УДК 531.36

©2011. **А.С. Суйков**

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассматривается задача выбора функции Ляпунова для получения оценки области автономной динамической системы. Критерии выбора функции строятся на основе результатов численного интегрирования. Задача сводится к установлению совместности системы линейных неравенств.

Ключевые слова: *автономные динамические системы, функция Ляпунова, область притяжения.*

Задачи определения области притяжения стационарного решения заданной автономной динамической системы составляют важный раздел в теории динамических систем и, в то же время, имеют непосредственное практическое значение, поскольку позволяют дать количественную характеристику устойчивости установившегося режима работы рассматриваемой системы. Задачи такого рода являются в общем случае весьма сложными и к настоящему времени не имеют полного решения. Наиболее распространенные подходы к решению берут начало в работах А.М. Ляпунова, Ж.П. Ла-Салля и И.Г. Зубова и на основании некоторых утверждений достаточного характера позволяют получить оценку искомой области [1]. Результат при этом существенно зависит от удачного выбора функций, входящих в формулировки соответствующих достаточных утверждений.

Очевидным критерием при выборе функции, дающей оценку области притяжения, является получение максимальной (в некотором смысле) оценки. В такой постановке задача в общем случае сводится к нелинейной многопараметрической оптимизации и эффективно решается лишь в исключительных случаях.

Сравнительно новым подходом к проблеме выбора такой функции является использование линейных матричных неравенств, в частности для обеспечения положительной определенности рассматриваемых функций [2], либо принадлежности заданных точек (получаемых, например, численным интегрированием) оценке области притяжения [3]. Для решения таких систем известны эффективные численные методы [4], позволяющие получать решение даже в задачах большой размерности.

Предложенный в работе [3] метод требовал априорного задания вида получаемой оценки как поверхности уровня некоторой функции. В настоящей работе предлагается модификация этого метода, использующая численное интегрирования в обратном времени для расширения изначально заданной области, что позволяет существенно ослабить требования к последней.

1. Постановка задачи. Рассмотрим автономную динамическую систему

$$\dot{x} = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0, \tag{1}$$

нулевое решение которой $x(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым. Областью притяжения этого решения называется

$$\Omega = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \to \infty} x(t; x_0) = 0\}; \tag{2}$$

здесь через $x(t; x_0)$ обозначена траектория, проходящая через x_0 при $t = 0$ [5].

Для большинства нелинейных систем точное определение области (2) не представляется возможным, поэтому ставится задача о получении оценки

$$S \subset \Omega, \quad 0 \in S \tag{3}$$

так, чтобы S можно было представить в достаточно простом виде. Такую оценку можно получить, если для системы (1) известна функция Ляпунова.

Рассмотрим локально-знакоположительную функцию $V(x)$, производная $\dot{V}(x)$ которой является локально-знакоотрицательной в окрестности нуля.

Утверждение 1 [5]**.** *Пусть область S удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{array}{l} \textit{область } S \textit{ компактна, и } 0 \in S; \\ \exists c:\ 0 < V(x) \leqslant c \quad \forall x \in S,\ \ x \neq 0, \quad \textit{и } V(x) = c \quad \forall x \in \partial S; \\ \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in S,\ x \neq 0; \end{array} \tag{4}$$

тогда $S \subset \Omega$. Здесь через $\dot{V}$ обозначена производная V вдоль траекторий системы

$$\dot{V} = \nabla V \cdot f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i. \tag{5}$$

Отметим, что компактность $\{x : V(x) \leqslant c\}$ при любом c не требуется; более того, множество $\{x : V(x) \leqslant c\}$ может не быть компактным, достаточно лишь, чтобы условие (4) выполнялось в рассматриваемой области $S \subset \{x : V(x) \leqslant c\}$.

Любое множество S, удовлетворяющее условиям (4), будет инвариантно под действием системы (1) и связно.

Выбор функции Ляпунова. Оценка вида (4) существенно зависит от выбора функции V, выбор произвольной V для системы (1) в общем случае может оказаться неэффективным. Произвольная функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям (4), даст некоторую оценку области притяжения, однако такая оценка может быть произвольно малой.

