

УДК 531.36

©2011. Е.В. Очеретнюк, В.И. Слынько

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ДЛИННОМ СТРУННОМ ПОДВЕСЕ

Рассматривается динамически симметричное твердое тело на струнном подвесе. Точка подвеса совершает периодические колебания. Исследуется потеря устойчивости системы при условии, что длина подвеса намного больше расстояния от центра масс тела до точки крепления подвеса. Исследования проводятся методами теории Флоке. Получены достаточные условия потери устойчивости.

**Ключевые слова:** *твердое тело на струнном подвесе, теория Флоке, параметрический резонанс.*

**Введение.** Исследованию устойчивости стационарных движений механических систем при параметрических возмущениях посвящено значительное количество работ [1–9]. В частности в работах [1, 2] рассматриваются нелинейные колебания двойного математического маятника в случае, когда точка подвеса совершает периодические импульсные колебания. В монографии [3] подведены итоги исследований крупномасштабных систем при структурных и параметрических возмущениях на основе многокомпонентных функций Ляпунова, включая матрично-значные функции Ляпунова. В статье [4] концепция матрично-значных функций Ляпунова применяется к исследованию устойчивости космической обсерватории при структурных и параметрических возмущениях. В работе [10] изучены движения сферического маятника в случае, когда точка подвеса совершает гармонические колебания малой амплитуды вдоль вертикали. Найдены все  $2\frac{\pi k}{m}$ -периодические  $(k, mN)$  симметричные движения. В статье [11] получены условия существования равновесия математического маятника с вибрирующей точкой подвеса в наклонном положении. В этой работе показано, что при любом ограниченном движении подвеса точными равновесными состояниями маятника могут быть лишь вертикальные положения. В работах [12, 13] исследуется параметрический резонанс в системах с “большими” возмущениями, описываемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка с периодически кусочно-постоянными коэффициентами, предложена техника, основанная на композиции элементарных фазовых потоков. Дана матрица монодромии и указан критерий параметрического резонанса, учитывающий возможность кратных мультипликаторов и действия диссипативных сил. В контексте этих исследований представляет интерес вопрос об устойчивости стационарных вращений абсолютно твердого тела при наличии параметрических воздействий (например, переменная длина подвеса, колебания точки подвеса или изменения инерциальных параметров абсолютно твердого тела). В настоящей работе рассматриваются задачи о потере устойчивости стационарного

вращения динамически симметричного твердого тела на струнном подвесе в случае, когда точка подвеса совершает периодические колебания. При этом ускорение движения этой точки описывается кусочно-постоянной функцией и дополнительно предполагается, что длина подвеса намного больше расстояния от центра масс тела до точки соединения тела с подвесом

**1. Постановка задачи.** Рассматривается динамически симметричное твердое тело, подвешенное на нерастяжимом невесомом стержне  $O_1O_2$ . Точка  $O_2$  находится на главной оси динамической симметрии тела. Введем систему координат  $O\xi\eta\zeta$  так, что ось  $\zeta$  – вертикальная, а плоскость  $\xi\eta$  – горизонтальная. Точка  $O_1$  имеет координаты  $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = \zeta(t)$ . В центре масс  $G$  твердого тела поместим начала двух других систем координат  $G\xi_1\eta_1\zeta_1$  и  $Gxyz$ . Оси первой системы координат постоянно параллельны соответствующим осям  $O\xi\eta\zeta$ , оси второй системы жестко связаны с твердым телом. При этом ось  $Gz$  направлена вдоль по оси динамической симметрии тела и является главной центральной осью инерции. Положение тела и жестко связанной с ним системы координат  $Gxyz$  относительно поступательно-перемещающейся системы  $G\xi_1\eta_1\zeta_1$  определим тремя углами Эйлера–Крылова  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . В свою очередь, углами  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  зададим положение стержня  $O_1O_2$  по отношению к системе координат  $O_1\xi\eta\zeta$ .

Предполагается, что точка подвеса движется по закону:

$$\zeta(t) = \begin{cases} -\frac{k_1 t^2}{2} + \frac{3k_1 + k_2}{8} \theta t, & t \in (n\theta, \frac{\theta}{2} + n\theta), \\ -\frac{k_2 t^2}{2} - \frac{k_1 - 5k_2}{8} \theta t - \frac{k_2 - k_1}{8} \theta^2, & t \in (\frac{\theta}{2} + n\theta, (n+1)\theta), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

В монографии [14] подытожены исследования динамики абсолютно твердого тела на струнном подвесе и показано, что без параметрических возмущений ( $k_1 = k_2 = 0$ ) динамически симметричное твердое тело будет устойчивым при высокоскоростном вращении, независимо от знака  $a$ , где  $a$  – расстояние от точки  $O_2$  до центра масс  $G$ .

Система уравнений движения допускает стационарный режим [14]:

$\alpha_1 = 0, \dot{\alpha}_1 = 0, \beta_1 = 0, \dot{\beta}_1 = 0, \beta = 0, \dot{\beta} = 0, \alpha = 0, \dot{\alpha} = 0, \dot{\gamma} = \omega, \gamma = \omega t + c$ , где  $\omega$  – угловая скорость вращения тела вокруг главной оси динамической симметрии тела.

Определим переменные возмущенного движения

$$x_1 = \alpha_1, \quad x_2 = \beta_1, \quad x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta.$$

Тогда в линейном приближении система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{x}_1 + mal \ddot{x}_3 + ml(g - \zeta_{tt}(t))x_1 &= 0, \\ ml^2 \ddot{x}_2 + mal \ddot{x}_4 + ml(g - \zeta_{tt}(t))x_2 &= 0, \\ mal \ddot{x}_1 + (A + ma^2) \ddot{x}_3 + C\omega \dot{x}_4 + ma(g - \zeta_{tt}(t))x_3 &= 0, \\ mal \ddot{x}_2 + (A + ma^2) \ddot{x}_4 - C\omega \dot{x}_3 + ma(g - \zeta_{tt}(t))x_4 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $m$  – масса тела;  $l$  – длина стержня  $O_1O_2$ ;  $a$  – расстояние от центра масс тела до точки  $O_2$ ;  $g$  – ускорение свободного падения;  $A, C$  – главные моменты инерции относительно центра масс  $G$ . Введем малый параметр  $\mu = \frac{a}{l}$ . Система дифференциальных уравнений (1) будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{A}y''(t) + \mathcal{G}y'(t) + f(t)y(t) = 0, \quad (2)$$

где  $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} ml^2I & ml^2\mu I \\ ml^2\mu I & (A + ml^2\mu^2)I \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C\omega J \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,

$$f(\tau) = \begin{cases} C_1, & t \in (n\theta, \frac{\theta}{2} + n\theta), \\ C_2, & t \in (\frac{\theta}{2} + n\theta, (n+1)\theta), \end{cases} \quad C_i = (g + k_j) \begin{pmatrix} ml^2I & 0 \\ 0 & ml^2\mu I \end{pmatrix}.$$

Система (2) является линейной системой дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для исследования неустойчивости системы (2) применим результаты теории Флоке. Для этого систему дифференциальных уравнений приведем к нормальной форме. Введем новые переменные  $z_1(t) = y(t)$ ,  $z_2(t) = \dot{y}(t)$ , тогда

