УДК 517.954:532.546

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ С УЧЕТОМ СОЛЕПЕРЕНОСА В РАМКАХ СИСТЕМЫ С ДВОЙНОЙ РЕЛАКСАЦИЕЙ

Ключевые слова: *математическое моделирование, фильтрационная консолидация, массоперенос, релаксация, неклассические модели, системы дифференциальных уравнений в частных производных, краевые задачи, асимптотические приближения, численные решения.*

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования процессов фильтрационной консолидации в деформируемых насыщенных пористых средах обусловлена их многообразными применениями в различных областях научно-технического прогресса, в частности при определении деформаций ядер и экранов земляных плотин, устойчивости откосов земляных сооружений, в гидротехническом, дорожном, промышленном, гражданском строительстве и др. [1–3]. В связи с проблемами охраны окружающей среды важое значение приобретают исследования процессов уплотнения оснований поверхностных накопителей промышленных и бытовых стоков [4, 5]. Нередко указанные хранилища заполняются отходами промышленности, являющимися концентрированными солевыми растворами, поэтому для оценки динамики процессов уплотнения (консолидации) оснований этих накопителей некорректно использовать классическую теорию фильтрационной консолидации, базирующуюся на предположении, что фильтрат в массиве является чистой водой [1–3], а необходимо учитывать также массоперенос солей в процессе фильтрации порового раствора [4–6].

Находящаяся в процессе деформирования система «пористая среда–солевой раствор» весьма сложная для математического описания с учетом всего комплекса факторов, влияющих на динамику процесса уплотнения. Поэтому в соответствии с требованиями системного анализа при построении соответствующей математической модели будем учитывать лишь взаимодействия и параметры, играющие первостепенную роль в рамках проводимого исследования процесса фильтрационного уплотнения, как процесса в системе с двойной релаксацией: релаксационная фильтрация поровой жидкости в деформируемой релаксационно-сжимаемой среде.

Отметим, что математическая модель процесса консолидации деформируемого пористого массива с учетом насыщенности массива солевым раствором и релаксационности лишь фильтрационного процесса исследована в [7]. В предлагаемой ниже модели дополнительно учитывается возможность протекания процесса уплотнения в релаксационно-сжимаемой пористой среде, что особенно важно при резких и значительных изменениях давления (взрывах, горных ударах), поскольку при этом изменение пористости носит ярко выраженный релаксационный характер [8].

В рамках этой модели ниже поставлена соответствующая краевая задача о консолидации (с учетом указанных факторов) насыщенного солевым раствором грунтового массива на непроницаемом основании и приведены результаты асимптотического анализа в случае слабой релаксационной сжимаемости среды. В общем случае (без предположения о малости релаксационных параметров) разработана методика численного решения поставленной нелинейной краевой задачи.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА, ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерный нестационарный процесс фильтрационного уплотнения насыщенного солевым расвором грунтового массива под действием мгновенно приложенной нагрузки при выполнении известных ограничений [1, 2]. Предположим, что имеет место следующее естественное обобщение закона релаксационной фильтрации на случай движения солевых растворов [7]:

$$u_x + \lambda_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} = -k \frac{\partial}{\partial x}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right). \qquad (1)$$

Здесь u_x — скорость фильтрации, k — коэффициент фильтрации, $H = \frac{p}{\gamma}$ — избыточный напор, p — поровое давление, γ — объемный вес жидкости, C — концентрация солей в жидкой фазе, ν — коэффициент осмоса, λ_1, λ_2 — параметры релаксации. Отметим, что в частном случае $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ из соотношения (1) получаем обобщение закона Дарси–Герсеванова для движения солевых растворов, предложенное в [5].

Рассмотрим пористые среды, для которых соответствие между коэффициентом пористости и суммой главных напряжений неравновесное (релаксационно-сжимаемая среда) и описывается соотношением [8]

$$e + \tau_1 \frac{\partial e}{\partial t} = e_0 - a\left(\theta + \tau_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \qquad (2)$$

где e — коэффициент пористости, a — коэффициент уплотнения, θ — сумма главных напряжений, τ_1, τ_2 — параметры релаксации.