Задача о максимизации области (4) варьированием функции V, даже если рассматривается некоторое параметрическое множество функций $V_p(x)$, является весьма сложной из-за свойств целевой функции. Непосредственное решение такой задачи, как правило, невозможно.

Однако введение дополнительных ограничений на правые части (1), функцию V и область S в некоторых случаях позволяет существенно упростить задачу. В настоящей работе будет показано, как использование численного интегрирования для полиномиальных систем и полиномиальных функций V позволяет свести (4) к некоторой задаче выпуклой оптимизации, для решения которой известны эффективные численные алгоритмы.

2. Использование результатов численного интегрирования. Численное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) состоит в замене этой системы на систему

$$\tilde{x}(t_{j+1}) = R_f(t_j, \tilde{x}_{t_j}), \quad R_f(t_j, 0) = 0, \quad t_j = t_0 + jh \tag{6}$$

разностных уравнений в дискретных переменных $\tilde{x}$, где под R_f подразумеваются соответствующие аппроксимирующие формулы (например, Рунге–Кутта), вид которых здесь не важен.

Определим область притяжения нулевого решения системы (6) аналогично (2):

$$\tilde{\Omega} = \{\tilde{x}_0 : \lim_{j\to\infty} \tilde{x}(t_j; \tilde{x}_0) = 0\} \tag{7}$$

и выберем каким-либо образом конечное число точек из $\tilde{\Omega}$

$$\tilde{x}_{(1)},\ \tilde{x}_{(2)},\ \ldots,\quad \tilde{x}_{(k)} \in \tilde{\Omega}. \tag{8}$$

Казалось бы естественным использовать точки $\tilde{x}_{(i)}$ для получения некоторой информации об области Ω, однако делать это непосредственно, строго говоря, нельзя. Системы (1) и (6) в общем случае не эквивалентны, соответственно, равенство $\Omega = \tilde{\Omega}$ может не выполняться и из $\tilde{x}_{(i)} \in \tilde{\Omega}$ не следует $\tilde{x}_{(i)} \in \Omega$.

Использование функции V позволяет избежать этой трудности. До тех пор, пока условия (4) выполняются, область S будет лежать в области притяжения Ω. Точки (8) можно использовать для построения функции V, требуя выполнения $\tilde{x}_{(i)} \in S$ для получаемой области S [3]. Но и в этом случае корректность получаемых результатов (если такая функция V нашлась) определяется только выполнением условий (4).

Таким образом, вопрос о свойствах траектории динамической системы сводится к вопросу о свойствах поверхностей уровня некоторой (в настоящей работе — полиномиальной) функции.

3. Полиномиальные системы и задание многочленов. В дальнейшем будем считать функцию $V_b(x) = V(x; b)$ полиномом от $x \in \mathbb{R}^n$ с коэффициентами $b \in \mathbb{R}^m$, причем $V(x; b)$ будет попеременно рассматриваться и как функция от x при фиксированном b, и как функция от b при фиксированном x.

Пусть X — матрица $n \times k$, а P — матрица $n \times p$. Определим операцию X^P следующим образом:

$$X^P = C, \quad c_{ij} = \prod_{v=1}^{n} x_{vi}^{p_{vj}};$$

здесь x, p и c — элементы матриц X, P и C соответственно. Такая операция представляет собой обобщение записи

$$x^{\alpha} = \prod x_i^{\alpha_i}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}^n,\ i = \overline{1,n}$$

для покомпонентного возведения x в степень в случае, когда x и α представляют собой матрицы.

Рассмотрим систему вида (1) с полиномиальными правыми частями:

$$\dot{x} = f(x), \quad f_i(x) = x^{F_i} c_i, \quad c_i \in \mathbb{R}^{q_i}\ i = \overline{1,n} \tag{9}$$

и функцию Ляпунова

$$V(x) = x^P G b, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad b \in \mathbb{R}^p, \tag{10}$$

где G — единичная матрица $p \times p$. Учитывая (10), (9) и линейность операции дифференцирования, производную $\dot{V}(x)$ можно записать в виде

$$\dot{V}(x) = x^{P'} G' b. \tag{11}$$

4. Оценка области притяжения, включающая заданные точки. Предположим, что известны точки

$$x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(p)} \in \mathbb{R}^n, \quad x_{(i)} \in S,\ x_{(i)} \neq 0,\ i = \overline{1,p}, \tag{12}$$