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad \dot{z}_2(t) = -f(t)z_1(t) - Gz_2(t).$$

**2. Условия потери устойчивости.** С целью вычисления матрицы монодромии рассмотрим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\mathcal{A}\ddot{y}(t) + \mathcal{G}\dot{y}(t) + \mathcal{C}_j y(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение системы будет иметь вид

$$|\mathcal{A}\lambda^2 + \mathcal{G}\lambda + \mathcal{C}_j| = 0.$$

Подставив  $\mathcal{A}, \mathcal{G}, \mathcal{C}_j$  в характеристическое уравнение, и применяя формулу из [16, с. 55] для вычисления определителя блочной матрицы, получаем

$$\Delta(\lambda, \mu) = \det \left| Aml^2\lambda^4 I + ml^2C\omega J\lambda^3 + m^2l^2(g + k_j)\mu\lambda^2 I + \right. \\ \left. + ml^2(A + ml^2\mu^2)(g + k_j)\lambda^2 I + ml^2(g + k_j)C\omega J\lambda + m^2l^2(g + k_j)^2 I \right| = 0.$$

Вычисляя определитель, получим алгебраическое уравнение восьмого порядка

$$\Delta(\lambda, \mu) = \left( Aml^2\lambda^4 + ml^2(A + ml^2\mu^2 + ml^2\mu)(g + k_j)\lambda^2 + \right. \\ \left. + m^2l^2(g + k_j)^2\mu \right)^2 + (ml^2C\omega\lambda^3 + ml^2(g + k_j)C\omega\lambda)^2 = 0.$$

Это уравнение преобразуется в два алгебраических уравнения четвертого порядка:

$$Aml^2\lambda^4 + ml^2(A + ml^2\mu^2 + ml^2\mu)(g + k_j)\lambda^2 + \\ + m^2l^2(g + k_j)^2\mu \pm i(ml^2C\omega\lambda^3 + ml^2(g + k_j)C\omega\lambda) = 0.$$

Корни этих уравнений будем искать в виде разложений по степеням малого параметра  $\mu$ :  $\lambda = a_1\mu + a_2\mu^2 + o(\mu^2)$ .

$$\lambda = i\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + b_1\mu + b_2\mu^2 + o(\mu^2),$$

$$\lambda = -i\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + c_1\mu + c_2\mu^2 + o(\mu^2), \quad \lambda = -i\frac{C\omega}{A} + d_1\mu + d_2\mu^2 + o(\mu^2).$$

После подстановки в уравнения получаем корни

$$\lambda_{1,2}^{(j)} = \pm \left( \frac{ml(g+k_j)}{C\omega} \mu - \frac{Al^2(g+k_j)^2 m^2}{C^3 \omega^3} \mu^2 \right) i + o(\mu^2),$$

$$\lambda_{3,4}^{(j)} = \pm \left( \sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + \frac{1}{2} \frac{ml(g+k_j)}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + C\omega} \mu^2 \right) i + o(\mu^2),$$

$$\lambda_{5,6}^{(j)} = \pm \left( -\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} - \frac{1}{2} \frac{ml(g+k_j)}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} - C\omega} \mu^2 \right) i + o(\mu^2),$$

$$\lambda_{7,8}^{(j)} = \pm \left( -\frac{C\omega}{A} - \frac{ml(g+k_j)}{C\omega} \mu + \frac{ml^2(g+k_j)(C^4\omega^4 - ml(g+k_j)AC^2\omega^2 + m(g+k_j)^2A^3)}{C^3\omega^3((g+k_j)A^2 - C^2\omega^2l)} \mu^2 \right) i + o(\mu^2).$$

Для вычисления матрицы  $\Phi_j$  матрицу  $M_j$  приведем к действительной канонической форме  $D_j$ , где  $D_j$  – блочно-диагональная матрица

$$D_j = \text{diag}(\Lambda_1 J, \Lambda_2 J, \Lambda_3 J, \Lambda_4 J),$$

здесь  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda_n$  ( $n = \overline{1,4}$ ) – корни уравнения

$$Aml^2\Lambda^4 - ml^2(A + ml^2\mu^2 + ml^2\mu)(g+k_j)\Lambda^2 + m^2l^2(g+k_j)^2\mu + ml^2C\omega\Lambda^3 - ml^2(g+k_j)C\omega\Lambda = 0.$$

Очевидно, что

$$\Lambda_1^{(j)} = \frac{ml(g+k_j)}{C\omega} \mu - \frac{Al^2(g+k_j)^2 m^2}{C^3 \omega^3} \mu^2 + o(\mu^2),$$

$$\Lambda_2^{(j)} = \sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + \frac{1}{2} \frac{ml(g+k_j)}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + C\omega} \mu^2 + o(\mu^2),$$

$$\Lambda_3^{(j)} = -\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} - \frac{1}{2} \frac{ml(g+k_j)}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} - C\omega} \mu^2 + o(\mu^2),$$

$$\Lambda_4^{(j)} = -\frac{C\omega}{A} - \frac{ml(g+k_j)}{C\omega} \mu + \frac{ml^2(g+k_j)(C^4\omega^4 - ml(g+k_j)AC^2\omega^2 + m(g+k_j)^2A^3)}{C^3\omega^3((g+k_j)A^2 - C^2\omega^2l)} \mu^2 + o(\mu^2).$$

Пусть  $T_j$  – матрица перехода, т.е.  $T_j M_j = D_j T_j$ . Представим матрицу  $T_j$  в блочном виде

$$T_j = \begin{pmatrix} t_{11}^{(j)} J & t_{12}^{(j)} J & t_{13}^{(j)} I & t_{14}^{(j)} I \\ t_{21}^{(j)} J & t_{22}^{(j)} J & t_{23}^{(j)} I & t_{24}^{(j)} I \\ t_{31}^{(j)} J & t_{32}^{(j)} J & t_{33}^{(j)} I & t_{34}^{(j)} I \\ t_{41}^{(j)} J & t_{42}^{(j)} J & t_{43}^{(j)} I & t_{44}^{(j)} I \end{pmatrix}.$$

Решая уравнение

$$(T_j) \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ \gamma_{11} I & \gamma_{12} I & 0 & \Delta_1 J \\ \gamma_{21} I & \gamma_{22} I & 0 & \Delta_2 J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_4 J \end{pmatrix} (T_j),$$

где  $\gamma_{11} = -\frac{g+k_j}{l} - \frac{ml(g+k_j)}{A} \mu^2$ ,  $\gamma_{12} = \frac{ml(g+k_j)}{A} \mu^2$ ,  $\gamma_{21} = \frac{ml(g+k_j)}{A} \mu^2$ ,  $\gamma_{22} = -\frac{ml(g+k_j)}{A} \mu^2$ ,  $\Delta_1 = \frac{C\omega}{A} \mu$ ,  $\Delta_2 = -\frac{C\omega}{A}$ , находим элементы матрицы  $T_j$ :  $t_{n1}^{(j)} = \Lambda_n^{(j)} t_{n3}^{(j)}$ ,  $t_{n2}^{(j)} = \frac{(\Lambda_n^{(j)})^2 \gamma_{22} + (\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{21} \gamma_{12})}{\Lambda_n^{(j)} \gamma_{21}} t_{n3}^{(j)}$ ,  $t_{n3}^{(j)} = t_{n3}^{(j)}$ ,