С учетом соотношения (2) уравнение неразрывности жидкой фазы [1, 2] принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \tau_1 \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = -\frac{k}{c_v} \frac{\partial}{\partial t}\left(H + \tau_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right), \qquad (3)$$

где $c_v = \frac{k\,(1+\bar{e}\,)}{a\gamma}$ — коэффициент консолидации [1, 2], $\bar{e}$ — среднее значение коэффициента пористости. Исключая из уравнения (3) скорость фильтрации u_x согласно соотношению (1), получаем уравнение для определения избыточного напора H в виде

$$\lambda_1 \tau_2 \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (\lambda_1 + \tau_2)\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \tau_1 c_v \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) -$$

$$- \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right) - \mu \tau_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right), \qquad (4)$$

где $\mu = \nu c_v k^{-1}$.

Из уравнения конвективной диффузии (гидродинамической дисперсии) при фильтрации порового раствора [9]

$$n\,\frac{\partial C}{\partial t}=D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x}\,(u_x C), \tag{5}$$

где n — пористость, D — коэффициент конвективной диффузии [9], с учетом соотношения (1) получаем уравнение для определения концентрации солей в жидкой фазе:

$$n\,\frac{\partial C}{\partial t}=D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{k\,\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(C\,\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{k}{\lambda_1}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\times$$

$$\times\,\frac{\partial}{\partial x}\left(C\int\limits_0^t\frac{\partial H}{\partial x}\,e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_1}}\,d\tau\right)-\nu\,\frac{\partial}{\partial x}\left(C\,\frac{\partial C}{\partial x}\right). \tag{6}$$

Система уравнений (4), (6) составляет математическую модель процесса фильтрационной консолидации, насыщенной солевым раствором релаксационно-сжимаемой пористой среды в условиях релаксационной фильтрации порового раствора.

Применяя к интегралу в (6) обобщенную теорему о среднем и аппроксимируя полученный интеграл с помощью некоторой квадратурной формулы, например формулы трапеций, переходим от интегро-дифференциального уравнения (6) к дифференциальному:

$$n\,\frac{\partial C}{\partial t}=D\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+w\,(t)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(C\,\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\nu\,\frac{\partial}{\partial x}\left(C\,\frac{\partial C}{\partial x}\right), \tag{7}$$

где

$$w\,(t)=\frac{k}{\lambda_1}\left[\lambda_2+\frac{t}{2}\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)e^{-\frac{t}{2\lambda_1}}\right]. \tag{8}$$

Погрешность принятой в (6) аппроксимации предположительно находится в пределах погрешности исходных предпосылок, использованных при построении собственно самой математической модели консолидации. В связи с этим использование более простой для численной реализации приближенной математической модели, основанной на уравнениях (4), (7), вместо первоначально сформулированной модели, включающей (4), (6), предпочтительнее для инженерных расчетов. В настоящей работе использование приближенной модели, основанной на (4), (7), вместо первоначальной, основанной на (4), (6), опирается на установленный в [10] факт удовлетворительной согласованности результатов расчетов полей избыточных напоров в рамках обеих моделей консолидации.

Следует отметить, что аппроксимируя коэффициент $w\,(t)$ с погрешностью, не превосходящей $\frac{\lambda_1}{e}$, постоянной величиной

$$w=k\left[\frac{1}{2e}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1-\frac{1}{2e}\right)\right],$$

можно преобразовать (7) в уравнение с постоянными коэффициентами.

В рамках математической модели (4), (7), (8) изучение процесса консолидации грунтового массива конечной мощности l, расположенного на непроницаемом основании, сводится к решению в области $(0,\,l)\times(0,\,+\infty)$ следующей нелинейной краевой задачи:

$$\lambda_1\tau_2 \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (\lambda_1+\tau_2)\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \tau_1 c_v \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) -$$

$$- \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right) - \mu\tau_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right), \tag{9}$$

$$n \frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + w(t) \frac{\partial}{\partial x}\left(C \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial x}\left(C \frac{\partial C}{\partial x} \right), \tag{10}$$

