аппроксимацию распределения требований $\widetilde{F}(y) = 1 - e^{-y/\widetilde{\mu}}$ со средним $\widetilde{\mu} = m_2/(2m_1) = 1.9330$, оставляя неизменной страховую нагрузку. В этом случае аппроксимация вероятности разорения имеет вид

$$\widetilde{\psi}(u) = \frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{(1+\rho)\widetilde{\mu}}} = 0.8443 e^{-0.0806 \cdot u}. \tag{10}$$

Если требования по отдельным видам страхования неэкспоненциальны, то указанные экспоненциальные приближения можно применять к отдельным компонентам портфеля.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СТРАХОВОГО БИЗНЕСА

Задача 1 (оценка безубыточных страховых тарифов). Перепишем (7) в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (c_i(x) - \alpha_i(x) I_i(u, \varepsilon)) - \sum_{j=1}^{m} b_j(x_j) \to \max_{x \in X},$$

где $c_i(x) = p_i n_i(x)$, $\alpha_i(x) = \alpha_i n_i(x)$. Отрицательность слагаемого $(c_i(x) - \alpha_i(x) I_i(u, \varepsilon))$ означает заведомую убыточность соответствующего вида страхования при данных (u, ε).

Если $F_i(y) = 1 - e^{-y/\mu_i}$ и $u > \mu_i \ln(1/\varepsilon)$, то

$$I_i(u, \varepsilon) = \int\limits_0^\infty e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1 - F_i(y))\,dy = \int\limits_0^\infty e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon) - y/\mu_i}\,dy =$$

$$= \frac{1}{(1/u)\ln(1/\varepsilon) - 1/\mu_i} e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon) - y/\mu_i}\Big|_0^\infty = \frac{\mu_i u}{u - \mu_i \ln(1/\varepsilon)} = \frac{\mu_i}{1 - (\mu_i/u)\ln(1/\varepsilon)}.$$

При

$$u \ge u_i(\varepsilon) = \frac{\mu_i}{1 - \alpha_i \mu_i / c_i} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

выполнено $c_i - \alpha_i I_i(u, \varepsilon) \geq 0$, таким образом, $u_i(\varepsilon)$ задает минимальный уровень страхового резерва, при котором соответствующий вид страхования может быть безубыточен. В случае неэкспоненциальных распределений требований вычисление величин $I_i(u, \varepsilon)$ требует применения численного интегрирования. Например, для границы вероятности неплатежеспособности $\varepsilon = 10^{-3}$ величины $u_i(10^{-3})$ соответственно равны 82.8931, 82.8931, 145.0629, 96.7086, 41.4465, 20.7233, 3.4539.

Задача 2 (оценка безопасного страхового резерва). Задача оценки величины страхового резерва, обеспечивающего заданный уровень безопасности, является классической задачей актуарной математики [1]. Пусть эволюция страховых резервов компании агрегировано описывается классическим процессом риска с интенсивностью поступления премий c, пуассоновским потоком страховых требований с интенсивностью α и функцией распределения требований $F(y)$ со средним μ, $\alpha\mu < c$. Тогда задача (4)–(6)максимизации дивидендов принимает вид

$$D \to \max_{D \geq 0,\, R \geq 0}, \tag{11}$$

$$e^{-Ru} \leq \varepsilon, \tag{12}$$

$$\alpha \int_0^\infty e^{Ry}(1 - F(y))\, dy = c - D. \tag{13}$$

Предположим, что существует решение $u^*(\varepsilon)$ уравнения

$$\alpha \int_0^\infty e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1 - F(y))\, dy = c. \tag{14}$$

Так как левая часть (14) монотонна по u, то решение $u^*(\varepsilon)$ единственно. Такое решение заведомо существует, если $\alpha\mu < c$ и страховые требования ограничены. Если распределение требований экспоненциально со средним μ, то $u^*(\varepsilon) = \dfrac{\mu}{1 - \alpha\mu / c} \ln \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Утверждение 2. Если $u \geq u^*(\varepsilon)$, где $u^*(\varepsilon)$ — корень уравнения (14), то решение задачи (11)–(13) существует и равно

$$D^*(u) = c - \alpha \int_0^\infty e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1 - F(y))\, dy, \quad R^*(u) = (1/u)\ln(1/\varepsilon). \tag{15}$$

Доказательство. Функция $I(u) = \alpha \int_0^\infty e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1 - F(y))\, dy$ неотрицательна, монотонно убывает по u и $I(u^*(\varepsilon)) = c$, поэтому при $u \geq u^*(\varepsilon)$ выполнено $0 \leq I(u) \leq c$ и, следовательно, $0 \leq D^*(u) \leq c$. Очевидно, $R^*(u)$, $D^*(u)$ составляют допустимое решение задачи (11)–(13). Для любых допустимых (R, D) выполнено $R \geq R^*(u)$ и

$$0 \leq \alpha \int_0^\infty e^{R^* y}(1 - F(y))\, dy \leq \alpha \int_0^\infty e^{Ry}(1 - F(y))\, dy \leq c.$$

Отсюда

$$D = c - \alpha \int_0^\infty e^{Ry}(1 - F(y))\, dy \leq c - \alpha \int_0^\infty e^{R^* y}(1 - F(y))\, dy = D^*(u),$$

следовательно, пара $(D^*(u), R^*(u))$ оптимальна, что и требовалось доказать.