$t_{n4}^{(j)} = -\frac{(\Lambda_j^{(j)})^2 + \gamma_{11}}{\gamma_{21}} t_{n3}^{(j)}$ ,  $n = \overline{1, 4}$ ,  $j = \overline{1, 2}$ . Положим  $t_{n3}^{(j)} = 1$ ,  $n = \overline{1, 4}$ , тогда разложения элементов  $T_j$ ,  $j = \overline{1, 2}$  с точностью до  $o(\mu^2)$  будут иметь вид:

$$t_{11}^{(j)} = \frac{ml(g+k_j)}{C\omega} \mu - \frac{Al^2(g+k_j)^2 m^2}{C^3 \omega^3} \mu^2, \quad t_{14}^{(j)} = \frac{A}{ml^2} - \frac{ml(g+k_j)A - C^2 \omega^2}{C^2 \omega^2} \mu^2,$$

$$t_{12}^{(j)} = \frac{C\omega}{l^2 m} + \frac{(g+k_j)A^2 - C^2 \omega^2 l}{lAC\omega} \mu + \frac{C^4 \omega^4 - 2ml(g+k_j)AC^2 \omega^2 + (g+k_j)^2 A^3 m}{C^3 \omega^3 A} \mu^2,$$

$$t_{13}^{(j)} = 1, \quad t_{21}^{(j)} = \sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + \frac{ml(g+k_j)}{2A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + 2C\omega} \mu^2, \quad t_{22}^{(j)} = -\frac{ml(g+k_j)}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}}} \mu^2, \quad t_{23}^{(j)} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 t_{24}^{(j)} &= -\frac{C\omega}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} + C\omega}\mu^2, & t_{31}^{(j)} &= -\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} - \frac{ml(g+k_j)}{2A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} - 2C\omega}\mu^2, \\
 t_{32}^{(j)} &= \frac{ml(g+k_j)}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}}}\mu^2, & t_{33}^{(j)} &= 1, & t_{34}^{(j)} &= -\frac{C\omega}{A\sqrt{\frac{g+k_j}{l}} - C\omega}\mu^2, \\
 t_{41}^{(j)} &= -\frac{C\omega}{A} - \frac{ml(g+k_j)}{C\omega}\mu + \frac{ml^2(g+k_j)(C^4\omega^4 - ml(g+k_j)AC^2\omega^2 + (g+k_j)^2A^3m)}{C^3\omega^3((g+k_j)A^2 - C^2\omega^2l)}\mu^2, \\
 t_{42}^{(j)} &= \frac{(g+k_j)A^2 - C^2\omega^2l}{lAC\omega}\mu + \frac{m(g+k_j)((g+k_j)A^2 + 2C^2\omega^2l)}{C^3\omega^3}\mu^2, & t_{43}^{(j)} &= 1, \\
 t_{44}^{(j)} &= \frac{(g+k_j)A^2 - C^2\omega^2l}{ml^2A(g+k_j)} - 2\mu + \\
 &+ \frac{lC^4\omega^4 - ml^2(g+k_j)AC^2\omega^2 + ml(g+k_j)^2A^3 + (g+k_j)A^2C^2\omega^2}{C^2\omega^2((g+k_j)A^2 - C^2\omega^2l)}\mu^2.
 \end{aligned}$$

Матрицу  $T_j$  разложим в ряд по степеням  $k_j/g$  с точностью до  $(k_j/g)^3$ :

$$T_j = L_0 + \frac{k_j}{g}L_1 + \left(\frac{k_j}{g}\right)^2 L_2,$$

где  $L_n = \begin{pmatrix} l_{11}^n J & l_{12}^n J & l_{13}^n I & l_{14}^n I \\ l_{21}^n J & l_{22}^n J & l_{23}^n I & l_{24}^n I \\ l_{31}^n J & l_{32}^n J & l_{33}^n I & l_{34}^n I \\ l_{41}^n J & l_{42}^n J & l_{43}^n I & l_{44}^n I \end{pmatrix}$ ,  $n = \overline{0, 2}$ , и элементы матриц, вычи-

сленные с точностью до  $\mu^3$ , имеют вид:  $l_{11}^0 = \frac{mlg}{C\omega}\mu - \frac{Al^2g^2m^2}{C^3\omega^3}\mu^2$ ,

$$l_{12}^0 = \frac{C\omega}{l^2m} + \frac{gA^2 - C^2\omega^2l}{lAC\omega}\mu + \frac{C^4\omega^4 - 2mlgAC^2\omega^2 + g^2A^3m}{C^3\omega^3A}\mu^2,$$

$$l_{13}^0 = 1, \quad l_{14}^0 = \frac{A}{ml^2} - \frac{mlgA - C^2\omega^2}{C^2\omega^2}\mu^2, \quad l_{21}^0 = \sqrt{g/l} + \frac{mlg}{2A\sqrt{g/l} + 2C\omega}\mu^2,$$

$$l_{22}^0 = -\frac{mlg}{A\sqrt{g/l}}\mu^2, \quad l_{23}^0 = 1, \quad l_{24}^0 = -\frac{C\omega}{A\sqrt{g/l} + C\omega}\mu^2, \quad l_{33}^0 = 1,$$

$$l_{31}^0 = -\sqrt{g/l} - \frac{mlg}{2A\sqrt{g/l} - 2C\omega}\mu^2, \quad l_{32}^0 = \frac{mlg}{A\sqrt{g/l}}\mu^2, \quad l_{34}^0 = -\frac{C\omega}{A\sqrt{g/l} - C\omega}\mu^2,$$

$$l_{41}^0 = -\frac{C\omega}{A} - \frac{mlg}{C\omega}\mu + \frac{ml^2g(C^4\omega^4 - mlgAC^2\omega^2 + g^2A^3m)}{C^3\omega^3(gA^2 - C^2\omega^2l)}\mu^2,$$

