

## НОВЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПРОГНОЗОВ НА ОСНОВЕ ПРОЦЕДУРЫ БУТСТРАП И ЕГО ТЕСТИРОВАНИЕ НА ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ

**Ключевые слова:** оценка точности прогнозов, неточная оценка параметров, бутстрап.

### ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач математического моделирования является выбор наилучшей модели, описывающей наблюдаемые данные. При выборе модели принято руководствоваться как качественными, так и количественными факторами. Рассматриваемая модель должна отражать качественные характеристики, которыми обладают данные, т.е. описывать наблюдаемую стационарность или нестационарность данных, структурные сдвиги во времени или пространстве и т.д. Однако помимо качественных характеристик, важными при выборе адекватной модели являются количественные характеристики, определяющие, насколько точно модель описывает данные. Возникает задача оценки качества прогнозов рассматриваемой модели. Если модель является сложной, но не предоставляет выигрыша в точности предсказания наблюдаемых данных, то целесообразно переходить к рассмотрению более простой модели с такой же точностью прогноза. В настоящей статье рассматривается модификация стандартного метода оценки качества прогнозов.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется выборка из наблюдаемых данных  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_T, y_T$  и исследуется качество прогнозов модели

$$y = f(x, \theta) + e_t,$$

где  $x$  — регрессоры,  $\theta$  — вектор неизвестных параметров,  $e_t$  — ошибки модели. Оценкой качества прогноза служит величина  $Eh(y - f(x, \theta))$ . Наиболее широко применяется функция качества прогноза  $h(x) = x^2$ , когда оценивается ожидаемый квадрат ошибки прогноза. Существуют два подхода к вычислению величины  $Eh(y - f(x, \theta))$ .

При первом подходе происходит оценка теоретического математического ожидания выборочным математическим ожиданием с подстановкой вместо  $\theta$  оценки  $\hat{\theta}$ , полученной по всей выборке

$$Eh(y - f(x, \theta)) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T h(y_t - f(x_t, \hat{\theta})).$$

По сути, происходит оценка ошибки прогноза посредством оценки ошибки оценивания. Данный метод занижает истинные ошибки прогноза, поскольку он использует будущую информацию, рассчитывая величину  $\hat{\theta}$  сразу по всем наблюдениям в выборке. Поэтому (особенно если размерность вектора  $\theta$  велика) происходит подгонка модели под данные (феномен носит название model

overfitting в западной литературе и подробно описан в [1]).

Во втором подходе происходит усреднение по ошибкам прогнозирования, когда прогноз в каждый момент  $t$  строится только по данным, доступным этому моменту, а именно по выборке  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{t-1}, y_{t-1}, x_t$ . Данные ошибки соответствуют реальной задаче прогнозирования, когда будущая информация неизвестна, а потому лучше отражают истинные ошибки прогноза. Обозначим  $\hat{\theta}_t$

оценку неизвестного параметра  $\theta$  по первым  $t-1$  наблюдениям  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{t-1}, y_{t-1}$ . Тогда оценка качества прогноза, использующая второй подход, имеет вид

$$Eh(y - f(x, \theta)) \Leftrightarrow \frac{1}{P} \sum_{t=R}^T h(y_t - f(x_t, \hat{\theta}_t)), \quad P = T - R + 1. \quad (1)$$

Здесь усреднение по ошибкам прогноза происходит, начиная с момента  $R$ , который является параметром данного метода [10]. Оценка  $\hat{\theta}_t$  может быть получена с использованием следующих наблюдений:

- 1)  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{t-1}, y_{t-1}$  (расширяющееся окно наблюдений);
- 2)  $x_{t-K}, y_{t-K}, x_{t-K+1}, y_{t-K+1}, \dots, x_{t-2}, y_{t-2}, x_{t-1}, y_{t-1}$  (перемещающееся окно наблюдений длины  $K$ );
- 3)  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_K, y_K$  ( $K \leq t-1$ ) (фиксированное окно наблюдений длины  $K$ ).

Обзор данных методов оценки параметров можно найти, например, в [2]. Наиболее предпочтительным обычно является метод, использующий расширяющееся окно наблюдений, поскольку там задействована вся доступная информация для построения оценки  $\hat{\theta}_t$ . Оценка качества прогнозов вида (1) является общераспространенной, такой подход предлагается, например, в [1, 3, 4].