При $u \geq u^*(\varepsilon)$ гарантируется, что вероятность разорения $\widetilde{\psi}(u, D) \leq \varepsilon$. Величина $u^*(\varepsilon)$ служит оценкой минимального безопасного уровня страховых резервов, а величина

$$c - D^* = \alpha \int_0^\infty e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1 - F(y))\, dy$$

является минимальным уровнем обязательных отчислений в страховой резерв. Если в текущий момент t выполнено $\xi_t \geq u^*(\varepsilon)$, то компания гарантированно находится в безопасности на уровне ε. Если $\xi_t < u^*(\varepsilon)$, то требуемый уровень надежности ε не гарантируется.

Пусть портфель договоров компании задан табл. 1 с экспоненциальными распределениями страховых требований. В агрегированном виде эволюция резервов компании описывается сложным пуассоновским потоком с интенсивностью $\alpha = \sum_i \alpha_i = 12.2$, суммарными премиями $c = \sum_i c_i = 11.9$ и распределением требований $F(y) = \sum_i \alpha_i \bar{F}_i(y) / \sum_i \alpha_i$, $\mu = \sum_i \alpha_i \mu_i / \sum_i \alpha_i = 0.8655$. При $u > (\max_i \mu_i) \ln(1/\varepsilon) = 20.7233$ левая часть уравнения (14) имеет вид

$$\alpha \int_0^\infty e^{(y/u)\ln(1/\varepsilon)}(1-F(y))\,dy = \sum_i \frac{\alpha_i}{1/\mu_i - (1/u)\ln(1/\varepsilon)},$$

а уравнение

$$\sum_i \frac{\alpha_i}{1/\mu_i - (1/u)\ln(1/\varepsilon)} = \sum_i c_i$$

имеет решение $u^*(10^{-3}) = 89.3883$, которое также является решением (14).

Пусть распределение страховых требований аппроксимируется экспоненциальным распределением $F(y) = 1 - e^{-y/\mu}$ со средним μ, тогда вероятность разорения имеет вид [9, теорема 3.3]

$$\psi(u, D) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\rho(D)} e^{-\frac{\rho(D)u}{(1+\rho(D))\mu}}, & c - D > \alpha\mu, \\ 1 & c - D \leq \alpha\mu, \end{cases}$$

где $\rho(D) = \dfrac{c-D}{\alpha\mu} - 1$. Задачу оптимизации дивидендов сформулируем в следующем виде:

$$D \to \max_{0 \leq D < c - \alpha\mu}, \tag{16}$$

$$\psi(u, D) = \frac{1}{1+\rho(D)} e^{-\frac{\rho(D)u}{(1+\rho(D))\mu}} \leq \varepsilon. \tag{17}$$

Ограничение задачи можно записать как

$$\left(1 - \frac{1}{1+\rho(D)}\right)\frac{u}{\mu} + \ln(1+\rho(D)) \geq \ln\frac{1}{\varepsilon},$$

где левая часть монотонно убывает к нулю с ростом D от 0 до $c - \alpha\mu$. Таким образом, решение задачи (16), (17) существует, если

$$u \geq u^*(\varepsilon) = \frac{\mu}{1 - \alpha\mu/c} \ln\frac{\alpha\mu/c}{\varepsilon},$$

и равно $D = c - (1+\rho^*)\alpha\mu$, где ρ^* — решение относительно ρ уравнения

$$\frac{1}{1+\rho} e^{-\frac{\rho u}{(1+\rho)\mu}} = \varepsilon.$$

В качестве приближенного решения можно взять значение $\rho^* = \frac{\ln(1/\varepsilon)}{1+u/\mu}$, если оно намного меньше единицы.

Задача 3 (оптимизация страховых тарифов). Пусть оптимизируемыми переменными являются стоимости страховых полисов, т.е. страховые тарифы (премии) $x_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда количество договоров i-го типа (спрос на страховые услуги) $n_i(x_i)$ в портфеле компании зависит от их цены $x_i \in [l_i, h_i]$. Очевидно, что $n_i(x_i)$ убывает с ростом x_i. Обозначим вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n} n_i(x_i) x_i \text{ — суммарная премия,} \tag{18}$$

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i(x_i) \text{ — интенсивность поступления требований,} \tag{19}$$

$$F_x(\cdot) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i(x_i) F_i(\cdot) / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n_i(x_i) \text{ — функция распределения одного требования.} \tag{20}$$

Для этого случая задача (7) принимает вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) n_i(x_i) \to \max_{x_i \in [l_i, h_i],\, i=1,\ldots,n}, \tag{21}$$

где коэффициенты a_i задаются выражением $a_i(x_i) = x_i - \alpha_i I_i(u, \varepsilon)$. Задача (21) сепарабельна и сводится к решению n задач одномерной оптимизации

$$f_i(x_i) = a_i(x_i) n_i(x_i) \to \max_{x_i \in [l_i, h_i]}, \tag{22}$$

решение которой легко находится сканированием значений $x_i \in [l_i, h_i]$. Естественно предполагать, что число договоров $n_i(x_i)$ и суммарная премия $x_i n_i(x_i)$ по ним убывают с увеличением цены x_i договора, поэтому множитель $a_i(x_i)$ монотонно возрастает с ростом x_i и может менять знак. Таким образом, целевая функция $f_i(x_i)$ является произведением монотонно возрастающей $a_i(x_i)$ и монотонно убывающей $x_i n_i(x_i)$ функций и одномерная оптимизационная задача (22) многоэкстремальна.