$$\begin{aligned}
 l_{42}^0 &= \frac{gA^2 - C^2\omega^2 l}{lAC\omega} \mu + \frac{mg(gA^2 + 2C^2\omega^2 l)}{C^3\omega^3} \mu^2, & l_{43}^0 &= 1, \\
 l_{44}^0 &= \frac{gA^2 - C^2\omega^2 l}{ml^2gA} - 2\mu + \frac{lC^4\omega^4 - ml^2gAC^2\omega^2 + mlg^2A^3 + gA^2C^2\omega^2}{C^2\omega^2(gA^2 - C^2\omega^2 l)} \mu^2, \\
 l_{11}^1 &= \frac{mlg}{C\omega} \mu - \frac{2Al^2g^2m^2}{C^3\omega^3} \mu^2, & l_{12}^1 &= \frac{gA}{lC\omega} \mu + \frac{2mg(gA^2 - lC^2\omega^2)}{C^3\omega^3} \mu^2, \\
 l_{13}^1 &= 0, & l_{14}^1 &= -\frac{mglA}{C^2\omega^2} \mu^2, & l_{21}^1 &= \frac{1}{2}\sqrt{g/l} + \frac{(\frac{A}{2}\sqrt{gl} + C\omega)mgl}{(A\sqrt{g/l} + C\omega)^2} \mu^2, \\
 l_{22}^1 &= -\frac{mgl}{2A\sqrt{g/l}} \mu^2, & l_{23}^1 &= 0, & l_{24}^1 &= \frac{A\sqrt{g/l}C\omega}{2(A\sqrt{g/l} + C\omega)^2} \mu^2, \\
 l_{31}^1 &= -\frac{1}{2}\sqrt{g/l} - \frac{mgl(A\sqrt{g/l} - 2C\omega)}{4(A\sqrt{g/l} - C\omega)^2} \mu^2, & l_{32}^1 &= \frac{mgl}{2A\sqrt{g/l}} \mu^2, & l_{33}^1 &= 0, \\
 l_{34}^1 &= \frac{A\sqrt{g/l}C\omega}{2(A\sqrt{g/l} - C\omega)^2} \mu^2, & l_{42}^1 &= -\frac{gA}{lC\omega} \mu + \frac{2mg(gA^2 + lC^2\omega^2)}{C^3\omega^3} \mu^2, & l_{43}^1 &= 0, \\
 l_{41}^1 &= \frac{mgl(2lgA^2C^2\omega^2 - g^2A^4 - l^2C^4\omega^4)}{(gA^2 - lC^2\omega^2)^2C\omega} \mu + \\
 &+ \frac{mgl^2(2mg^3A^5 + ml^2gAC^4\omega^4 - lC^6\omega^6 - 4mlg^2A^3C^2\omega^2)}{(gA^2 - lC^2\omega^2)^2C^3\omega^3} \mu^2, \\
 l_{44}^1 &= \frac{C^2\omega^2(g^2A^4 - 2lgA^2C^2\omega^2 + l^2C^2\omega^2)}{mlgA(gA^2 - lC^2\omega^2)^2} + \frac{ml^2C^2\omega^2 - 2AC^2\omega^2 - 2mglA^2}{(gA^2 - lC^2\omega^2)^2} \mu^2, \\
 l_{11}^2 &= -\frac{Al^2g^2m^2}{C^3\omega^3} \mu^2, & l_{12}^2 &= \frac{mg^2A^2}{C^3\omega^3} \mu^2, & l_{13}^2 &= 0, & l_{14}^2 &= 0, & l_{42}^2 &= \frac{mg^2A^2}{C^3\omega^3} \mu^2, \\
 l_{21}^2 &= -\frac{1}{8}\sqrt{gl} - \frac{(A\sqrt{g/l} + 4C\omega)mglA\sqrt{g/l}}{(A\sqrt{g/l} + C\omega)^3} \mu^2, & l_{22}^2 &= \frac{mgl}{A\sqrt{g/l}} \mu^2, & l_{23}^2 &= 0, \\
 l_{24}^2 &= -\frac{A\sqrt{g/l}C\omega(3A\sqrt{g/l} + C\omega)}{8(A\sqrt{g/l} + C\omega)^3} \mu^2, & l_{31}^2 &= \frac{1}{8}\sqrt{g/l} + \frac{mglA(A\sqrt{g/l} - 3C\omega)}{16(A\sqrt{g/l} - C\omega)^3} \mu^2, \\
 l_{32}^2 &= -\frac{mgl}{8A\sqrt{g/l}} \mu^2, & l_{33}^2 &= 0, & l_{34}^2 &= -\frac{A\sqrt{g/l}C\omega(3A\sqrt{g/l} - C\omega)}{8(A\sqrt{g/l} - C\omega)^3} \mu^2, \\
 l_{41}^2 &= \frac{ml^2g^2A}{(gA^2 - lC^2\omega^2)^3C^3\omega^3} (3ml^2gA^2C^4\omega^4 - 3mlg^2A^4C^2\omega^2 + mg^3A^6 - \\
 &\quad - ml^3C^6\omega^6 + lAC^6\omega^6) \mu^2, \\
 l_{43}^2 &= 0, & l_{44}^2 &= \frac{C^4\omega^4(3g^2lA^4 + l^3C^4\omega^4 - 3gl^2A^2C^2\omega^2)}{mglA(gA^2 - lC^2\omega^2)^3} + \frac{2lg^2A^4C^2\omega^2}{(gA^2 - lC^2\omega^2)^2} \mu^2.
 \end{aligned}$$

Для нахождения матрицы монодромии  $\Phi_j$  кроме матрицы перехода  $T_j$  необходима еще и матрица  $Q_j$ , обратная к матрице  $T_j$ , элементы которой вычислены с точностью до  $(k_j/g)^3$ :

$$\begin{aligned} Q_j = T_j^{-1} &= \left( L_0 + \frac{k_j}{g} L_1 + \left( \frac{k_j}{g} \right)^2 L_2 \right)^{-1} = L_0^{-1} \left( 1 + \frac{k_j}{g} L_1 L_0^{-1} + \left( \frac{k_j}{g} \right)^2 L_2 L_0^{-1} \right) = \\ &= L_0^{-1} - \frac{k_j}{g} L_0^{-1} L_1 L_0^{-1} + \left( \frac{k_j}{g} \right)^2 \left( L_0^{-1} L_1 L_0^{-1} L_1 L_0^{-1} - L_0^{-1} L_2 L_0^{-1} \right). \end{aligned}$$

Обозначим  $Q_0 = L_0^{-1}$  и вычислим ее с точностью до  $O(\mu^3)$  в блочной форме, используя формулу из [16, с. 57]:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} q_{11}J & q_{12}J & q_{13}J & q_{14}J \\ q_{21}J & q_{22}J & q_{23}J & q_{24}J \\ q_{31}I & q_{32}I & q_{33}I & q_{34}I \\ q_{41}I & q_{42}I & q_{43}I & q_{44}I \end{pmatrix}.$$

Для сокращения выкладок введем следующие замены:

$$d_1 = C^4 \omega^4 - mlgAC^2 \omega^2 + mg^2 A^3, \quad d_2 = \sqrt{g}A + C\omega\sqrt{l}, \quad d_3 = \sqrt{g}A - C\omega\sqrt{l}.$$