Следует заметить, что при использовании метода расширяющегося окна для оценки  $\hat{\theta}_t$  ошибки прогноза являются неравнозначными между собой. Более ранние ошибки прогноза меньше соответствуют искомой величине  $Eh(y - f(x, \theta))$ , поскольку в них неизвестный параметр  $\theta$  оценивается по небольшому числу наблюдений. Более поздние ошибки прогноза, наоборот, больше соответствуют теоретической оценке качества прогноза  $Eh(y - f(x, \theta))$ , поскольку  $\theta$  оценивается более точно по большому числу наблюдений. Данная проблема неравнозначности ошибок прогноза была впервые подробно исследована в работах [2, 5], в которых выводится асимптотическое распределение оценки качества прогноза, полученное с помощью приближения (1), когда неизвестный параметр  $\theta$  оценивается, используя расширяющееся, бегущее и фиксированное окно наблюдений. В связи с неравнозначностью наблюдений исследователь вынужден либо выбирать небольшое значение  $R$  и игнорировать высокое смещение при оценке качества прогноза, вызванного неточностью оцениваемых параметров, либо выбирать достаточно большое значение  $R$ , при котором, начиная с момента  $t \geq R$ , оценка  $\hat{\theta}_t$  достаточно точно приближает истинное значение  $\theta$ . В этом случае оценка качества прогноза будет иметь небольшое смещение, но более высокую дисперсию, вызванную уменьшенным количеством наблюдений  $P$ , по которым происходит усреднение в формуле (1).

В настоящей статье предлагается новый метод оценки качества прогнозов, учитывающий неравнозначность получаемых ошибок прогнозов. В этом методе искомое математическое ожидание величины  $Eh(y - f(x, \theta))$  оценивается не равномерной, как в (1), а взвешенной суммой ошибок прогнозов. Здесь также фор-

мализуется условие на оптимальные веса и предлагается численная процедура для нахождения весовых коэффициентов. В разд. 3.1 и 3.2 предложенный метод сравнивается со стандартным методом на примере двух временных рядов, описывающих реальные экономические процессы.

Ввиду неравнозначности ошибок прогноза для разных моментов времени оценкой качества прогнозов предлагается считать взвешенное среднее по ошибкам прогноза, где сумма весов равна единице:

$$Eh(y-f(x, \theta)) \Leftrightarrow \sum_{t=R}^T w_t h(y_t - f(x_t, \hat{\theta}_t)), \quad P = T - R + 1, \quad \sum_{t=R}^T w_t = 1.$$

Оптимальные весовые коэффициенты  $w_R, w_{R+1}, \dots, w_T$  выбираются, исходя из условия минимизации квадрата отклонения оценки от истинного значения качества прогноза

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \left( \sum_{t=R}^T w_t h(y_t - f(x_t, \hat{\theta}_t)) - Eh(y-f(x, \theta)) \right)^2 \rightarrow \min, \\ \sum_{t=R}^T w_t = 1. \end{array} \right.$$

Данная задача решается минимизацией лагранжиана:

$$\mathbf{E} \left( \sum_{t=R}^T w_t h(y_t - f(x_t, \hat{\theta}_t)) - Eh(y-f(x, \theta)) \right)^2 - 2\lambda \left( \sum_{t=R}^T w_t - 1 \right) \rightarrow \min.$$

Исходя из условия первого порядка, имеем систему из  $k$  уравнений

$$\left( \frac{\partial}{\partial w_k} \right) : \mathbf{E} \left\{ \left( \sum_{t=R}^T w_t h(y_t - f(x_t, \hat{\theta}_t)) - Eh(y-f(x, \theta)) \right) h(y_k - f(x_k, \hat{\theta}_t)) \right\} = \lambda,$$

что можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathbf{E} \left\{ \left( \sum_{t=R}^T w_t h(y_t - f(x_t, \hat{\theta}_t)) - Eh(y-f(x, \theta)) \right) h(y_k - f(x_k, \hat{\theta}_t)) \right\} = \lambda.$$

Рассматривая матрицу  $A$  с элементами

$$a_{ij} = \mathbf{E} \{ h(y_i - f(x_i, \hat{\theta}_i)) (h(y_j - f(x_j, \hat{\theta}_j)) - Eh(y-f(x, \theta))) \},$$

задачу нахождения неизвестных весов  $\mathbf{w} = (w_R, \dots, w_T)$  можно переписать в виде

$$\left. \begin{array}{l} A\mathbf{w} = \lambda \mathbf{e} \\ \mathbf{e}'\mathbf{w} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \mathbf{e}'A^{-1}\mathbf{e} = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mathbf{e}'A^{-1}\mathbf{e}}$$

$$\mathbf{w} = \lambda A^{-1}\mathbf{e} = \frac{A^{-1}\mathbf{e}}{\mathbf{e}'A^{-1}\mathbf{e}},$$

$$w_k = \frac{\sum_{j=R}^T b_{kj}}{\sum_{i=R}^T \sum_{j=R}^T b_{ij}} = \frac{\sum_{j=R}^T A_{kj}}{\sum_{i=R}^T \sum_{j=R}^T A_{ij}}, \quad k = R, \dots, T, \quad (2)$$

где  $b_{ij}$  — элементы обратной матрицы  $B = A^{-1}$ , а  $A_{ij}$  — алгебраические до-

полнения матрицы  $A$ . Расчет элементов матрицы  $A$  предполагает расчет математических ожиданий некоторых статистик. Если известен истинный процесс, генерирующий данные, матрицу  $A$  и оптимальные веса можно найти непосредственно по формуле (2). Поскольку при практическом использовании истинный процесс, генерирующий данные, неизвестен, то в приложениях предлагается использовать процедуру бутстрапа [6–9]. Далее будет приведено краткое описание методов бутстрапа, применяемых в настоящей.