Задачу (22) можно переписать в терминах цены полиса x_i и премии $c_i(x_i) = x_i n_i(x_i)$:

$$f_i(x_i) = c_i(x_i)(1 - \alpha_i I_i(u, \varepsilon) / x_i) \to \max_{x_i \in [l_i, h_i]}.$$

Отметим, что в нашей постановке количество договоров $n_i(x_i)$ считается стабильным и равновесным, соответствующим цене полиса x_i. В работах [3, 5] рассмотрена другая постановка задачи оптимизации страховых тарифов, в которой число договоров случайно с распределением, зависящим от цены полиса.

Задача 4 (оптимизация эксцедентных договоров перестрахования [6]). Пусть страховая компания выполняет n видов страхования, причем по каждому виду i поток страховых требований пуассоновский с параметром α_i, требования имеют экспоненциальное распределение со средним μ_i, а премии в единицу времени составляют величину c_i. Моменты поступления и величины всех требований считаются независимыми. Если ожидаемые требования по тому или иному виду страхования велики, то компания может перестраховать такие риски у перестраховщика. Например, по эксцедентному договору перестрахования компания проводит выплату по требованию i-го типа не больше величины x_i. Остальная часть требования покрывается перестраховывающей компанией. Таким образом, размер выплат по i-му виду страхования будет иметь функцию распределения

$$F_i(y,x_i)=\begin{cases}F_i(y), & \text{если } y<x_i,\\ 1, & \text{если } y\ge x_i\end{cases}=\begin{cases}1-\exp(-y/\mu_i), & \text{если } y<x_i,\\ 1, & \text{если } y\ge x_i.\end{cases}$$

со средним $\mu_i(x_i)=\int\limits_0^\infty y dF_i(y,x_i)=\mu_i(1-e^{-x_i/\mu_i})$. Обозначим $x=(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда общий поток требований будет пуассоновским с интенсивностью $\alpha=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$, а размер выплат имеет функцию распределения $F_x(y)=\sum\limits_{i=1}^n\nu_iF_i(y,x_i)$, где $\nu_i=\alpha_i/\alpha$. Средний размер выплат для страховой компании имеет вид $\mu(x)=\sum\limits_{i=1}^n\nu_i\mu_i(x)$. По эксцедентному договору перестрахования компании остается только часть $\delta_i(x_i)c_i$ премии c_i, а остальная часть $(1-\delta_i(x_i))c_i$, играющая роль стоимости перестраховки, передается перестраховщику. Таким образом, интенсивность страховых взносов в компанию (премий) равна $c(x)=\sum\limits_{i=1}^n c_i\delta_i(x_i)$. Средний темп накопления капитала имеет вид

$$f(x)=c(x)-\alpha\mu(x).$$

Для вероятности разорения $\psi(u,\alpha,F_x)$ рассматриваемого сложного процесса риска имеет место оценка Крамера–Лундберга, $\psi(u,\alpha,F_x)\le e^{-R(x)u}$, где $R(x)$ — корень относительно R уравнения $\int\limits_0^\infty e^{Ry}(1-F_x(y))\,dy=c(x)/\alpha$, или в развернутом виде

$$\sum_{i=1}^n\nu_i\int\limits_0^{x_i}e^{(R-1/\mu_i)y}dy=c(x)/\alpha,$$

которое в данном случае принимает вид

$$\sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{(R-1/\mu_i)}(e^{(R-1/\mu_i)x_i}-1)=\sum_{i=1}^n\delta_i(x_i)c_i.$$

В работе [6] решалась следующая задача: максимизировать по $x\ge 0$ функцию среднего темпа нарастания капитала $f(x)=c(x)-\alpha\mu(x)$ при ограничении $e^{-R(x)u}\le\varepsilon$, где начальный капитал u и уровень надежности ε заданы. Это ограничение автоматически влечет выполнение ограничения на вероятность разорения $\psi(u,\alpha,F_x)\le\varepsilon$.

Стоимость перестрахования в работе [6] бралась пропорциональной среднему размеру требования к перестраховывающей компании $\mu_i-\mu_i(x_i)$ при данном уровне перестрахования x_i, т.е. $\delta_i(x_i)=\mu_i(x)/\mu_i=(1-e^{-x_i/\mu_i})$, тогда

$$c(x)=\sum_{i=1}^n c_i\delta_i(x_i)=\sum_{i=1}^n c_i(1-e^{-x_i/\mu_i}),$$

$$f(x)=c(x)-\alpha\mu(x)=\sum_{i=1}^n(c_i-\alpha_i\mu_i)(1-e^{-x_i/\mu_i}).$$

В работе [6] методом стохастических последовательных приближений найдены приближенные решения рассматриваемой задачи. Три таких приближенных решения (после 2000 стохастических итераций по переменной x и 10 итераций по двойственной переменной) приведены в табл. 2. Во всех трех случаях значение оптимального прироста капитала равно 1.4.

Таблица 2

Решения	Результаты расчетов						
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
x^1	3.2	2.4	3.4	2.6	1.9	0.76	0.59
x^2	3.4	2.2	3.5	2.5	1.8	0.78	0.4
x^3	3.2	2.3	3.4	2.4	1.7	0.7	0.5

Недостаток этой постановки задачи заключается в том, что она предполагает использование всего накопленного резерва на покрытие страховых требований и не показывает, какую часть дохода можно использовать для непроизводственных нужд без увеличения риска неплатежеспособности.