$$H(0,t) = 0,\ H_x(1,t) = 0, \tag{11}$$

$$H(x,0) = 1,\ H_t(x,0) = 0,\ H_{tt}(x,0) = 0, \tag{12}$$

$$C(0,t) = 1,\ C_x(1,t) = 0, \tag{13}$$

$$C(x,0) = 0. \tag{14}$$

Здесь введены безразмерные переменные и параметры:

$$x' = \frac{x}{l},\ t' = \frac{t}{T},\ H' = \frac{H}{H_0},\ C' = \frac{C}{C_0},\ \lambda'_i = \frac{\lambda_i}{T},$$

$$\tau'_i = \frac{\tau_i}{T}\ (i = 1, 2),\ c_v' = \frac{c_v T}{l^2},$$

$$\nu' = \frac{\nu C_0 T}{l^2},\ \mu' = \frac{\mu C_0 T}{l^2 H_0},\ D' = \frac{DT}{l^2}\ (D, T, C_0, H_0 = \mathrm{const}),$$

знак «штрих» над безразмерными величинами опущен.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗБЫТОЧНОГО НАПОРА

Рассмотрим случай слабой релаксационной сжимаемости среды, т.е. предположим, что параметры τ_1, τ_2 малы. Считая $\tau_1 = \tau'_1 \varepsilon,\ \tau_2 = \tau'_2 \varepsilon$ (ε — малый параметр) и опуская в дальнейшем знак «штрих», перепишем уравнение для напора в виде

$$\varepsilon \lambda_1 \tau_2 \frac{\partial^3 H}{\partial t^3} + (\lambda_1 + \varepsilon\tau_2)\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\partial H}{\partial t} =$$

$$= c_v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \varepsilon \tau_1 c_v \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\left(H + \lambda_2 \frac{\partial H}{\partial t} \right) -$$

$$- \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right) - \varepsilon \mu \tau_1 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}\left(C + \lambda_1 \frac{\partial C}{\partial t} \right). \tag{15}$$

Согласно асимптотическому методу М.И. Вишика–Л.А. Люстерника [11, 12], ищем функцию избыточного напора H в виде

$$H(x,t,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}H_i(x,t)+\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}v_i(x,\tau)+R_n, \tag{16}$$

где $H_i\ (i=\overline{0,n})$ — члены внешнего приближения, $v_i\ (i=\overline{0,n})$ — члены внутреннего приближения, R_n — остаточный член, $\tau=\dfrac{t}{\varepsilon}$.

Уравнения для определения регулярной части асимптотики получаются применением стандартной процедуры метода возмущений и имеют вид

$$\lambda_1\frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}+\frac{\partial H_0}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H_0+\lambda_2\frac{\partial H_0}{\partial t}\right)-\mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C+\lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right), \tag{17}$$

$$\lambda_1\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}+\frac{\partial H_1}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(H_1+\lambda_2\frac{\partial H_1}{\partial t}\right)-\mu(\tau_1-\tau_2)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\left(C+\lambda_1\frac{\partial C}{\partial t}\right)-$$

$$-c_v(\tau_1+\tau_2)\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}\left(H_0+\lambda_2\frac{\partial H_0}{\partial t}\right),\ \ldots \tag{18}$$

Граничные условия для определения функций $H_i\ (i=\overline{0,n})$ запишем следующим образом:

$$H_i(0,t)=0,\ \frac{\partial H_i(1,t)}{\partial x}=0.$$

Уравнения для определения функций $v_i\ (i=\overline{0,n})$ получаем в виде

$$\tau_2\frac{\partial^3 v_i}{\partial\tau^3}+\frac{\partial^2 v_i}{\partial\tau^2}=f(v_{i-1})\quad (i=\overline{0,n}),$$

где обозначено

$$f(v_{-1})\equiv 0,\ f(v_0)=\lambda_1^{-1}\left[c_v\lambda_2\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial\tau}\left(v_0+\tau_1\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(v_0+\tau_2\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right)\right],$$

$$f(v_k)=\lambda_1^{-1}\left[c_v\lambda_2\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial\tau}\left(v_k+\tau_1\frac{\partial v_k}{\partial\tau}\right)-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(v_k+\tau_2\frac{\partial v_k}{\partial\tau}\right)+\right.$$

$$\left.+c_v\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(v_{k-1}+\tau_1\frac{\partial v_{k-1}}{\partial\tau}\right)\right]\ (k=\overline{1,n}).$$