#### МЕТОДЫ БУТСТРАПА, ИСПОЛЪЗУЕМЫЕ В СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЯХ

Идея бутстрапа заключается в приближении точного процесса, генерирующего данные, посредством его выборочного аналога. В рассматриваемом случае бутстрап будет применяться для генерации различных вариантов исходной выборки. Поскольку генерируемые варианты выборки основываются на данных исходной выборки и не полностью отражают их истинное распределение, то сгенерированные варианты выборки будут в дальнейшем называться бутстраповскими псевдовыборками или просто псевдовыборками. В простейшем случае, когда наблюдения  $x_1, x_2, \dots, x_T$  в исходной выборке независимы, процедура бутстрапа генерации новых псевдовыборок состоит в последовательной случайной выборке с возвращением наблюдений из первоначальной выборки. Таким образом, можно построить новые псевдовыборки  $y_1, y_2, \dots, y_T; z_1, z_2, \dots, z_T; \dots$ , где каждый элемент был выбран случайно с возвращением из множества  $x_1, x_2, \dots, x_T$ . В случае временного ряда, когда наблюдения являются зависимыми, данный метод неприменим, поскольку в сгенерированных им псевдовыборках будет отсутствовать зависимость между наблюдениями. Для временного ряда зависимых наблюдений в настоящей статье будут применяться следующие модификации процедуры бутстрапа: бутстрап с блоками случайной длины, параметрический бутстрап, бутстрап Холецкого и бутстрап марковской цепи. Далее будет описана идея и реализация каждого метода.

**Метод 1. Бутстрап с блоками случайной длины.** Первое наблюдение в данном методе выбирается случайно из совокупности всех наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_T$  исходной выборки. Далее с некоторой фиксированной вероятностью  $p$  следующее наблюдение псевдовыборки берется таким же, как следующее наблюдение исходной выборки, а с вероятностью  $1 - p$  последовательное копирование наблюдений прекращается, и следующее наблюдение псевдовыборки снова выбирается случайно.

**Метод 2. Параметрический бутстрап.** Параметрический бутстрап на первом шаге накладывает некоторую параметрическую модель на исходную выборку, а затем производит псевдовыборки из найденной модели, генерируя остатки моделирования (которые предполагаются уже независимыми), используя простейший бутстрап для независимых наблюдений (случайная выборка с возвращением из наблюдений). В статье применяется следующий алгоритм.

1. Рассматривая всевозможные AR ( $p$ )-модели вплоть до шестого порядка, выбирается модель, наиболее точно описывающая исходную выборку  $(x_1, \dots, x_T)$  согласно байесовскому информационному критерию<sup>1</sup>. Найденную

<sup>1</sup> Для ARMA( $p, q$ )-процесса байесовский информационный критерий равен  $BIC = T \ln \hat{\sigma}^2 + k \ln T$ , где  $\hat{\sigma}^2 = 1/n \cdot \sum_{t=1}^T \hat{e}_t^2$  — среднее значение квадратов ошибок оценивания ARMA-модели,  $k$  — число параметров модели,  $T$  — длина выборки.

модель можно записать в виде  $\hat{A}(L) y_t = \hat{e}_t$ , где  $\hat{A}(L)$  — лагирующий полином.

2. Генерируются бутстраповские остатки  $e_1^*, e_2^*, \dots, e_{T+100}^*$  за счет случайной выборки с возвращением из остатков  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_T$  модели  $\hat{e}_t = \hat{A}(L) y_t$ .

3. Первые шесть наблюдений бутстраповской псевдовыборки полагаются равными нулю  $y_t^* = \dots = y_6^* = 0$ . Для стационарного и эргодического процесса начальные данные оказывают существенное влияние лишь на соседние наблюдения. На более удаленные наблюдения выбор начальных данных влияет незначительно.

4. С учетом нулевых начальных условий псевдовыборка продолжает генерировать, используя AR-модель, найденную на первом шаге:  $\hat{A}(L) y_t^* = e_t^*$ . Получается псевдовыборка длины  $T + 100$ . Окончательная псевдовыборка будет содержать последние  $T$  наблюдений из сгенерированной псевдовыборки. Первые 100 сгенерированных наблюдений не учитываются, поскольку они еще могут содержать информацию о нулевых начальных данных.