В настоящей статье рассматривается несколько иная постановка задачи, а именно, максимизируется размер непроизводственных отчислений от прибыли D (дивидендов) при том же ограничении по надежности, $e^{-R(x,D)u} \le \varepsilon$, и дается аналитическое решение этой задачи.

В этом случае уравнение для нахождения константы Лундберга $R(x,D)$ принимает вид $\int_0^\infty e^{Ry}(1-F_x(y))\,dy = (c(x)-D)/\alpha$ или в развернутой записи

$$\sum_{i=1}^n \nu_i \int_0^{x_i} e^{(R-1/\mu_i)y} dy = (c(x)-D)/\alpha.$$

Отсюда D можно выразить как

$$D = \sum_{i=1}^n \left[c_i \delta_i(x_i) - \alpha_i \int_0^{x_i} e^{(R-1/\mu_i)y} dy \right].$$

Из этого уравнения видно, что чем меньше R, тем больше D, поэтому в оптимуме ограничение $e^{-R(x,D)u} \le \varepsilon$ должно выполняться как равенство. Отсюда при максимальном D соответствующее значение $R = \frac{1}{u}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ и для D получаем выражение

$$D(x) = \sum_{i=1}^n \left[c_i \delta_i(x_i) - \alpha_i \int_0^{x_i} e^{-((\ln\varepsilon)/u + 1/\mu_i)y} dy \right],$$

которое нужно максимизировать по $x \ge 0$. Отметим, что функция $D(x)$ сепарабельна, т.е.

$$D(x) = \sum_{i=1}^n D_i(x_i),\ D_i(x_i) = c_i \delta_i(x_i) - \alpha_i \int_0^{x_i} e^{-((\ln\varepsilon)/u + 1/\mu_i)y} dy.$$

Поэтому максимизация по вектору $x \ge 0$ распадается на максимизацию функций $D_i(x_i)$ по переменным $x_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$. Взяв интегралы в явном виде, получим

$$D_i(x_i) = c_i \delta_i(x_i) + \frac{\alpha_i}{((\ln\varepsilon)/u + 1/\mu_i)} (e^{-((\ln\varepsilon)/u + 1/\mu_i)x_i} - 1),$$

где (по непрерывности) условимся считать, что второе слагаемое равно $(-\alpha_i x_i)$ при $\mu_i = u/\ln(1/\varepsilon)$ (когда знаменатель равен нулю).

Пусть теперь $\delta_i(x_i)=\mu_i(x)/\mu_i$, как в статье [6]. Для производной $D_i'(x_i)$ при $\mu_i \neq u/\ln(1/\varepsilon)$ имеем

$$D_i'(x_i)=\frac{c_i}{\mu_i}e^{-x_i/\mu_i}-\alpha_i e^{-\left(1-\frac{\mu_i}{u}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{x_i}{\mu_i}}=\frac{c_i}{\mu_i}e^{-x_i/\mu_i}\left(1-\frac{\alpha_i\mu_i}{c_i}e^{\frac{x_i}{u}\ln\frac{1}{\varepsilon}}\right),$$

а при $\mu_i = u/\ln(1/\varepsilon)$ будет $D_i'(x_i)=\dfrac{c_i}{\mu_i}e^{-x_i/\mu_i}-\alpha_i$.

Таким образом, при $\mu_i = u/\ln(1/\varepsilon)$ и $c_i \geq \alpha_i\mu_i$ оптимальное решение

$$x_i^* = \mu_i \ln\frac{c_i}{\alpha_i\mu_i}=\frac{u}{\ln(1/\varepsilon)}\ln\frac{c_i}{\alpha_i\mu_i}.$$

При $\mu_i \neq u/\ln(1/\varepsilon)$ и $c_i \geq \alpha_i\mu_i$ оптимальное решение

$$x_i^* = \frac{u}{\ln(1/\varepsilon)}\ln\frac{c_i}{\alpha_i\mu_i}.$$

Если $c_i < \alpha_i\mu_i$, то $x_i^*=0$. Последнее означает, что при $c_i<\alpha_i\mu_i$ компания отказывается от такого вида страхования.

Для рассматриваемого численного примера $D(x^*)=0.4411$, $f(x^*)=0.8877$ и оптимальное решение имеет вид

$$x^* = (1.6658, 1.0557, 0.8926, 0.8926, 1.0557, 0.6101, 1.2921).$$

Табл. 3 дает сравнение решений x^*, x^1, x^2, x^3 по критериям $c(x)$, $\alpha\mu(x)$, $f(x)$, $D(x)$, $R(x)$, $e^{-R(x)u}$.