заведомо лежащие в S. Зададим функцию Ляпунова в виде

$$V(x) = x^P b, \tag{13}$$

где P задается, коэффициенты b подлежат определению, и потребуем выполнения условий (4) для V и $\dot{V}$ в точках (12) для $c = 1$, т.е.

$$0 < V(x_{(i)}) < 1, \quad \dot{V}(x_{(i)}) < 0 \quad \forall i = \overline{1,p}. \tag{14}$$

Условие $c = 1$ никак не ограничивает выбор функции вида (13). Действительно, если условия (4) выполнялись для V и c, то те же условия будут выполнятся для $\frac{1}{c}V$ и 1; кроме того, линейная зависимость V от b позволяет нормировать b без изменения вида функции.

Запишем точки (12) в виде матрицы $n \times p$

$$X = \left(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(p)}\right) \tag{15}$$

и подставим выражения (10) и (11) в условия (14). Получим систему

$$X^P b > 0, \quad X^{P'} G' b < 0, \quad X^P b < c \tag{16}$$

неравенств, линейных относительно коэффициентов b.

Неравенства (16) определяют множество функций вида (10), допускающих принадлежность точек (12) получаемой в виде (4) оценке области притяжения. Однако обратное в общем случае не верно: оценка области притяжения для функции (10) при выполнении (16) может не включать точки (12). Такое возможно, в частности, если существуют $x \neq 0$: $V(x) < c$, $\dot{V}(x) \geqslant 0$, чему условия (16) не препятствуют. Произвола в выборе точек (12) недостаточно для получения требуемой оценки области притяжения.

Покажем, как можно выбрать точки (12), чтобы обеспечить точное выполнение условий (4). Пусть $C \subset \Omega$ – некоторая известная компактная оценка области притяжения. Рассмотрим преобразование границы этого множества ∂C под действием системы (9) в обратном времени:

$$\partial C'_t = \varphi(-t; \partial C) = \{x = \varphi(-t; x_0) : x_0 \in \partial C\}. \tag{17}$$

Определение (17) корректно, по крайней мере, для достаточно малых t, в том смысле, что $\partial C'_t$ действительно будет границей некоторого множества в предположении, что для правых частей системы выполнены условия существования и единственности решений в C.

Пусть теперь $t_1 > 0$ – такой момент времени, что C'_t определено и компактно при $0 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon$, где ε – сколь угодно малое число. Потребуем, чтобы множество C'_{t_1} было в точности получаемой оценкой области притяжения. Для этого рассмотрим траектории нескольких точек ∂C

$$\varphi_i(t) = \varphi(t; x'_{(i)}),\ 0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x'_{(i)} \in \partial C,\ i = \overline{1, q}, \tag{18}$$

и потребуем выполнения условий (16) в отдельных точках на этих траекториях:

$$X_I = (\varphi_i(\frac{jt_1}{s})),\ i = \overline{1, q},\ j = \overline{1, s}. \tag{19}$$

Кроме того, потребуем, чтобы точки $\varphi_i(t_1 + \varepsilon)$ находились за пределами S

$$V(\varphi_i(t_1 + \varepsilon)) > c. \tag{20}$$

Обозначая

$$X_O = (\varphi_i(t_1 + \varepsilon)),\ i = \overline{1, q}, \tag{21}$$

подставим (19) в (16), а (21) – в (20), и запишем условия на b:

$$\begin{array}{ll} X_I^P G b > 0, & X_I^P G b < c, \\ X_O^P G b > c, & X_I^{P'} G' b < 0. \end{array} \tag{22}$$

Условия (22) так же, как и условия (16), не являются достаточными для того, чтобы точки X_I принадлежали определяемой функцией V оценке области притяжения. Однако в предположении, что из (22) следует (4), и при выборе достаточно малого ε, условия (22) будут необходимыми для того, чтобы поверхность $\{x : V(x) = 1\}$ пересекала траектории (18) между соответствующими точками X_I и X_O, или, другими словами, чтобы $C_{t_1} \subset S \subset C_{t_1+\varepsilon}$.