**Метод 3. Бутстрап Холецкого.** Данный вид бутстрапа применим к процессам, допускающим  $M A(\infty)$ -разложение со стационарными вторыми моментами. При условии нулевого среднего (как в рассматриваемых ниже случаях) выборки данных процессов имеют распределение  $X = (x_1, x_2, \dots, x_T)' \sim F(\mathbf{0}, \Sigma)$ . Дисперсионная матрица  $\Sigma$ , будучи симметричной и в случае положительной определенности, допускает разложение Холецкого  $PP' = \Sigma$ , где  $P = \Sigma^{1/2}$  — нижнетреугольная матрица. Тогда выборка представима в виде

$$X = Pe, \text{ где } e \sim G(\mathbf{0}, I), \text{ } I \text{ — единичная матрица.}$$

В случае практического применения для заданной выборки автоковариации более высокого порядка оцениваются по меньшему числу наблюдений. В связи с этим для состоятельного оценивания  $P$  количество оцениваемых автоковариаций должно увеличиваться, но медленнее, чем размер выборки. В реализованном алгоритме автоковариации более высоких порядков учитываются с некоторым понижающим коэффициентом.

В статье реализован следующий алгоритм бутстрапа Холецкого.

1. Находится автоковариационная матрица  $\hat{\Sigma}$ .

2. Строится разложение Холецкого  $\hat{P}\hat{P}' = \hat{\Sigma}$ , где  $\hat{P}$  — нижнетреугольная матрица.

3. Находятся остатки разложения  $\hat{e} = \hat{P}^{-1}X$ , которые затем масштабируются таким образом, чтобы иметь единичную дисперсию.

4. Строится бутстраповская псевдовыборка остатков  $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_T^*)$ , где  $e_i^*$ ,  $i = 1, \dots, T$ , является случайным выбором с возвращением из  $\hat{e} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_T)$ .

5. По бутстраповской псевдовыборке остатков  $e^*$  строится бутстраповская псевдовыборка исходных данных  $X^* = \hat{P}e^*$ .

Полученные таким образом псевдовыборки будут сохранять структуру вторых моментов исходной выборки.

**Метод 4. Бутстрап марковской цепи.** Данный метод применяется при предположении, что временной ряд хорошо описывается авторегрессионным уравнением (не обязательно линейным). В статье реализован вариант данного метода для авторегрессии первого порядка<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Подробное описание данного метода в общем случае дано в работе [9].

При построении бутстраповской псевдовыборки производится следующая последовательность действий.

1. Выполняется разбиение множества принимаемых значений зависимой переменной  $x$  на непересекающиеся подмножества  $X_1, \dots, X_n$ . В рассматриваемой задаче вещественная ось разбивалась на отрезки и лучи точками  $\{-9, -5, -3, -1.5, 0, 1.5, 3, 5, 9\}$ .

2. По наблюдаемой выборке  $x_1, x_2, \dots, x_T$  строятся вероятности перехода из одного множества в другое

$$p_{ij} = P\{x_{t+1} \in X_j | x_t \in X_i\} = \frac{P\{x_{t+1} \in X_j, x_t \in X_i\}}{P\{x_t \in X_i\}},$$

которые приближаются значениями

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} I\{x_{t+1} \in X_j\} I\{x_t \in X_i\}}{\sum_{t=1}^{T-1} I\{x_t \in X_i\}},$$

где  $I\{\cdot\}$  — индикаторная функция.

3. Первый элемент  $x_1^*$  псевдовыборки выбирается случайным образом из  $x_1, x_2, \dots, x_T$ .

4. Для текущего элемента  $x_t^*$  псевдовыборки определяется множество  $X_k$  такое, что  $x_t \in X_k$ .

5. Для найденного  $X_k$  случайным образом с вероятностями  $\hat{p}_{k1}, \hat{p}_{k2}, \dots, \hat{p}_{kn}$  определяется следующее множество  $X_s$ , которому будет принадлежать  $x_{t+1}$ .

6. Элемент  $x_{t+1}$  выбирается случайным образом из всех  $\{x_i, i=1, \dots, T | x_i \in X_s\}$ . Далее  $x_{t+1}$  полагается текущим и  $t=t+1$ .

7. Шаги 4–6 повторяются необходимое число раз.

Параметрический бутстрап накладывает на данные структуру линейной авторегрессии, в то время как остальные методы бутстрапа подобных предположений не делают и применимы к более широкому классу стационарных временных рядов. Однако метод бутстрапа с блоками случайной длины требует определения вероятности окончания блока и начала следующего блока. Бутстрап Холецкого и параметрический бутстрап не зависят от внешних параметров. Для бутстрапа с блоками случайной длины применяется метод поиска оптимального параметра.

Изложим методику определения оптимальных параметров бутстрапа.