Таблица 3

Решения	**Результаты расчетов**					
	$c(x)$	$\alpha\mu(x)$	$f(x)$	$D(x)$	$R(x)$	$e^{-R(x)u}$
x^*	5.6760	4.7883	0.8877	0.5505	0.1727	0.0010
x^1	9.2336	7.8007	1.4329	0.000	0.1724	0.0010
x^2	9.1707	7.7474	1.4234	0.000	0.1724	0.0010
x^3	9.0357	7.6328	1.4029	0.000	0.1769	0.0008

Задача 5 (оптимизация квотных договоров перестрахования [10]). Пусть портфель компании такой же, как в задаче 4, но в отличие от задачи 4 страховая компания проводит выплату по i-му виду страхования в размере $x_i \times 100$ % от общей суммы выплаты, а остальную часть $(1-x_i)\times 100$ % — перестраховующая компания, $0 \leq x_i \leq 1$. Размер выплат для страховой компании по i-му виду страхования имеет функцию распределения $F_i(y/x_i)=1-e^{-y/(\mu_i x_i)}$ со средним $\mu_i(x_i)=x_i\mu_i$, усредненная функция распределения имеет вид $F_x(y)=\sum_{i=1}^{n}\nu_i F_i(y/x_i)$, где $\nu_i=\alpha_i/\alpha$, со средним $\mu(x)=\sum_{i=1}^{n}\nu_i x_i$. Сумма страховой премии c_i распределяется между страховой компанией и перестраховщиком в пропорции $\delta_i(x_i)$ и $1-\delta_i(x_i)$, таким образом, $(1-\delta_i(x_i))c_i$ играет роль стоимости перестрахования. В частности, мо-

жет быть $\delta_i(x_i) = q_i x_i,\ 0 \le q_i \le 1$. Средний темп нарастания капитала имеет вид

$$f(x) = c(x) - \alpha\mu(x) = \sum_i (c_i \delta_i(x_i) - \alpha_i \mu_i x_i).$$

В оценке Крамера–Лундберга вероятности разорения $\psi(u, \alpha, F_x) \le e^{-R(x)u}$ величина $R(x)$ является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^{\infty} e^{Ry}(1 - F(y))\,dy = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_0^{\infty} e^{(R - 1/(\mu_i x_i))y}\,dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(1/(\mu_i x_i) - R)} = \sum_{i=1}^{n} \delta_i(x_i)\,c_i.$$

В работе [10] ставилась следующая задача: максимизировать по $x \ge 0$ функцию среднего темпа нарастания капитала $f(x) = c(x) - \alpha\mu(x)$ при ограничении $e^{-R(x)u} \le \varepsilon$, где начальный капитал u и уровень надежности ε заданы.

Рассматрим другую постановку: максимизировать размер чистой прибыли D при ограничении $e^{-R(x)u} \le \varepsilon$. В этом случае уравнение для нахождения константы Лундберга $R(x, D)$ принимает вид $\int_0^{\infty} e^{Ry}(1 - F_x(y))\,dy = (c(x) - D)/\alpha$ или в развернутом виде

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \int_0^{\infty} e^{(R - 1/(\mu_i x_i))y}\,dy = (c(x) - D)/\alpha.$$

Отсюда D можно выразить следующим образом:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i \delta_i(x_i) - \alpha_i \int_0^{\infty} e^{(R - 1/(\mu_i x_i))y}\,dy \right].$$

Из этого уравнения видно, что чем меньше R, тем больше D, поэтому в оптимуме ограничение $e^{-R(x,D)u} \le \varepsilon$ должно выполняться как равенство. Отсюда при максимальном D соответствующее значение $R = \frac{1}{u} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ и для D получаем выражение

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[c_i \delta_i(x_i) - \alpha_i \int_0^{\infty} e^{-((\ln \varepsilon)/u + 1/(\mu_i x_i))y}\,dy \right],$$

которое нужно максимизировать по $x \ge 0$. Отметим, что функция $D(x)$ сепарабельна, т.е.

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i(x_i),\ D_i(x_i) = c_i \delta_i(x_i) - \alpha_i \int_0^{\infty} e^{-((\ln \varepsilon)/u + 1/(\mu_i x_i))y}\,dy.$$

Поэтому максимизация по вектору $x \ge 0$ распадается на максимизацию функций $D_i(x_i)$ по переменным $x_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n$. Взяв интегралы в явном виде, получим

$$D_i(x_i) = \begin{cases} c_i \delta_i(x_i) - \dfrac{\alpha_i}{((\ln \varepsilon)/u + 1/(\mu_i x_i))}, & x \le \dfrac{u}{\mu_i \ln(1/\varepsilon)}, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть теперь $\delta_i(x_i) = x_i$, как в [10]. Тогда функция $D_i(x_i)$ достигает максимума при

$$x_i^*(u, \varepsilon) = \min \left\{ 1, \frac{u}{\mu_i \ln(1/\varepsilon)} \left(1 - \sqrt{\frac{\alpha_i \mu_i}{c_i}} \right) \right\}.$$

Табл. 4 задает оптимальные квоты ответственности и распределения премий между страховой компанией с портфелем, заданным табл. 1, и перестраховщиком при начальном страховом резерве $u=40$ и $u=80$. Вероятность неплатежеспособности ограничена величиной $\varepsilon=10^{-3}$.