Функции H_i и v_i связаны между собой посредством начальных условий:

$$H_0(x,0)=1,\quad \left.\frac{\partial H_0}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\quad v_0(x,0)=0,$$

$$H_i(x,0)=-v_i(x,0)\qquad (i=\overline{1,n}),$$

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial H_{i-1}}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial v_i}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}\qquad (i=\overline{1,n}),$$

$$\left.\frac{\partial^2 v_i}{\partial\tau^2}\right|_{\tau=0}=-\left.\frac{\partial^2 H_{i-2}}{\partial t^2}\right|_{t=0}\qquad (i=\overline{2,n}).$$

Требуя, чтобы функции $v_i(x,\tau)$ были функциями типа погранслоя, имеем

$$v_0(x,\tau)\equiv 0, \quad v_1(x,\tau)\equiv 0, \quad v_2(x,\tau)=-\left.\frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}\right|_{t=0}\cdot\tau_2^2\, e^{-\frac{\tau}{\tau_2}},$$

$$v_3(x,\tau)=\left[\int_0^{\tau} e^{s} f\,(v_2(x,s))\,ds-\left.\frac{\partial^2 H_1}{\partial t^2}\right|_{t=0}\right]e^{-\tau}+\int_{\tau}^{+\infty}(s-\tau+1)\,f\,(v_2(x,s))ds.$$

Последовательность вычислений по полученным формулам следующая: H_0, v_2, H_1, $v_3,\ldots$ Отметим, что основной вклад в решение задачи дают функции H_0 и v_2. При этом уравнение для избыточного напора H_0 вида (17) совместно с уравнением для концентрации (10) описывает процесс консолидации массивов, подчиняющихся классическому линейному закону уплотнения в условиях релаксационности фильтрационного процесса [7]. Приведенные данные позволяют заключить, что модель консолидации насыщенных солевыми растворами массивов в рамках системы с двойной релаксацией в определенном смысле «близка» к изученной ранее в [7] модели консолидации среды, деформирующейся по линейному закону уплотнения $e=e_0-a\theta$ в условиях релаксационности фильтрационного процесса. Уточняя сказанное, заметим, что поскольку функция типа погранслоя $v_2(x,\tau)$ «подправляет» решение $H_0(x,t)$ в момент $t\in(0,\varepsilon)$, затухая экспоненциально на больших промежутках времени, то решение задачи консолидации в рамках системы с двойной релаксацией отличается от решения соответствующей задачи в рамках классического закона уплотнения и релаксационности фильтрационного процесса [7] лишь для малых значений времени t.

В дополнение к изложенному выше рассмотрим также случай слабо выраженных свойств релаксационности и фильтрационного процесса, т.е. наряду с τ_1,τ_2 будем считать малыми и параметры λ_1,λ_2. Отыскивая аналогично предыдущему решение краевой задачи относительно напора H в виде (16), после применения стандартной процедуры метода возмущений приходим к последовательности уравнений для определения регулярной части асимптотики вида

$$\frac{\partial H_i}{\partial t}=c_v\frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2}+f_i(x,t) \qquad (i=\overline{0,n}), \tag{19}$$

где

$$f_0=-\mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},\ f_1=(\lambda_2+\tau_1)\,c_v\frac{\partial^3 H_0}{\partial x^2\partial t}-(1+\tau_2)\frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}-\mu\,(1+\tau_1)\frac{\partial^3 C}{\partial x^2\partial t},$$

$$f_2=(\lambda_2+\tau_1)\,c_v\frac{\partial^3 H_1}{\partial x^2\partial t}-(1+\tau_2)\frac{\partial^2 H_0}{\partial t^2}+\tau_1\lambda_2\frac{\partial^4 H_1}{\partial x^2\partial t^2}-\tau_2\frac{\partial^3 H_0}{\partial t^3}-\mu\tau_1\frac{\partial^4 C}{\partial x^2\partial t^2},\ldots$$