1. С учетом всевозможных моделей авторегрессии вплоть до шестого порядка находится наиболее подходящая модель  $A(L)y_t = e_t$  по байесовскому информационному критерию, которая наилучше описывает имеющуюся выборку  $X = (x_1, \dots, x_T)$ .

2. С помощью найденной модели генерируется 300 выборок  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{300}$ . Из каждой сгенерированной выборки  $Y_i, i=1, \dots, 300$ , генерируется 500 бутстраповских псевдовыборок при  $p \in \{0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.92, 0.94, 0.96, 0.97, 0.975\}$  с использованием бутстрапа со случайной длиной блоков.

3. Для каждой сгенерированной выборки  $Y_i, i=1, \dots, 300$ , и каждого значения  $p$  с использованием сгенерированных 500 бутстраповских псевдовыборок оцениваются 90% доверительных интервалов для функции реакции на импульсы  $f(t)$  (impulse response function) при  $t=1, 2, \dots, 12$ . Получаем 12 доверительных

интервалов  $[f_{i,1}^p, F_{i,1}^p], \dots, [f_{i,12}^p, F_{i,12}^p]$ .

4. С использованием процесса  $A(L) y_t = e_t$ , сгенерировавшего данные, вычисляется истинная функция реакции на импульсы  $f(t)$ .

5. Для каждого значения  $t = 1, \dots, 12$  и  $p$  вычисляется доля случаев, когда истинное значение функции оказалось в соответствующем доверительном интервале  $C(t, p) = \# \{i: 1 \leq i \leq 300, f(t) \in [f_{i,t}^p, F_{i,t}^p]\} / 300$ .

6. Для каждого значения внешнего параметра  $p$  вычисляется критерий качества оценки функции реакции на импульсы  $D(p) = \sum_{t=1}^{12} (C(t, p) - 0.9)^2$ .

7. Выбирается то значение параметра  $p$ , которое обеспечивает минимальное значение критерия  $D(p)$ .

### 3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИСПЫТАНИЯ НА ВРЕМЕННЫХ РЯДАХ

В двух приведенных ниже статистических экспериментах сопоставляются различные оценки ожидаемых квадратов ошибок прогноза. В начале каждого примера рассматривается некоторая достаточно длинная выборка, на основе которой подбирается ARMA-модель, которая считается истинной для рассматриваемого процесса. На основе найденной модели генерируются выборки из 40 наблюдений. По каждой из них подбирается описывающая данную выборку AR-модель, которая минимизирует байесовский информационный критерий. Находится теоретическое значение ожидаемого квадрата ошибки прогноза истинного процесса за счет приближения авторегрессии к истинному процессу. Далее это значение сопоставляется со средними по всем выборкам оценками ожидаемого квадрата ошибки прогноза, посчитанными различными методами отдельно для каждой выборки.

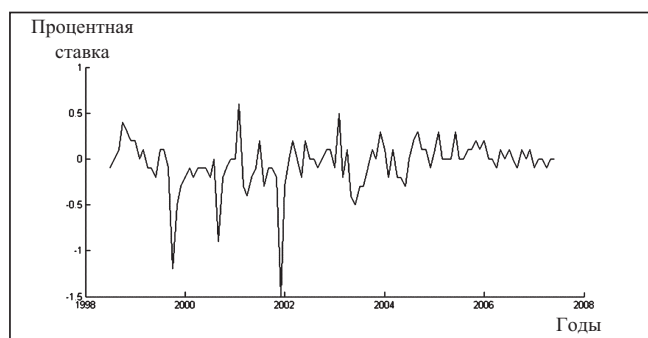


Рис. 1. График изменения средней за месяц ставки по кредитам в Перу

Данные выбраны таким образом, чтобы отвергалась гипотеза о нормальном распределении остатков оценивания. В случае нормального распределения ошибок оценки статистические испытания свидетельствуют о незначительной разнице между предлагаемыми и стандартными методами.

3.1. Ставка по кредитам в Перу. Рассматривается выборка изменений средних за месяц процентных ставок по кредитам (в иностранной валюте) в Перу<sup>3</sup>. Выборка охватывает период с июля 1998 года по июнь 2007 года и содержит 108 наблюдений. На рис. 1 представлен график изменения процентной ставки. В соответствии с байесовским информационным критерием наилучшей линейной моделью, описывающей данные, оказалась

$$y_t = 0.321y_{t-1} + e_t, \quad (3)$$

<sup>3</sup> Данные взяты с сайта Центрального банка Перу <http://www.bcrp.gob.pe/bcr/ingles/>



где  $e_t$  — независимые ошибки при  $\sigma_e = 0.263$ . Поскольку тест Жарке-Берра отвергает гипотезу о нормальном распределении ошибок, ошибки данной модели будут генерироваться из распределения, полученного в результате ядерного сглаживания выборочной плотности. В качестве ядерной функции использовалось нормальное распределение. В результате была получена функция плотности ошибок, где прослеживается вероятность больших скачков ошибки в отрицательной области. Данные скачки передаются в регрессор  $y_{t-1}$ , что делает неточность в оценке регрессионного параметра существенным фактором при прогнозировании  $y_t$ . В статистических испытаниях полагались  $T = 40, R = 10$  и рассчитывался квадрат ожидаемой ошибки прогноза, используя равные веса, истинные веса и веса, рассчитанные методами 1–4.