Таблица 4

Параметры	Результаты расчетов						
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
$x_i^*(40,10^{-3})$	0.2586	0.2523	0.1432	0.2148	0.5045	0.9905	1.0000
$x_i^*(80,10^{-3})$	0.5172	0.5045	0.2864	0.4395	1.0000	1.0000	1.0000

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТРАХОВОЙ КОМПАНИЕЙ

С точки зрения теории оптимального управления решения $D^*(u,\varepsilon)$, $x^*(u,\varepsilon)$ задач 1–5 можно трактовать как оптимальные стационарные стратегии, зависящие от начального резерва (состояния) u и гарантирующие выполнение (фазового) ограничения по безопасности уровня ε. Найденные в результате оптимизации параметры деятельности страховой компании как функции начального резерва (оптимальные стационарные стратегии) можно использовать для оперативного управления компанией. Предполагаем, что основные характеристики деятельности компании, такие как отчисления в страховой резерв $c(y)$, интенсивность прихода требований $\alpha(y)$, распределение требований $F_y(\cdot)$ зависят от вектора параметров y. Пусть в результате оптимизации мы нашли вектор $y(u)$ как функцию начального капитала u. Обозначим ξ_t текущее случайное значение страховых резервов компании. Подставляя в вектор-функцию $y(u)$ вместо u текущее значение капитала ξ_t, получаем некоторый закон позиционного оперативного управления $y(\xi_t)$ параметрами компании, который будем называть квазистационарным оптимальным управлением. Будем считать, что $\bar{c}(\xi_t)=c(y(\xi_t))$, а интенсивность потока требований $\bar{\alpha}$ и их распределение $\bar{F}$ изменяются только в моменты τ прихода требований и реализации соответствующих выплат, т.е. $\bar{\alpha}(t)=\alpha(y(\xi_{\tau+0}))$ и $\bar{F}_t(\cdot)=F_{y(\xi_{\tau+0})}(\cdot)$ при $t\geq\tau$. В таком случае модель стохастической эволюции страховых резервов принимает вид

$$\xi_t=u+\int_0^t \bar{c}(\xi_s)\,ds-S_t,\quad t\geq 0, \tag{23}$$

где $u\geq 0$ — начальный капитал; $\bar{c}(\cdot)=c(y(\cdot))$ — неотрицательная функция, выражающая интенсивность поступления детерминированных премий как функцию текущего капитала; $S_t=\sum_{k=1}^{N_t} z_k$ — агрегированные случайные страховые требования; z_k — случайные требования в моменты t_k с функцией распределения $\bar{F}_{t_k}(\cdot)$; N_t — число поступивших к моменту t случайных требований. Определим функцию $U(u,t)$ как решение задачи Коши:

$$\frac{dU}{dt}=\bar{c}(U),\ U(0)=u,\ t\geq 0. \tag{24}$$

Для вероятности $\varphi(u)=\Pr\{\xi_t\geq 0\ \forall t\geq 0, \xi_0=u\}$ неразорения процесса (23) имеет место интегральное уравнение [11]

$$\varphi(u)=\int_0^\infty \int_0^{U(u,\tau)} \bar{\alpha}(u)e^{-\bar{\alpha}(u)\tau}\varphi(U(u,\tau)-z)\,dF_{y(u)}(z)\,d\tau,\ u\geq 0. \tag{25}$$

Другие подходы к оптимальному управлению параметрами страховой компании рассмотрены в работах [3, 5, 15].

ОЦЕНКА РИСКА РАЗОРЕНИЯ

Для оценки риска разорения управляемого процесса (23) необходимо оценить или найти вероятность разорения $\psi(u)=1-\varphi(u)$. Например, это можно сделать прямым методом Монте-Карло [1], моделируя случайные траектории процесса риска и подсчитывая долю разорившихся траекторий. Недостаток этого метода — его низкая точность при больших значениях u. Другой подход состоит в приближенном решении интегрального уравнения (25). В работах [11–14] для решения уравнения (25) разработан и обоснован метод последовательных приближений:

$$\varphi^{k+1}(u)=\int_0^{\infty}\int_0^{U(u,\tau)}\overline{\alpha}(u)e^{-\overline{\alpha}(u)\tau}\varphi^k(U(u,\tau)-z)\,dF_{y(u)}(z)\,d\tau,\ k=0,1,2,\dots,$$

где $\varphi^0(u)$ — некоторая начальная функция, например $\varphi^0(u)\equiv 1$.

ПРИМЕР УПРАВЛЕНИЯ

Пусть эволюция страховых резервов компании агрегировано описывается классическим процессом риска с интенсивностью поступления премий c, пуассоновским потоком страховых требований с интенсивностью α и экспоненциальной функцией распределения требований $F(y)$ со средним μ, $\alpha\mu<c$.

Стационарная оптимальная для данного начального капитала u стратегия имеет вид (15)

$$D^*(u)=c-\frac{\alpha\mu}{1-(\mu/u)\ln(1/\varepsilon)}. \tag{26}$$

Определим адаптивную стратегию

$$D^*(\xi_t)=c-\alpha\int_0^{\infty}e^{(y/\xi_t)\ln(1/\varepsilon)}(1-F(y))\,dy=c-\frac{\alpha\mu}{1-(\mu/\xi_t)\ln(1/\varepsilon)} \tag{27}$$

при

$$\xi_t\ge u^*(\varepsilon)=\frac{\mu}{1-\alpha\mu/c}\ln\frac{1}{\varepsilon}, \tag{28}$$

$$D^*(\xi_t)=0 \text{ в противном случае.} \tag{29}$$

Тогда величины отчислений в резервный фонд имеют вид

$$\overline{c}(\xi_t)=c-D^*(\xi_t)=\alpha\int_0^{\infty}e^{(y/\xi_t)\ln(1/\varepsilon)}(1-F(y))\,dy=\frac{\alpha\mu}{1-(\mu/\xi_t)\ln(1/\varepsilon)}$$

при $\xi_t\ge u^*(\varepsilon)$ и $\overline{c}(\xi_t)=c$ в противном случае. Отметим, что $\alpha\mu\le\overline{c}(\xi_t)\le c$.