Для проверки условий (4) при выполнении (22) выбор количества траекторий $\varphi_{(i)}$, а также количества точек X_I на них, остается свободным. При этом для системы (22) рассматривается только вопрос совместности; задача оптимизации не ставится, поскольку любая функция (10), удовлетворяющая (22), для которой выполнены (4), обеспечит выполнение $C \subset S$.

Применение методов внутренних точек. Условия (22) представляют собой систему линейных относительно b неравенств с числовыми в силу (19) и (21) коэффициентами и без ограничений на знаки b_i. Системы неравенств такого рода эффективно решаются методами внутренних точек [4].

Для того, чтобы привести системы (16) к пригодному для применения методов внутренних точек виду [4], необходимо избавиться от строгих неравенств, заменив их нестрогими. Перепишем (16) в виде

$$\begin{array}{ll} X_I^P G b \geqslant a, & X_I^P G b \leqslant c, \\ X_O^P G b \geqslant c, & X_I^{P'} G' b \leqslant -a, \end{array} \tag{23}$$

где $a > 0$ — некоторое малое число. Если некоторая функция V удовлетворяет условиям (4) и (16), то число a всегда можно выбрать, поскольку V вместе с $\dot{V}$ непрерывны на $C'_{t_1+\varepsilon}$. Если же функция V неизвестна, то выбор a определяется совместностью системы (23) наряду с ε и точками траекторий (18).

Следует также отметить, что выполнение неравенств

$$X_I^P G b \geqslant a, \quad X_I^P G b \leqslant c \tag{24}$$

при заданном $a > 0$, вместе с условиями

$$\forall x \in C'_{t_1} \ \ \exists x^* \in X_I : \ |x - x^*| < d, \tag{25}$$

где значение d определяется выбором точек X_I, можно использовать для проверки выполнения условий (4) на множестве C'_{t_1}.

5. Пример построения оценки. Построим область притяжения нулевого решения для системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2, \\ &\dot{x}_2 = -x_1 - kx_2 + ax_2^3, \qquad k = 0.3,\ a = 0.3. \end{aligned} \tag{26}$$

В качестве начального приближения для оценки области притяжения возьмем круг

$$C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2, \ r = 0.3\}; \tag{27}$$

несложно убедиться (например, с помощью квадратичной функции Ляпунова), что $C \subset \Omega$. Выберем траектории

$$\varphi_j(t) = \varphi(-t; (r\cos\frac{j\pi}{2}, r\sin\frac{j\pi}{2})), \quad j = \overline{1, 10},$$

и точки

$$X_I = \{\varphi_j(\frac{it_1}{10})\},\ j = \overline{1,10},\ i = \overline{0,10},$$
$$X_O = \{\varphi_j(t_1 + 1.0)\};\quad \text{здесь } t_1 = 7.0.$$

Зададим функцию Ляпунова в виде $V(x) = x^P Gb$, $P = (P_2, P_4, P_6)$,

$$P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad P_4 = \begin{pmatrix} i \\ 4-i \end{pmatrix},\ i = \overline{0,4};\quad P_6 = \begin{pmatrix} i \\ 6-i \end{pmatrix},\quad i = \overline{0,6},$$

и запишем неравенства (16) для этой функции. При выбранных значениях X_I, X_O и t_1 они совместны и $b = (b_{20}, b_{11}, b_{02}, b_{40}, b_{31}, \ldots, b_{04}, b_{60}, \ldots, b_{06})$,

$$\begin{array}{lll}
b_{20} = 2.605589 & b_{11} = 0.914291 & b_{02} = 2.328874 \\
b_{40} = -3.418812 & b_{31} = -3.668692 & b_{22} = -6.622354 \\
b_{13} = -2.696822 & b_{04} = -1.806172 & b_{60} = 2.185671 \\
b_{51} = 3.885916 & b_{42} = 7.191870 & b_{33} = 5.721249 \\
b_{24} = 4.751745 & b_{15} = 1.920195 & b_{06} = 0.502807
\end{array}$$

является допустимой точкой. График получаемой оценки области притяжения, а также вид самих траекторий φ_j, изображен на рис. 1.