Тогда элементы матрицы  $Q_0$  будут иметь вид:  $q_{11} = -(m^2 l^4 \mu^2)/AC\omega$ ,

$$\begin{aligned} q_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{ml^{7/2}}{4A(d_2 d_3)^2} (A^4 g^{3/2} + 2l^2 m g^{3/2} A^3 - 2A^2 g m l^{5/2} C\omega - \\ &- 3C^2 \omega^2 l g^{1/2} A^2 - 2ml^3 AC^2 \omega^2 g^{1/2} + 2Al^{3/2} C^3 \omega^3 + 2ml^{7/2} C^3 \omega^3) \mu^2, \\ q_{13} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} - \frac{ml^{7/2}}{4A(d_2 d_3)^2} (g^{3/2} A^4 + 2l^2 g^{3/2} mA^3 + 2l^{5/2} C\omega A^2 mg + \\ &+ a^2 g^{1/2} l C^2 \omega^2 - 2AC^2 \omega^2 l^3 g^{1/2} m + 2AC^3 \omega^3 l^{3/2} - 2C^3 \omega^3 l^{7/2} m) \mu^2, \\ q_{14} &= \frac{ml^{7/2} g^{1/2} A (C^3 \omega^3 + g^{3/2} mA^2 l^{1/2} - l^{3/2} mg^{1/2} C^2 \omega^2)}{C\omega (d_2 d_3)^2} \mu^2, \\ q_{21} &= -\frac{ml^2}{C\omega} + \frac{m^2 l^3 (gA^2 + d_2 d_3)}{AC^3 \omega^3} \mu - \frac{ml^2}{A^2 C^5 \omega^5 d_3} (4mg^{5/2} A^5 - \\ &- 4mC\omega l^{1/2} g^2 A^4 - g^{3/2} l m C^2 \omega^2 A^3 + A^2 l^{3/2} m C^3 \omega^3 g - A^2 g^{1/2} C^4 \omega^4 + \\ &+ Ag^{1/2} l^2 m C^4 \omega^4 + AC^5 \omega^5 l^{1/2} - l^{5/2} C^5 \omega^5 m) \mu^2, \\ q_{22} &= \frac{ml^{5/2}}{2d_2} + \frac{ml^{9/2}}{2A(d_2 d_3)^2} (2g^{3/2} A^3 - 3gl^{1/2} C\omega A^2 + \\ &+ l^{3/2} C^3 \omega^3) \mu - \frac{m^2 l^5}{4A^2 C^4 \omega^4 (d_2 d_3)^3} (4ml^{1/2} g^{9/2} A^9 - 4g^4 l mA^8 C\omega - \\ &- 8ml^{3/2} g^{7/2} A^7 C^2 \omega^2 + 5A^6 g^5 l^{1/2} C^4 \omega^4 + 8A^6 g^3 l^2 m C^3 \omega^3 - 2A^5 l^{5/2} mg^{5/2} C^4 \omega^4 - \\ &- 8A^5 g^2 l C^5 \omega^5 - 4A^4 g^{3/2} l^{3/2} C^6 \omega^6 + 8A^4 g^2 l^3 m C^5 \omega^5 - 2A^3 l^{7/2} mg^{3/2} C^6 \omega^6 + \\ &+ 10A^3 gl^2 C^7 \omega^7 - 6A^2 gl^4 m C^7 \omega^7 - A^2 g^{1/2} l^{5/2} C^8 \omega^8 - 2Al^3 C^9 \omega^9 + 2ml^5 C^9 \omega^9) \mu^2, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 q_{23} &= -\frac{ml^{5/2}}{2d_3} - \frac{m^2l^{9/2}}{2A(d_2d_3)^2}(2g^{3/2}A^3 - l^{3/2}C^3\omega^3 + \\
 &+ 3gl^{1/2}A^2C\omega)\mu - \frac{m^2l^{11/2}}{4A^2C^4\omega^4(d_2d_3)^3}(4mg^{9/2}A^9 + 4l^{1/2}mg^4A^8C\omega - \\
 &- 8mlg^{7/2}A^7C^2\omega^2 - 8A^6ml^{3/2}g^3C^3\omega^3 + 5A^6g^{5/2}C^4\omega^4 + 8A^5g^2l^{1/2}C^5\omega^5 - \\
 &- 2A^5g^{5/2}ml^2C^4\omega^4 - 8A^4l^{5/2}mg^2C^5\omega^5 + 4A^4g^{3/2}lC^6\omega^6 - 2A^3gl^{3/2}C^7\omega^7 - \\
 &- 2A^3g^{3/2}ml^3C^6\omega^6 + 6A^2ml^{7/2}gC^7\omega^7 - A^2l^2g^{1/2}C^8\omega^8 + \\
 &+ 2Al^{5/2}C^9\omega^9 - 2ml^{9/2}C^9\omega^9)\mu^2, \\
 q_{24} &= \frac{A^2l^2mg}{C\omega d_2d_3} - \frac{m^2l^3Ag}{C^3\omega^3(d_2d_3)^2}(2g^2A^4 + l^2C^4\omega^4 - 5lgA^2C^2\omega^2)\mu - \\
 &- \frac{gm^2l^5}{C^5\omega^5(d_2d_3)^3}(4mg^4A^8 - 15lmg^3A^6C^2\omega^2 - g^2A^5C^4\omega^4 + 20ml^2g^2A^4C^4\omega^4 - \\
 &- A^3glC^6\omega^6 - 6A^2ml^3gC^6\omega^6 - 2A^2g^{1/2}l^{3/2}C^7\omega^7 + ml^4C^8\omega^8)\mu^2, \\
 q_{31} &= 0, \quad q_{32} = \frac{1}{2} - \frac{ml^{5/2}g^{1/2}C\omega}{4(d_2d_3)^2}(A^2g - 2g^{1/2}l^{1/2}AC\omega + lC^2\omega^2)\mu^2, \\
 q_{33} &= \frac{1}{2} - \frac{ml^{5/2}g^{1/2}C\omega}{4(d_2d_3)^2}(3A^2g + 2g^{1/2}l^{1/2}AC\omega - lC^2\omega^2)\mu^2, \\
 q_{34} &= \frac{mg^{3/2}l^{5/2}A^2C\omega}{(d_2d_3)^2}\mu^2, \quad q_{41} = \frac{m^2l^3g}{C^2\omega^2} - \frac{3m^3l^4g^2A}{C^4\omega^4}\mu^2, \\
 q_{42} &= -\frac{ml^2g^{1/2}}{2d_2} - \frac{m^2l^3g}{2(d_2d_3)^2}(lC^2\omega^2 + gA^2 - 2l^{1/2}g^{1/2}AC\omega)\mu + \frac{m^2l^5g}{(d_2d_3)^4}(g^2A^4 - \\
 &- mg^2l^2A^3 - 2l^{1/2}g^{3/2}A^3C\omega + 3ml^{5/2}g^{3/2}A^2C\omega - 3ml^3gAC^2\omega^2 + \\
 &+ 2l^{3/2}g^{3/2}AC^3\omega^3 - l^2C^4\omega^4 + ml^{7/2}g^{1/2}C^3\omega^3)\mu^2, \\
 q_{43} &= -\frac{ml^2g^{1/2}}{2d_3} - \frac{m^2l^3g}{2(d_2d_3)^2}(lC^2\omega^2 + gA^2 + 2l^{1/2}g^{1/2}AC\omega)\mu + \frac{m^2l^5g}{(d_2d_3)^4}(g^2A^4 - \\
 &- mg^2l^2A^3 + 4l^{1/2}g^{3/2}A^3C\omega - 3ml^{5/2}g^{3/2}A^2C\omega + 2lgA^2C^2\omega^2 - 3ml^3gAC^2\omega^2 + \\
 &+ l^2C^4\omega^4 - ml^{7/2}g^{1/2}C^3\omega^3)\mu^2, \\
 q_{44} &= \frac{ml^2gA}{d_2d_3} - \frac{m^2l^3g^2A^2(d_2d_3 - 2C^2\omega^2l)}{C^2\omega^2(d_2d_3)^2}\mu + \frac{m^2l^4g^{3/2}A}{C^4\omega^4(d_2d_3)^3}(3mg^{7/2}A^6 - \\
 &- 9mlg^{5/2}A^4C^2\omega^2 - g^{3/2}A^3C^4\omega^4 + 10ml^2g^{3/2}A^2C^4\omega^4 - l^{1/2}gA^2C^5\omega^5 - \\
 &- lg^{1/2}AC^6\omega^6 - l^{3/2}C^7\omega^7)\mu^2.
 \end{aligned}$$