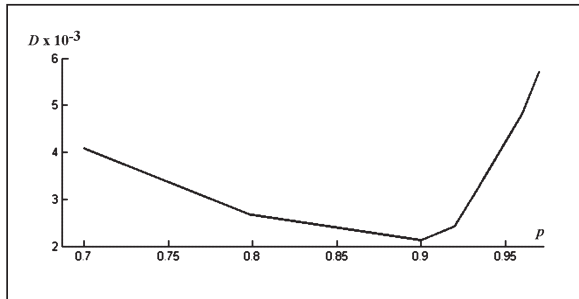


Рис. 2. График критерия качества  $D(p)$  для бутстрапа с блоками случайной длины

В статистических испытаниях расчет истинных весов проводился усреднением по 5000000 истинных выборок, расчет бутстраповских весов проводился усреднением по 3000 псевдобыборок для каждого бутстраповского метода и для каждой из 250 выборок, сгенерированных процессом (3). Алгоритм нахождения оптимального параметра для бутстрапа с блоками случайной длины определил критерий точности  $D(p)$ , изображенный на рис. 2. Далее метод 1 применялся с оптимальным значением параметра  $p = 0.9$ .

Как видим из рис. 3, весовые коэффициенты, посчитанные различными методами бутстрапа, мало отличаются между собой, и диапазон их изменения заметно ниже, чем диапазон изменения истинных весов. Это вызвано тем, что примененные процедуры бутстрапа не могут полностью оценить всю функцию распределения ошибок по конечной выборке.

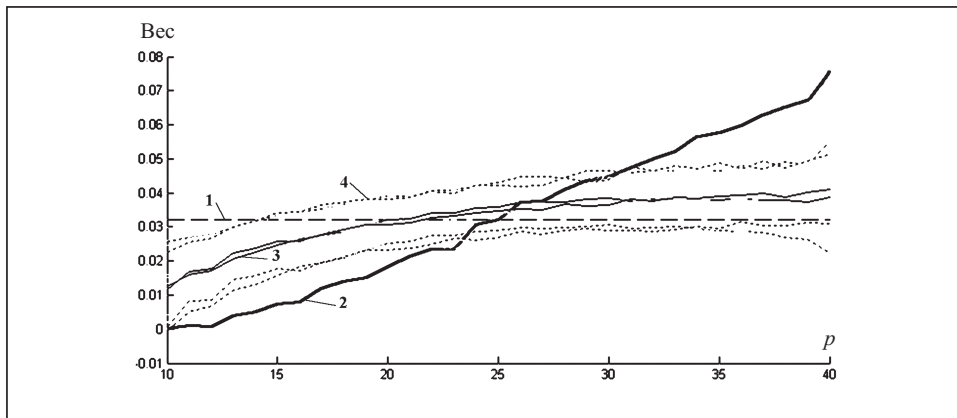


Рис. 3. График весовых коэффициентов (ставки по кредитам в Перу): 1 — равные веса; 2 — истинные веса; 3 — расчетные веса; 4 — расчетные веса  $\pm$  стандартные отклонения

В табл. 1 приведены средние значения оценок ожидаемого квадрата ошибки прогноза, определенные различными методами, а также средние значения квадратов отклонений оценки от ожидаемого квадрата ошибки прогноза, который в данном примере равен 0.129 (MSPE). Из таблицы видно, что оценки точности



**Таблица 1.** Изменение квадрата ошибки прогноза при  $T = 40$ ;  $R = 10$ ;  $\sigma_e^2 = 0,697$

Название метода	Среднее значение оценок	MSPE
Равномерное взвешивание	0.202	0.185
Истинное взвешивание	0.157	0.182
Взвешивание (метод 1)	0.181	0.047
Взвешивание (метод 2)	0.182	0.060
Взвешивание (метод 3)	0.185	0.167
Взвешивание (метод 4)	0.185	0.058

прогноза с изменяющимися весами более заметно отличаются от оценки с равными весами и лежат ближе к теоретическому значению. Ожидаемые квадраты отклонения от  $\sigma_e^2$  для взвешивающих методов также ниже, чем в случае усреднения с равными весами. Таким образом, взвешивание квадратов ошибок прогноза позволяет учесть неточность оценки регрессионных

параметров и дает адаптированную к этой неточности оценку качества прогноза. Наибольшее улучшение оценки достигается с использованием истинных весов. Расчетные веса, полученные с помощью процедуры бутстрапа, являются сильно смещенными по отношению к истинным, что отражается на качестве оценивания.