Для определения членов внутреннего приближения имеем последовательность уравнений

$$\tau_2\frac{\partial^3 v_i}{\partial\tau^3}+(1+\tau_2)\frac{\partial^2 v_i}{\partial\tau^2}+\frac{\partial v_i}{\partial\tau}=F_i\,(v_{i-1}(x,\tau)) \qquad (i=\overline{0,n}),$$

где $F_0=0,\ F_i=c_v\left[\frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2}+(\lambda_2+\tau_1)\frac{\partial^3 v_{i-1}}{\partial x^2\partial\tau}+\lambda_2\tau_1\frac{\partial^4 v_{i-1}}{\partial x^2\partial\tau^2}\right]\ (i=\overline{1,n}).$

Функции погранслойного типа $v_i(x,\tau)$ $(i=\overline{0,n})$ отыскиваются с учетом условий

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=\tilde{f}_i(x),\ \left.\frac{\partial^2 v_i}{\partial \tau^2}\right|_{\tau=0}=\tilde{\tilde{f}}_i(x) \qquad (i=\overline{0,n}),$$

где

$$\tilde{f}_0(x)=0,\ \tilde{f}_i(x)=-\left.\frac{\partial H_{i-1}}{\partial t}\right|_{t=0} \quad (i=\overline{1,n}),\ \tilde{\tilde{f}}_0(x)=0,\ \tilde{\tilde{f}}_1(x)=0,$$

$$\tilde{\tilde{f}}_i(x)=-\left.\frac{\partial^2 H_{i-2}}{\partial t^2}\right|_{t=0} \quad (i=\overline{2,n}).$$

Отсюда получаем

$$v_0\equiv 0,\ v_1(x,\tau)=e^{-\tau}\,\tilde{f}_1(x)\left[\frac{\tau_2^2}{\tau_2-1}\left(1-e^{-\frac{1-\tau_2}{\tau_2}\tau}\right)-1-\tau_2\right],$$

$$v_2(x,\tau)=e^{-\tau}\left\{\tau_2^{-1}\int_0^{\tau}\int_0^{\eta}\int_0^{\mu}F_2(v_1(x,\xi))\exp\left[\frac{\mu-(1-\tau_2)\eta}{\tau_2}\right]d\xi\,d\mu\,d\eta+\right.$$

$$\left.+\tau_2\left[\frac{\tau_2}{1-\tau_2}\left(1-e^{-\frac{1-\tau_2}{\tau_2}\tau}\right)-1\right][\tilde{f}_2(x)+\tilde{\tilde{f}}_2(x)]-\tilde{f}_2(x)\right\}.$$

Последовательность вычислений приближений к решению такова: H_0, v_1, H_1, $v_2,\ldots$ Основной вклад в решение задачи дают функции $H_0(x,t)$ и $v_1(x,\tau)$. Функция $H_0(x,t)$ отыскивается тривиальным образом на основании (19) с учетом краевых условий

$$H_0(0,t)=0, \qquad \frac{\partial H_0(1,t)}{\partial x}=0, \qquad H_0(x,0)=1,$$

и имеет следующий вид:

$$H_0(x,t)=\Phi(x,t)+\int_0^t\int_0^1 f_0(\xi,\tau)\,G(x,\xi;t-\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$\Phi(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}e^{-c_v\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n x),\quad \lambda_n=\frac{\pi(2n-1)}{2},$$

$$G(x,\xi;t)=2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-c_v\lambda_n^2 t}\sin(\lambda_n\xi)\sin(\lambda_n x).$$

Поскольку уравнение для определения H_0 соответствует случаю классической фильтрационной консолидации в условиях закона Дарси и функция v_1 является функцией погранслойного типа, то можно заключить, что рассматриваемая модель консолидации для сред со слабо выраженными релаксационными свойствами одновременно процессов фильтрации и деформирования в некотором смысле «близка» к классической модели консолидации Терцаги–Герсеванова [1–3], обобщенной на условия движения солевых растворов [5, 6].

Из сказанного выше следует, что учет релаксационных свойств процессов деформирования и фильтрации особенно важен на начальных стадиях протекания процесса уплотнения.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В общем случае, когда параметры модели не обязательно малые, приближенное решение рассматриваемой краевой задачи можно получить следующим образом.