Матрица монодромии будет иметь вид  $\Phi = Q_2 e^{\frac{D_2\theta}{2}} T_2 Q_1 e^{\frac{D_1\theta}{2}} T_1$ . Обозначим

$$Q_2 e^{\frac{D_2\theta}{2}} T_2 = V_0 + \frac{k_2}{g} V_1 + \left(\frac{k_2}{g}\right)^2 V_2 + O\left(\left(\frac{k_2}{g}\right)^3\right),$$

$$Q_1 e^{\frac{D_1 \theta}{2}} T_1 = W_0 + \frac{k_1}{g} W_1 + \left(\frac{k_1}{g}\right)^2 W_2 + O\left(\left(\frac{k_1}{g}\right)^3\right),$$

где

$$V_0 = Q_0 e^{\frac{D_2 \theta}{2}} L_0, \quad V_1 = Q_0 e^{\frac{D_2 \theta}{2}} L_1 - Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_2 \theta}{2}} L_0,$$

$$V_2 = Q_0 e^{\frac{D_2 \theta}{2}} L_2 - Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_2 \theta}{2}} L_1 + (Q_0 L_1 Q_0 L_1 Q_0 - Q_0 L_2 Q_0) e^{\frac{D_2 \theta}{2}} L_0,$$

$$W_0 = Q_0 e^{\frac{D_1 \theta}{2}} L_0, \quad W_1 = Q_0 e^{\frac{D_1 \theta}{2}} L_1 - Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 \theta}{2}} L_0,$$

$$W_2 = Q_0 e^{\frac{D_1 \theta}{2}} L_2 - Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 \theta}{2}} L_1 + (Q_0 L_1 Q_0 L_1 Q_0 - Q_0 L_2 Q_0) e^{\frac{D_1 \theta}{2}} L_0.$$

Подставляя эти формулы, получаем выражение для  $\Phi$  с точностью до  $\left(\frac{k^*}{g}\right)^3$ ,

$$k^* = \max\{k_1, k_2\}: \quad \Phi = (V_0 + \frac{k_2}{g} V_1 + \frac{k_2^2}{g^2} V_2)(W_0 + \frac{k_1}{g} W_1 + \frac{k_1^2}{g^2} W_2) = V_0 W_0 + \frac{k_2}{g} V_1 W_0 + \frac{k_1}{g} V_0 W_1 + \frac{k_1 k_2}{g^2} V_1 W_1 + \frac{k_1^2}{g^2} V_0 W_2 + \frac{k_2^2}{g^2} V_2 W_0. \quad \text{Для определения условий потери устойчивости необходимо вычислить след матрицы монодромии}$$

$$\begin{aligned} \text{sp}(\Phi) = & \text{sp}(V_0 W_0) + \frac{k_2}{g} \text{sp}(V_1 W_0) + \frac{k_1}{g} \text{sp}(V_0 W_1) + \frac{k_1 k_2}{g^2} \text{sp}(V_1 W_1) + \\ & + \frac{k_1^2}{g^2} \text{sp}(V_0 W_2) + \frac{k_2^2}{g^2} \text{sp}(V_2 W_0) + \dots \end{aligned}$$

Будем находить след матрицы каждого слагаемого по отдельности, используя тождество  $\text{sp}(AB) = \text{sp}(BA)$ :

$$\begin{aligned} \text{sp}(V_0 W_0) &= \text{sp}(e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}), \\ \text{sp}(V_1 W_0) &= -\text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) + \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) = 0, \\ \text{sp}(V_0 W_1) &= \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) - \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) = 0, \\ \text{sp}(V_1 W_1) &= \text{sp}(Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta} - Q_0 e^{\frac{D_2}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta} L_0 - \\ & - Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_2 + D_1}{2} \theta} L_1 + Q_0 e^{\frac{D_2}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta} L_1) = \\ & = 2\text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_2}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta}) - 2\text{sp}(L_1 Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}), \\ \text{sp}(V_2 W_0) &= \text{sp}(e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta} L_2 Q_0 + \text{sp}(L_1 Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) - \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_2}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta}) - \\ & - \text{sp}(e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta} L_2 Q_0)) = \text{sp}(L_1 Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) - \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_2}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta}), \\ \text{sp}(V_0 W_1) &= \text{sp}(e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta} L_2 Q_0 + \text{sp}(L_1 Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) - \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_2}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta}) - \\ & - \text{sp}(e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta} L_2 Q_0)) = \text{sp}(L_1 Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1 + D_2}{2} \theta}) - \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_2}{2} \theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2} \theta}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{sp}(\Phi) = \text{sp}(e^{\frac{D_1+D_2}{2}\theta}) + \bar{\eta} \left( \frac{k_1 - k_2}{g} \right)^2, \quad (3)$$

где  $\bar{\eta} = \text{sp}(L_1 Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1+D_2}{2}\theta}) - \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_2}{2}\theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2}\theta})$ .

Обозначим  $L_1 Q_0 = Z$ ,  $Z = [z_{ij}]_{i,j=1}^4$ ,

$$U_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad e^{\frac{D_1+D_2}{2}\theta} = \begin{pmatrix} U_{\phi_1+\phi'_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{\phi_2+\phi'_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{\phi_3+\phi'_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{\phi_4+\phi'_4} \end{pmatrix},$$

здесь  $\phi_j = \frac{\Lambda_j^{(1)}\theta}{2}$ ,  $\phi'_j = \frac{\Lambda_j^{(2)}\theta}{2}$ ,  $j = \overline{1,4}$ . Тогда выражения для нахождения следов матриц примут вид