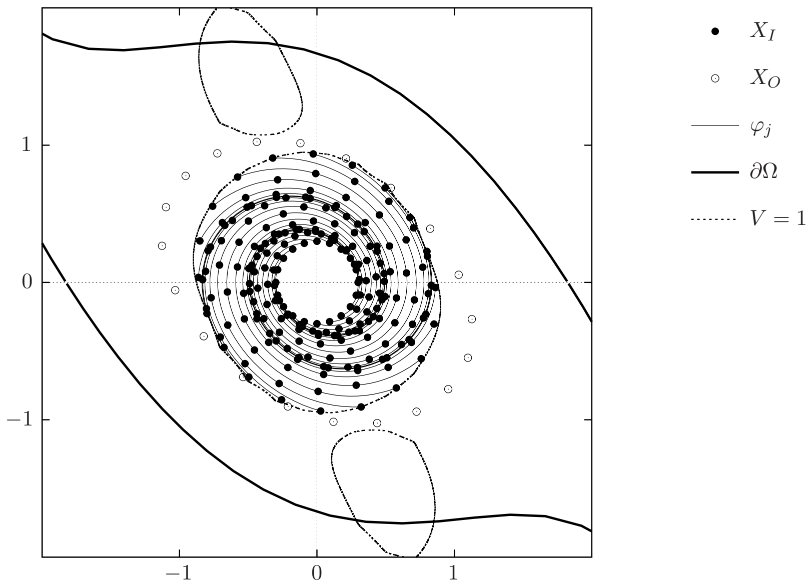

Рис. 1. Оценка области притяжения.

Заключение. В работе рассмотрена задача выбора функции Ляпунова V для получения оценки области притяжения изолированной особой точки автономной динамической системы. Выбор функции производился на множестве многочленов заданного вида с фиксированным числом коэффициентов. В качестве критерия выбора функции V брались условия на значения функции и ее производной в фиксированном числе точек; именно, требовалось, чтобы выбор функции не противоречил принадлежности заданных точек оценке области притяжения, определяемой этой функцией. Точки, в которых ставились условия, определялись численным интегрирование системы в обратном времени, начиная с точек границы известной оценки области притяжения. Выбор функции Ляпунова, таким образом, сводился к решению задачи совместности для системы линейных неравенств.

Задача точного определения оценки, задаваемой полученной функцией, не ставилась; предполагалось, что для этого применяются другие методы, а результат используется для коррекции выбора рассматриваемых точек.

1. *Genesio R., Tartaglia M., Vicino A.* On the estimation of asymptotic stability regions: State of the art and new proposals // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1985. – **30**, no. 8. – P. 747–755.
2. *Chesi G.* Estimating the domain of attraction for non-polynomial systems via LMI optimizations // Automatica. – 2009. – **45**, no. 6. – P. 1536-1541
3. *Topcu U., Packard A., Seiler P., Wheeler T.* Stability Region Analysis Using Simulations and Sum-of-Squares Programming // Proc. of the 2007 American Control Conf. – 2007. – P. 6009-6014
4. *Boyd S., Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. – SIAM:Philadelphia, 1994. – 198 p.
5. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 299 с.

A.S. Suykov

Estimating the region of attraction of dynamical systems using numerical simulation data

The paper deals with the problem of choosing a Lyapunov function to obtain an estimate of the region of attraction for an autonomous dynamical system. The choice criteria are formulated using numberical simulation data. The problem is then reduced to ensuring feasibility of a system of linear inequalities.

Keywords: *autonomous dynamical systems, Lyapunov functions, region of attraction.*

О.С. Суйков

Оцінка області притягання автономних динамічних систем за результатами чисельного інтегрування

Розглянуто задачу вибору функції Ляпунова з метою отримання оцінки області притягання автономної динамічної системи. Критерій вибору будується за результатами чисельного інтегрування системи. Задача зводиться до встановлення сумісності системи лінійних нерівностей.

Ключові слова: *автономні динамічні системи, функції Ляпунова, оцінка області притягання.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
axs@ukr.net
Получено 28.11.2011