Рассмотрим сначала задачу (9), (11), (12), считая функцию C известной, и применим к этой задаче предложенный в [13] подход, сочетающий дифференциально-разностный метод в совокупности с методом суммарных представлений [14]. Для этого введем в рассмотрение сеточную область

$$\omega_h = \left\{ x_i : x_i = ih,\ i = \overline{0, m+1},\ h = \frac{2}{2m+1} \right\}$$

и поставим в соответствие задаче (9), (11), (12) дифференциально-разностную задачу вида

$$\lambda_1 \tau_2 \frac{d^3 \vec{u}(t)}{dt^3} + \left(\lambda_1 + \tau_2 + \frac{2\tau_1 c_v \lambda_2}{h^2} \right) \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2} - \frac{\tau_1 c_v \lambda_2}{h^2} T_3^{(m)} \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2} +$$

$$+ \left[1 + \frac{2c_v}{h^2} (\lambda_2 + \tau_1) \right] \frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{c_v}{h^2} (\lambda_2 + \tau_1) T_3^{(m)} \frac{d\vec{u}(t)}{dt} + \frac{2c_v}{h^2} \vec{u}(t) -$$

$$- \frac{c_v}{h^2} T_3^{(m)} \vec{u}(t) = \vec{w}(t), \tag{20}$$

$$\vec{u}(0) = \vec{e},\ \vec{u}'(0) = \vec{0},\ \vec{u}''(0) = \vec{0}. \tag{21}$$

Здесь

$$\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)^T,\ \vec{0} = (0, 0, \dots, 0)^T,\ \vec{u}(t) = \left[H_1(t), H_2(t), \dots, H_m(t) \right]^T,$$

$$\vec{w}(t) = \frac{\mu}{h^2} \left[2\lambda_1 \tau_1 \frac{d^2 \vec{U}(t)}{dt^2} + 2(\lambda_1 + \tau_1) \frac{d\vec{U}(t)}{dt} + 2\vec{U}(t) - \vec{\omega}_1 - T_3^{(m)} \vec{U}(t) - \right.$$

$$\left. - \lambda_1 \tau_1 T_3^{(m)} \frac{d^2 \vec{U}(t)}{dt^2} - (\lambda_1 + \tau_1) T_3^{(m)} \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right],$$

$$\vec{U}(t) = \left[C_1(t), C_2(t), \dots, C_m(t) \right]^T,$$

$$\vec{\omega}_1(t) = (1, 0, \dots, 0)^T,$$

$T_3^{(m)}$ — квадратная матрица порядка m, определенная в [14].

Введем в рассмотрение P -трансформации векторов $\vec{u}$ и $\vec{w}$ согласно соотношений $\vec{\hat{u}}(t) = P_3^{(m)^*} \vec{u}(t)$, $\vec{\hat{w}}(t) = P_3^{(m)^*} \vec{w}(t)$, где $P_3^{(m)^*}$ — квадратная матрица порядка m, транспонированная по отношению к матрице $P_3^{(m)} = = \left[p_{kj}^{(3)} \right]_{k,j=1}^m$,

определенной в [14]. Умножая (20), (21) слева на матрицу $P_3^{(m)^*}$, с учетом соотношения $T_3^{(m)} = P_3^{(m)} \Lambda_3^{(m)} P_3^{(m)^*}$ ($\Lambda_3^{(m)} = \operatorname{diag}\left[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, \ldots, \lambda_m^{(3)}\right]$ — диагональная матрица собственных чисел матрицы $T_3^{(m)}$ [14]), получаем задачу Коши, записываемую в скалярной форме в виде

$$\lambda_1 \tau_2 \frac{d^3 \hat{u}_i(t)}{dt^3} + \sigma_i \frac{d^2 \hat{u}_i(t)}{dt^2} + \nu_i \frac{d \hat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1, m}), \tag{22}$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{e}_i, \; \hat{u}_i'(0) = 0, \; \hat{u}_i''(0) = 0 \quad (i = \overline{1, m}), \tag{23}$$