$$\begin{aligned} \text{sp}(L_1 Q_0 L_1 Q_0 e^{\frac{D_1+D_2}{2}\theta}) &= (z_{11}^2 + z_{12}z_{21} + z_{13}z_{31} + z_{14}z_{41})U_{\phi_1+\phi'_1} + \\ &+ (z_{21}z_{12} + z_{22}^2 + z_{23}z_{32} + z_{24}z_{42})U_{\phi_2+\phi'_2} + (z_{31}z_{13} + z_{32}z_{23} + z_{33}^2 + z_{34}z_{43})U_{\phi_3+\phi'_3} + \\ &+ (z_{41}z_{14} + z_{42}z_{24} + z_{43}z_{34} + z_{44}^2)U_{\phi_4+\phi'_4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sp}(L_1 Q_0 e^{\frac{D_2}{2}\theta} L_1 Q_0 e^{\frac{D_1}{2}\theta}) &= z_{11}^2 U_{\phi_1+\phi'_1} + z_{12}z_{21} U_{\phi_1+\phi'_2} + z_{13}z_{31} U_{\phi_1+\phi'_3} + \\ &+ z_{14}z_{41} U_{\phi_1+\phi'_4} + z_{21}z_{12} U_{\phi_2+\phi'_1} + z_{22}^2 U_{\phi_2+\phi'_2} + z_{23}z_{32} U_{\phi_2+\phi'_3} + \\ &+ z_{24}z_{42} U_{\phi_2+\phi'_4} + z_{31}z_{13} U_{\phi_3+\phi'_1} + z_{32}z_{23} U_{\phi_3+\phi'_2} + z_{33}^2 U_{\phi_3+\phi'_3} + z_{34}z_{43} U_{\phi_3+\phi'_4} + \\ &+ z_{41}z_{14} U_{\phi_4+\phi'_1} + z_{42}z_{24} U_{\phi_4+\phi'_2} + z_{43}z_{34} U_{\phi_4+\phi'_3} + z_{44}^2 U_{\phi_4+\phi'_4}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выше формулы в  $\bar{\eta}$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \\ &= 2 \sum_{n=1}^3 \sum_{j=1+n}^4 z_{nj} z_{jn} [\cos(\phi_n + \phi'_n) + \cos(\phi_j + \phi'_j) - \cos(\phi_n + \phi'_j) - \cos(\phi_j + \phi'_n)]. \end{aligned}$$

Элементы  $z_{nj} z_{jn}$  с точностью до  $O(\mu^3)$  принимают вид

$$\begin{aligned} z_{12}z_{21} &= 0, \quad z_{13}z_{31} = 0, \quad z_{14}z_{41} = \frac{m^2 l^2 g^2 A^2}{C^4 \omega^4} \mu^2, \\ z_{23}z_{32} &= \frac{g(gA^2 + lC^2\omega^2)^2 - 4g^2 l A^2 C^2 \omega^2}{16l(A^2 g - lC^2\omega^2)^2} + \frac{ml^{5/2}C\omega}{8(gA^2 - lC^2\omega^2)^4} (g^{7/2}A^6 - l^{1/2}g^3A^5C\omega - \\ &- 3lg^{5/2}A^4C^2\omega^2 + 2l^{3/2}g^2A^3C^3\omega^3 + 3l^2g^{3/2}A^2C^4\omega^4 - l^{5/2}gAC^5\omega^5 - l^3g^{1/2}C^6\omega^6) \mu^2, \\ z_{24}z_{42} &= \frac{ml^4 g A C^3 \omega^3}{2(gA^2 - lC^2\omega^2)^3 (l^{1/2}g^{1/2}A + lC\omega)^2} (l^{1/2}g^{3/2}A^3 - lgA^2C\omega - \\ &- 3l^{3/2}g^{1/2}AC^2\omega^2 - l^2C^3\omega^3) \mu^2, \end{aligned}$$

$$z_{34}z_{43} = -\frac{ml^{7/2}g^{1/2}C^3\omega^3}{4(gA^2 - lC^2\omega^2)^3(l^{1/2}g^{1/2}A - lC\omega)^2}(l^{1/2}g^{1/2}A - lC\omega)(lgA^2C\omega - 3l^{3/2}g^{1/2}AC^2\omega^2 + l^2C^3\omega^3 + l^{1/2}g^{3/2}A^3)\mu^2.$$

Разности косинусов также раскладываем в ряды по  $k^*/g$  с точностью  $O(1)$ :

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_2 + \phi'_2) + \cos(\phi_3 + \phi'_3) - \cos(\phi_2 + \phi'_3) - \cos(\phi_3 + \phi'_2) = \\ & = \cos \frac{2gA + 2l^{1/2}g^{1/2}C\omega + ml^2g\mu^2}{l^{1/2}g^{1/2}A + lC\omega}\theta + \cos \frac{2gA - 2l^{1/2}g^{1/2}C\omega + ml^2g\mu^2}{l^{1/2}g^{1/2}A - lC\omega}\theta - \\ & \quad - 2 \cos \frac{ml^2gC\omega\mu^2}{2(gA^2 - lC^2\omega^2)}\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_1 + \phi'_1) + \cos(\phi_4 + \phi'_4) - \cos(\phi_1 + \phi'_4) - \cos(\phi_4 + \phi'_1) = \\ & = \cos\left(\frac{mgl}{C\omega}\mu - \frac{m^2l^2g^2A}{C^3\omega^3}\mu^2\right)\theta + \cos\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mgl}{C\omega}\mu + \frac{ml^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\mu^2\right)\theta - \\ & \quad - 2 \cos\left(-\frac{C\omega}{2A} - \frac{m^2l^2g^2A}{C^3\omega^3}\mu^2 + \frac{ml^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\mu^2\right)\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_3 + \phi'_3) + \cos(\phi_4 + \phi'_4) - \cos(\phi_3 + \phi'_4) - \cos(\phi_4 + \phi'_3) = \\ & = \cos\left(-\sqrt{g/l} - \frac{ml^{3/2}g}{d_3}\mu^2\right)\theta + \cos\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mgl}{C\omega}\mu + \frac{ml^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\mu^2\right)\theta - \\ & \quad - 2 \cos\left(-\frac{1}{2}\sqrt{g/l} - \frac{C\omega}{2A} - \frac{mlg}{2C\omega}\mu - \frac{ml^{3/2}g}{2d_3}\mu^2 + \frac{ml^2gd_1}{2C^3\omega^3d_2d_3}\mu^2\right)\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\phi_2 + \phi'_2) + \cos(\phi_4 + \phi'_4) - \cos(\phi_2 + \phi'_4) - \cos(\phi_4 + \phi'_2) = \\ & = \cos\left(\sqrt{g/l} + \frac{ml^{3/2}g}{d_2}\mu^2\right)\theta + \cos\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mgl}{C\omega}\mu + \frac{ml^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\mu^2\right)\theta - \\ & \quad - 2 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{g/l} - \frac{C\omega}{2A} - \frac{mlg}{2C\omega}\mu + \frac{ml^{3/2}g}{d_2}\mu^2 + \frac{ml^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\mu^2\right)\theta. \end{aligned}$$