**3.2. Доля кредитов финансовых организаций в ВВП Бразилии.** Рассмотрим выборку изменений отношения кредитов финансовых организаций к ВВП Бразилии<sup>4</sup>. Выборка охватывает период с июля 1988 года по июль 2007 года и содержит 229 наблюдений (рис. 4). Как и в случае процентных ставок в Перу, рассматриваемая величина подвержена резким изменениям.

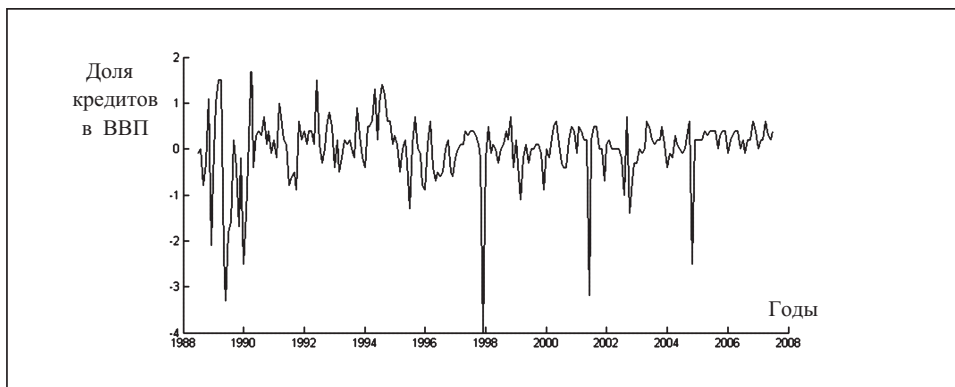


Рис. 4. График изменения отношения кредитов к ВВП Бразилии

В соответствии с байесовским информационным критерием наилучшей линейной моделью, описывающей рассматриваемые данные, является

$$y_t = 0.262 * y_{t-1} + e_t + 0.138e_{t-5}. \quad (4)$$

Поскольку тест Жарке-Берра отвергает гипотезу о нормальном распределении ошибок модели, ошибки процесса (4) в дальнейшем будут генерироваться в соответствии со сглаженной выборочной плотностью ошибок (применялось ядерное сглаживание с нормальной плотностью в качестве ядерной функции). Данное распределение позволяет получить резкие скачки в величине ошибок. Большие по величине ошибки, переходя в регрессоры модели, существенно повышают воздействие неточно оцененных параметров регрессии на точность прогноза.

Применение алгоритма подбора оптимального параметра для бутстрапа со случайной длиной блока дает функцию оценки точности  $D(p)$ , изображенную на рис. 5. Следовательно,  $p = 0.8$  обеспечивает наибольшую точность метода 1 и будет

использоваться в дальнейшем.

Статистические испытания для изменений доли кредитов в ВВП Бразилии по своей структуре и параметрам полностью повторяют статистические испытания для изменения процентной ставки в Перу. Усредненные весовые коэффициенты, посчитанные разными методами, приведены на рис. 6. Здесь имеет место отклонение истинных весовых коэффициентов от расчетных, поскольку рассмотренные методы бутстрапа не могут полностью воспроизвести нестандартное распределение рассматриваемого процесса по конечной выборке. В свою очередь, разница между расчетными весами, посчитанными различными методами бутстрапа, несущественна.

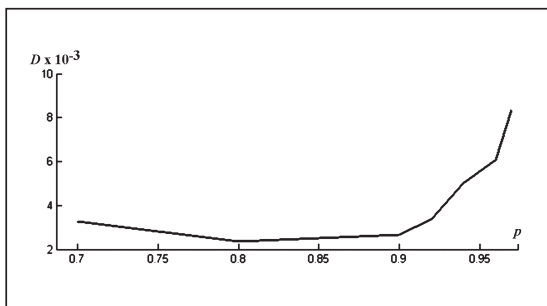


Рис. 5. График критерия качества  $D(p)$  для бутстрапа с блоками случайной длины