Смысл адаптивной стратегии (26)–(29) состоит в том, что при небольших значениях капитала $\xi_t\ge u^*(\varepsilon)$ дивиденды не берутся, а при больших $\xi_t>>u^*(\varepsilon)$ являются в некотором смысле максимально допустимыми, $D^*(+\infty)=c-\alpha\mu$. Если измерять капитал по отношению к минимально безопасному уровню $u^*(\varepsilon)$ в относительных переменных $\overline{\xi}_t=\xi_t/u^*(\varepsilon)$ и обозначить страховую нагрузку $\rho=c/\alpha\mu-1$, то (27) примет вид

$$D^*(\overline{\xi}_t)=c-\frac{\alpha\mu}{1-\dfrac{1}{(1+\rho)\overline{\xi}_t}},\ \overline{\xi}_t\ge 1.$$

Определим $U(u,t)$ как решение задачи Коши: $\frac{dU}{dt}=\bar{c}(U), U(u,0)=u, t\ge 0$.

Если $u\ge u^*(\varepsilon)$, то $\frac{dU}{dt}=\frac{\alpha\mu}{1-(\mu/U)\ln(1/\varepsilon)}$. Поэтому $U(u, t)$ является единственным корнем уравнения $U-u-\mu\ln\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{U}{u}=\alpha\mu t$, которое заменой переменных $U=u(1+x)$ приводится к виду $x=\frac{\alpha\mu t}{u}+\frac{\mu\ln(1/\varepsilon)}{u}\ln(1+x)$. Заметим, что коэффициент при $\ln(1+x)$ меньше единицы, $\frac{\mu\ln(1/\varepsilon)}{u}\le\frac{\mu\ln(1/\varepsilon)}{u^*(\varepsilon)}=\left(1-\frac{\alpha\mu}{c}\right)<1$, поэтому уравнение всегда имеет единственное положительное решение x^*, причем

$$\frac{\alpha\mu t}{u}\le x^*\le\frac{\alpha\mu t}{u}\Big/\left(1-\frac{\mu\ln(1/\varepsilon)}{u}\right).$$

Если $u<u^*(\varepsilon)$, то

$$\frac{dU}{dt}=\begin{cases}c, & U\le u^*(\varepsilon),\\ \dfrac{\alpha\mu}{1-(\mu/U)\ln(1/\varepsilon)}, & U\ge u^*(\varepsilon),\end{cases}$$

поэтому

$$U(u,t)=\begin{cases}u+ct, & 0\le t\le t^*=(u^*(\varepsilon)-u)/c,\\ u^*(\varepsilon)(1+x^{**}(t)), & t\ge t^*,\end{cases}$$

где $x^{**}(t)$ — корень уравнения $x=\frac{\alpha\mu(t-t^*)}{u^*(\varepsilon)}+\left(1-\frac{\alpha\mu}{c}\right)\ln(1+x)$, причем

$$\frac{\alpha\mu(t-t^*)}{u^*(\varepsilon)}\le x^{**}(t)\le\left(\frac{c}{\alpha\mu}\right)\frac{\alpha\mu(t-t^*)}{u^*(\varepsilon)}=\frac{c(t-t^*)}{u^*(\varepsilon)}.$$

Заметим, что решение уравнения вида $x=a+b\ln(1+x)$, где $a\ge 0$, $0\le b<1$, легко находится с помощью итерационного процесса $x^{k+1}=a+b\ln(1+x^k)$, $x^0=0$, $k=0,1,\ldots$.

Средняя прибыль за время T задается выражением

$$\Pi^*(T)=E\frac{1}{T}\int_0^T D^*(\xi_t)\,dt, \qquad (30)$$

а вероятность неразорения (за бесконечное время) удовлетворяет уравнению

$$\varphi(u)=\int_0^\infty\int_0^{U(u,\tau)}\alpha e^{-\alpha\tau}\varphi(U(u,\tau)-z)\,dF(z)\,d\tau,$$

где $U(u,\cdot)$ — решение задачи Коши (24).

ЧИСЛЕННАЯ ОЦЕНКА КАЧЕСТВА КВАЗИСТАЦИОНАРНОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В численных экспериментах сравнивались три ($i=1,2,3$) стратегии управления дивидендной политикой компании:

- стационарная стратегия (26) ($i=1$), оптимальная для данного начального капитала u компании и гарантирующая вероятность неразорения ε;
- модифицированная стационарная стратегия (26) ($i=2$), в которой

$$D^*(\xi_t) = \begin{cases} c - \dfrac{\alpha\mu}{1-(\mu/u)\ln(1/\varepsilon)}, & \xi_t \ge u^*(\varepsilon), \\ 0, & \xi_t < 0; \end{cases}$$

• квазистационарная оптимальная стратегия (27)–(29) ($i = 3$), когда в каждый момент времени t применяется оптимальная для текущего капитала ξ_t стационарная стратегия.

Параметры модели имели следующие значения: начальный капитал $u = 30$, интенсивность прихода премий $c = 2$, среднее значение требований $\mu = 1.1$, интенсивность прихода требований $\alpha = 1.5$. Тогда страховая нагрузка $\rho = c/\alpha\mu - 1 = 0.2121$, а максимально возможные дивиденды (в процентах к премиям) равны $(1 - \alpha\mu/c) = 17.5\,\%$.