где

$$\sigma_i = \lambda_1 + \tau_2 + \tau_1 \lambda_2 \theta_i, \; \theta_i = \frac{c_v}{h^2}(2 - \lambda_i^{(3)}), \; \nu_i = 1 + (\lambda_2 + \tau_1)\theta_i,$$

$$\hat{e}_i = \sum_{k=1}^m p_{ki}^{(3)},$$

$$\hat{w}_i(t) = \frac{\mu \theta_i}{c_v} \left[\lambda_1 \tau_1 \frac{d^2 \hat{U}_i(t)}{dt^2} + (\lambda_1 + \tau_1) \frac{d \hat{U}_i(t)}{dt} + \hat{U}_i(t) \right] - \frac{\mu}{h^2} p_{1i}^{(3)},$$

$$\hat{U}_i(t) = \sum_{k=1}^m p_{ki}^{(3)} C_k(t) \quad (i = \overline{1, m}).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение задачи (22), (23) имеет вид

$$\hat{u}_i(t) = Q_i(t) + \int_0^t \hat{w}_i(\tau) K_i(t - \tau) \, d\tau \quad (i = \overline{1, m}), \tag{24}$$

где

$$Q_i(t) = \sum_{j=1}^3 \frac{g_j^{(i)}}{\Delta_j^{(i)}} e^{k_j^{(i)} t}, \; K_i(t - \tau) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\Delta_j^{(i)}} e^{k_j^{(i)}(t - \tau)} \quad (D_i < 0, i = \overline{1, m}),$$

$$k_m^{(i)} = 2\sqrt{\frac{1}{3\lambda_1\tau_2}\left(\frac{\sigma_i^2}{3\lambda_1\tau_2} - \nu_i\right)} \cos\left(\frac{\varphi_i + 2\pi m}{3}\right) - \frac{\sigma_i}{3\lambda_1\tau_2} \quad (m = 1, 2, 3),$$

$$\cos\varphi_i = -\frac{q_i}{2}\sqrt{-\frac{27}{p_i^3}}, \; p_i = \frac{1}{\lambda_1\tau_2}\left(\nu_i - \frac{\sigma_i^2}{3\lambda_1\tau_2}\right),$$

$$q_i = \frac{1}{\lambda_1 \tau_2}\left(\theta_i + \frac{2\sigma_i^3}{27\lambda_1^2 \tau_2^2} - \frac{\sigma_i \nu_i}{3\lambda_1 \tau_2}\right), \; g_1^{(i)} = k_2^{(i)} k_3^{(i)} \hat{e}_i, \; g_2^{(i)} = k_1^{(i)} k_3^{(i)} \hat{e}_i,$$

$$g_3^{(i)} = k_1^{(i)} k_2^{(i)} \hat{e}_i, \; \Delta_1^{(i)} = (k_1^{(i)} - k_2^{(i)})(k_1^{(i)} - k_3^{(i)}),$$

$$\Delta_2^{(i)} = (k_2^{(i)} - k_1^{(i)})(k_2^{(i)} - k_3^{(i)}),$$

$$\Delta_3^{(i)} = (k_3^{(i)} - k_1^{(i)})(k_3^{(i)} - k_2^{(i)}),\; D_i = \frac{q_i^2}{4} + \frac{p_i^3}{27} \quad (i = \overline{1, m}).$$

Отметим, что аналитические соотношения для функций $Q_i\,(t)$ и $K_i\,(t-\tau)$ в случае наличия комплексно-сопряженных корней $(D_i < 0)$ характеристического уравнения, соответствующего (22), и в случае кратных действительных корней $(D_i = 0)$ указанного уравнения не приводятся ввиду их громоздкости [15].