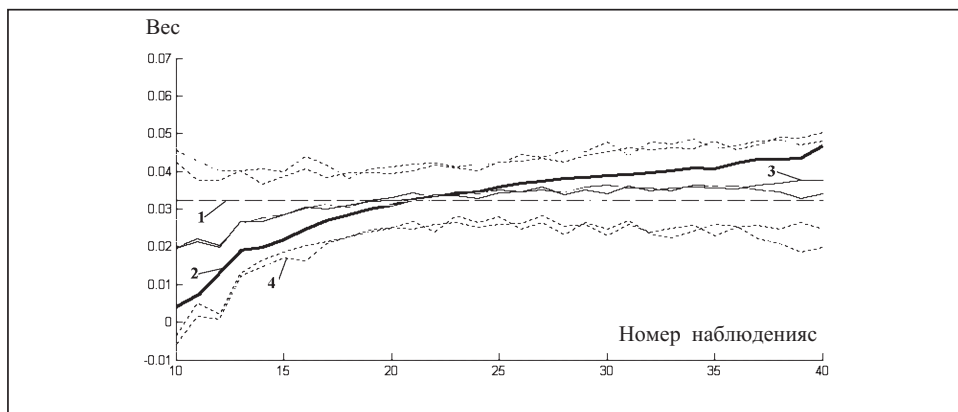


Рис. 6. График весовых коэффициентов (доля кредитов финансовых организаций в ВВП в Бразилии): 1 — равные веса; 2 — истинные веса; 3 — расчетные веса; 4 — расчетные веса  $\pm$  стандартные отклонения

В табл. 2 представлены средние значения оценок различными методами ожидаемого квадрата ошибок прогноза, а также средние значения квадратов отклонений оценки от ожидаемого квадрата ошибки прогноза, который в данном примере равен 0.543 (MSPE). Как и для случая процентных ставок в Перу, взвешивание с разными весами делает оценку квадрата ошибки прогноза ближе к теоретическому значению, а ожидаемый квадрат отклонения оценки от истинного значения данного метода незначительно ниже, чем для взвешивания с равными весами. Наименьшее среднее смещение оценки достигается при взвешивании с истинными весами.

Таблица 2. Изменение квадрата ошибки прогноза при  $T = 40$ ;  $R = 10$ ;  $\sigma_e^2 = 0,498$

Название метода	Среднее значение оценок	MSPE
Равномерное взвешивание	0.651	0.127
Истинное взвешивание	0.635	0.100
Взвешивание (метод 1)	0.651	0.122
Взвешивание (метод 2)	0.649	0.115
Взвешивание (метод 3)	0.643	0.105
Взвешивание (метод 4)	0.642	0.119

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследовалась задача оценки качества прогнозов, которая состояла в оценке математического ожидания некоторой функции от ошибки прогнозирования модели. Стандартная схема с расширяющимся окном, при которой искомое математическое ожидание оценивается выборочным средним от оцененных ошибок прогноза, сделанного по всем предыдущим наблюдениям, является неоптимальной, так как более ранние прогнозы составляются на основе меньшего числа наблюдений и являются менее точными. Исходя из этого, был предложен новый метод оценки качества прогноза, когда ошибка прогноза на каждом шаге учитывается некоторым весовым коэффициентом. Была получена система линейных уравнений, определяющая оптимальные веса. Для оценки коэффициентов системы предложены различные методы бутстрапа. Были проведены статистические испытания на двух временных рядах, в процессе которых выяснилось, что метод в среднем дает более близкие значения оценки качества прогноза к теоретическому значению, а также обеспечивает меньший ожидаемый квадрат отклонения оценки от теоретического значения оцениваемого параметра по сравнению со стандартным методом, что позволяет получить более точную оценку искомой величины. Наибольшая точность применения метода достигается при использовании истинных весовых коэффициентов. Выигрыш в точности от применения предлагаемого метода при использовании весов, рассчитанных методами бутстрапа, также имеет место, но он заметно ниже, чем при использовании истинных весовых коэффициентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Friedman J., Hastie T., Tibshirani R. The elements of statistical learning. — New York: Springer, 2001. — 533 p.
2. West K. D., McCracken M. V. Regression-based tests of predictive ability // Intern. Econ. Rev. — 1998. — **39**, N 4. — P. 817–840 (<http://www.nber.org/papers/t0226>).
3. Clements M. P. Evaluating econometric forecasts of economic and financial variables. — Palgrave Macmillan, 2005. — 256 p.
4. Franses P. H., Dijk V. D. Nonlinear time series models in empirical finance. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. — 280 p.
5. West K. D. Asymptotic inference about predictive ability // Econometrica. — 1996. — **64**, N 5. — P. 1067–1084.
6. Анатолийев С. А. Эконометрика для продолжающих. — М.: Рос. экон. школа, 2002.
7. Berkowitz J., Kilian L. Recent developments in bootstrapping time series // Econometric Reviews, Taylor and Francis J. — 2000. — **19**, N 1. — P. 1–48.
8. Berkowitz J., Birgean I., Kilian L. On the finite-sample accuracy of nonparametric resampling algorithms for economic time series // Finance and Economics Discussion Series, Board of Governors of the Federal Reserve System (U.S.). — 1999. — **1999–04**.
9. Anatolyev S., Vasnev A. Markov chain approximation in bootstrapping autoregressions // Economics Bulletin. — 1999. — **3**, N 19. — P. 1–8.
10. Ивахненко А. Г. Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. — К.: Техника, 1971. — 364 с.

*Поступила 22.09.2007*