Оценка стратегий управления осуществлялась путем моделирования $N = 20000$ ($N = 50000$ для $\varepsilon \le 0.05$) траекторий (23) до достижения момента времени $t_{\max} = 1000$ или до достижения максимального потолка капитала $\xi_{\max} = 5000$, или до момента t_{ruin} разорения такого, что $\xi_{t_{\text{ruin}}} < 0$. Расчеты проводились для различных значений параметра надежности $0.01 \le \varepsilon \le 1$. При этом подсчитывались доля разорившихся траекторий p^i_{ruin} и собранные дивиденды $\Pi^i(t_{\max})$ (30) на неразорившихся траекториях, нормированные на общий объем собранных премий $ct_{\max}$. Результаты расчетов приведены в табл. 5. Они показывают, что вторая стратегия

Т а б л и ц а 5

ε	$u^*(\varepsilon)$	p^1_{ruin}	p^2_{ruin}	p^3_{ruin}	$\frac{\Pi^1}{c}\cdot 100\,\%$	$\frac{\Pi^2}{c}\cdot 100\,\%$	$\frac{\Pi^3}{c}\cdot 100\,\%$
1.00	0.0000	0.8731	0.1943	0.1717	17.50	16.91	16.88
0.90	0.6623	0.8156	0.1658	0.1535	17.18	16.70	16.81
0.70	2.2420	0.6663	0.1025	0.1133	16.41	16.12	16.67
0.50	4.3569	0.4858	0.0598	0.0693	15.35	15.19	16.48
0.30	7.5678	0.2926	0.0329	0.0429	13.69	13.61	16.23
0.10	14.4734	0.0937	0.0168	0.0175	9.89	9.86	15.80
0.09	15.1357	0.0821	0.0163	0.0150	9.51	9.49	15.77
0.05	18.8303	0.0457	0.0127	0.0105	7.32	7.30	15.58

значительно превосходит первую по вероятности разорения, а третья не уступает второй по вероятности разорения, но значительно превосходит ее по собранным дивидендам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настояще работе рассмотрен подход к приближенной оптимизации страхового бизнеса, заключающийся в оптимизации дивидендов (чистой прибыли) при ограничении на вероятность разорения, причем вместо точного значения вероятности используется ее экспоненциальная оценка сверху. В качестве переменных оптимизации могут выступать разнообразные параметры страховой деятельности: состав портфеля страховых договоров, страховые тарифы, виды и уровни перестрахования, инвестиции в рекламу и др. В данной постановке оказывается, что ограничение, отвечающее за вероятность разорения, выполняется как равенство. Это позволяет вычислить в явном виде константу Лундберга, исключить сложное вероятностное ограничение из постановки задачи, декомпозировать задачу и во многих случаях получить аналитические приближенные решения. Таким способом приближенно решены задачи оптимизации портфеля страховых договоров, страховых тарифов, договоров перестрахования. Для задачи оптимального управления дивидендной политикой страховой компании предложено использовать оптимальное квазистационарное управление, которое в каждый момент времени равно оптимальному для текущего состояния стационарному управлению с учетом ограничения на вероятность разорения. Смысл этого управления состоит в том, что при небольших значениях страхового резерва дивиденды не брать, а при больших резервах брать максимально допустимые. Все теоретические результаты проиллюстрированы численными расчетами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Beard R.E., Pentikäinen T., Pesonen E. Risk theory. The stochastic basis of insurance. 3-rd edition. — London; New York: Chapman and Hall, 1984. — 408 p.
2. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика. — М.: Янус-К, 2001. — 656 с.
3. Глухова Е.В., Змеев О.А., Лившиц К.И. Математические модели страхования. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2004. — 178 с.
4. Ястремський О.І., Гриценко О.Г. Основи мікроекономіки: 2-ге вид., переробл. і доповн. — Київ: Знання-Прес, 2007. — 580 с.
5. Змеев О.А. Исследование математических моделей процессов страхования при нестационарных потоках страховых рисков: Автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2005. — 34 с.
6. Наконечный А.Н. Оптимизация процессов риска // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 5. — С. 42–48.
7. Cízek P., Härdle W., Weron R. (Eds.) Statistical tools for finance and insurance. — N.Y.: Springer, 2005. — 517 p.
8. Assmussen S. Ruin probabilities. — Singapur: World Scientific. — 385 p.
9. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко Я.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. — Київ: Інформтехніка, 1995. — 380 с.
10. Любченко Г.И., Наконечный А.Н. Методы оптимизации сложных пуассоновских процессов риска // Кибернетика и системный анализ. — 1998. — № 2. — С. 87–96.
11. Норкин Б.В. Метод последовательных приближений для решения интегральных уравнений теории процессов риска // Там же. — 2004. — № 4. — С. 61–73.
12. Норкин Б.В. Необходимые и достаточные условия существования и единственности решений интегральных уравнений страховой математики // Там же. — 2006. — № 5. — С. 157–164.
13. Норкин Б.В. О решении основного интегрального уравнения актуарной математики методом последовательных приближений // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 12. — С. 112–127.
14. Норкин Б.В. Стохастический метод последовательных приближений для оценки риска неплатежеспособности страховой компании // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 6. — С. 116–130.
15. Gerber H.U. An introduction to mathematical risk theory. — Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, 1979. — 164 p.

Поступила 02.07.2009