Переходя в соотношениях (24) к оригиналам, получаем решение исходной дифференциально-разностной задачи в виде

$$H_i\,(t) = F_i\,(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t C_k(\tau)\, S_{ik}(t-\tau)\, d\tau \qquad (i = \overline{1, m}), \tag{25}$$

где

$$F_i(t) = \sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} \left[Q_\nu\,(t) - \frac{\mu}{h^2}\, p_{1\nu}^{(3)} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\Delta_j^{(\nu)}\, k_j^{(\nu)}} \left(e^{k_j^{(\nu)} t} - 1 \right) \right],$$

$$S_{ik}(t-\tau) = \frac{\mu}{c_\upsilon} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{j=1}^{3} p_{i\nu}^{(3)}\, p_{k\nu}^{(3)}\, \frac{\theta_\nu}{\Delta_j^{(\nu)}} \Big[\lambda_1\, \tau_2\, (k_j^{(\nu)})^2 + (\lambda_1 + \tau_1)\, k_j^{(\nu)} + 1 \Big]\, e^{k_j^{(\nu)} (t-\tau)}.$$

С учетом изложенного можно предложить методику решения рассматриваемой краевой задачи (9)–(14), базирующуюся на совместном применении дифференциально-разностного и собственно разностного методов. При этом поле концентраций вычисляется в соответствии, например, с разностной схемой, записываемой в обозначениях работы [16], в виде

$$nC_t = D\,\hat{C}_{\bar{x}x} + w(t)(\hat{C}\, H_{\bar{x}})_x - \nu\,(C_x^2 + \hat{C}\, C_{\bar{x}x}). \tag{26}$$

Считая, что на предыдущем временном слое задача решена — алгоритм вычислений для определения неизвестных функций H и C на данном временном слое сформулируем следующим образом:

1) вычисляем концентрацию C на данном временно́м слое в соответствии с разностной схемой (26);

2) вычисляем значение избыточного напора H на этом временно́м слое по явной зависимости (25);

3) переходим на следующий временно́й слой и повторяем алгоритм, начиная с шага 1.

При численной реализации изложенного алгоритма интеграл в соотношении (25) аппроксимируется с помощью соответствующей квадратурной формулы, например формулы прямоугольников [17].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполненный на основе построенной математической модели асимптотический анализ полей избыточных напоров при фильтрационной консолидации в условиях системы с двойной релаксацией (релаксационная фильтрация в релаксационно-сжимаемой среде) показывает необходимость учета, особенно на начальных стадиях процесса уплотнения, релаксационных свойств деформируемой пористой среды и фильтрационого процесса, что, в частности, важно при резких и значительных изменениях давления. В общем случае (при отказе от предположения о малости релаксационных параметров) численное моделирование динамики процесса фильтрационной консолидации пористой среды, в рамках рассматриваемой математической модели, может быть выполнено на основе разработанного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов П.Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. — М.: Высш. шк., 1991. — 447 с.
2. Флорин В.А. Основы механики грунтов: В 2-х т. — Л.; М.: Госстройиздат, 1961. — Т. 2. — 544 с.
3. Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов. — М.: Наука, 1967. — 543 с.
4. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичнџ математичнџ моделџ процесџв тепло- та масопереносу. — КиВв: Наук. думка, 2005. — 283 с.
5. Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання консолџдацџВ грунтџв в процесџ фџльтрацџВ сольових розчинџв. — Рџвне: Вид-во УДУВГП, 2004. — 211 с.
6. Булавацький В.М., Скопецький В.В. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 6. — С. 73–81.
7. Скопецький В.В., Булавацький В.М. Математичне моделювання процесу фџльтрацџйноВ консолџдацџВ масивџв, насичених сольовими розчинами за умов релаксацџйноВ фџльтрацџВ // Доп. НАН УкраВни. — 2006. — № 2. — С. 55–61.
8. Молокович Ю.М., Непримеров Н.И., Пикуза В.И., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. — 136 с.
9. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. — Киев: Наук. думка, 1991. — 264 с.
10. Булавацкий В.М., Скопецкий В.В. Математическое моделирование процесса фильтрационной консолидации с учетом релаксационных явлений // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 48–56.
11. Вишик М.И., Люстерник Л.Я. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. — 1957. — **12**, вып. 5. — С. 3–122.
12. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990. — 208 с.
13. ГлущенкоА.А. Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики // Докл. АН УССР. — Сер. А. — 1978. — № 6. — С. 490–494.
14. Положий Г.Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. — Киев: Вища шк., 1962. — 161 с.
15. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра). — М.: Наука, 1965. — 300 с.
16. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977. — 656 с.
17. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.

Поступила 23. 03. 2007