После подстановки в  $\bar{\eta}$  получаем

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= \frac{g}{16l} \left( 2 \cos \left( \frac{\theta}{16} \sqrt{\frac{g}{l}} \left( \left( \frac{k_1}{g} \right)^2 + \left( \frac{k_2}{g} \right)^2 - 4 \frac{k_1}{g} - 4 \frac{k_2}{g} - 16 \right) \right) - \right. \\ & - 2 \cos \left( \frac{\theta}{16} \sqrt{\frac{g}{l}} \left( \left( \frac{k_1}{g} \right)^2 + \left( \frac{k_2}{g} \right)^2 - 4 \frac{k_1}{g} - 4 \frac{k_2}{g} \right) \right) - \frac{ml^{3/2}g^{3/2}A\theta}{16(d_2d_3)^3} \left( \left( (16 + 16 \frac{k_1}{g} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 16 \frac{k_2}{g} - 6 \left( \frac{k_1}{g} \right)^2 - 6 \left( \frac{k_2}{g} \right)^2 \right) lgA^2C^2\omega^2 - (16 + 12 \frac{k_1}{g} + 12 \frac{k_2}{g} + 3 \left( \frac{k_1}{g} \right)^2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +3\left(\frac{k_2}{g}\right)^2 l^2 C^4 \omega^4 - (16 + 4\frac{k_1}{g} + 4\frac{k_2}{g} - \left(\frac{k_1}{g}\right)^2 - \left(\frac{k_2}{g}\right)^2) g^2 A^4) \times \\
 & \times \sin\left(\frac{\theta}{16} \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\left(\frac{k_1}{g}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{g}\right)^2 - 4\frac{k_1}{g} - 4\frac{k_2}{g} - 16\right) + \left(\left(4\frac{k_1}{g} - 4\frac{k_2}{g} - \left(\frac{k_1}{g}\right)^2 - \right.\right.\right. \\
 & \left.\left.\left. - \left(\frac{k_2}{g}\right)^2\right) g^2 A^4 + \left(16\frac{k_2}{g} - 16\frac{k_1}{g} + 6\left(\frac{k_1}{g}\right)^2 - 6\left(\frac{k_2}{g}\right)^2\right) l g A^2 C^2 \omega^2 + \left(12\frac{k_1}{g} - 12\frac{k_2}{g} + \right.\right.\right. \\
 & \left.\left.\left. + 3\left(\frac{k_1}{g}\right)^2 - 3\left(\frac{k_2}{g}\right)^2\right) l^2 C^4 \omega^4\right) \sin\left(\frac{\theta}{16} \sqrt{\frac{g}{l}} \left(\left(\frac{k_1}{g}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{g}\right)^2 - 4\frac{k_1}{g} - 4\frac{k_2}{g}\right)\right)\right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, подставляя в (3) получаем условия потери устойчивости вращения динамически симметричного твердого тела на струнном подвесе при параметрических возмущениях (параметрического резонанса):

$$\begin{aligned}
 & \left| 2 \cos\left(\left(\frac{mga}{C\omega} - \frac{m^2 g^2 a^2 A}{C^3 \omega^3}\right)\theta\right) + 2 \cos\left(\left(-\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2 g}{2l^{1/2} d_3}\right)\theta\right) + \right. \\
 & \left. + 2 \cos\left(\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2 g d_1}{C^3 \omega^3 d_2 d_3}\right)\theta\right) + 2 \cos\left(\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2 g}{2l^{1/2} d_2}\right)\theta\right) + \right. \\
 & \left. + \frac{l}{4C^3 \omega^3 (d_2 d_3)^2} \left(-4(mag^3 A - \frac{1}{2} g^2 A^3 C^2 \omega^2 (4mal + A) + glAC^4 \omega^4 (mal + A) - \right.\right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} l C^6 \omega^6 (a + l) \frac{mag}{l} \sin\left(\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2 g d_1}{C^3 \omega^3 d_2 d_3}\right)\theta\right) + 2(2magA - C^2 \omega^2) \times \right. \\
 & \left. \times (d_2 d_3)^2 \frac{mag}{l} \sin\left(\left(\frac{mga}{C\omega} - \frac{m^2 g^2 a^2 A}{C^3 \omega^3}\right)\theta\right) + \left(\left(C^4 \omega^4 - \frac{3}{2l} ma^2 g AC^2 \omega^2\right) \sqrt{g/l} + \right. \\
 & \left. + \frac{ma^2 g}{2l} \left(\left(\frac{g}{l}\right)^{3/2} A^3 - 2C^3 \omega^3\right) + \frac{A^2}{l} (gA^2 - 2lC^2 \omega^2) \left(\frac{g}{l}\right)^{3/2}\right) \sin\left(\left(-\sqrt{g/l} - \frac{ma^2 g}{2l^{1/2} d_3}\right)\theta\right) - \right. \\
 & \left. - \left(\left(C^4 \omega^4 - \frac{3ma^2 g AC^2 \omega^2}{2l}\right) \sqrt{g/l} + \frac{ma^2 g}{2l} \left(\frac{g}{l}\right)^{3/2} A^3 + 2C^3 \omega^3\right) + \frac{A^2}{l} (d_2 d_3 - \right. \\
 & \left. - lC^2 \omega^2) \left(\frac{g}{l}\right)^{3/2} \sin\left(\left(\sqrt{g/l} + \frac{ma^2 g}{2l^{1/2} d_2}\right)\theta\right) l C^3 \omega^3 \theta\right) \left(\frac{k_1}{g} + \frac{k_2}{g}\right) + \right. \\
 & \left. + \left(-\frac{1}{C^4 \omega^4} (2m^2 a^2 g^2 A^2 \cos\left(\left(\frac{mga}{C\omega} - \frac{m^2 g^2 a^2 A}{C^3 \omega^3}\right)\theta\right) + \cos\left(\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \right.\right.\right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{ma^2 g d_1}{C^3 \omega^3 d_2 d_3}\right)\theta\right) - 2 \cos\left(\frac{C\omega(gA(A - ma^2) - lC^2 \omega^2)\theta}{2Ad_2 d_3}\right) - \left(\frac{1}{8(d_2 d_3)^2} (3lC^2 \omega^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + gA^2 + 2l^{1/2} g^{1/2} AC\omega)(3lC^2 \omega^2 + gA^2 - 2l^{1/2} g^{1/2} AC\omega) + \frac{mal^{1/2} C\omega}{4(d_2 d_3)^4} (g^{7/2} A^6 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - l^{1/2} gA^6 C\omega - 3lg^{5/2} A^4 C^2 \omega^2 + 2l^{3/2} g^2 A^3 C^3 \omega^3 + 3l^2 g^{3/2} A^2 C^4 \omega^4 - l^{5/2} gAC^5 \omega^5 - \right.\right. \\
 & \left. \left. - l^3 g^{1/2} C^6 \omega^6)\right) \cos\left(\frac{(2l^{1/2} g^{1/2} C\omega + gA + ma^2 g)\theta}{2l^{1/2} d_2}\right) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos \left( \frac{(-2l^{1/2}g^{1/2}C\omega + gA + ma^2g)\theta}{2l^{1/2}d_3} - 2 \cos \left( \frac{mA^2gC\omega\theta}{2d_2d_3} \right) \right) + \\
 & + \frac{a^2g^{1/2}C^3\omega^3}{2l^{5/2}d_2^2d_3^5} \left( \cos \left( \left( -\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3} \right) \theta \right) + \cos \left( \left( -\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3} \right) \theta \right) - \right. \\
 & - 2 \cos \left( \frac{1}{2} \left( -\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3} - \frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3} \right) \theta \right) - \frac{ml^{3/2}a^2gAC^3\omega^3}{d_2^5d_3^3} (g^{3/2}A^3 - \\
 & - l^{1/2}gA^2C\omega - 3lg^{1/2}AC^2\omega^2 - l^{3/2}C^3\omega^3) \left( \cos \left( \left( \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_2} \right) \theta \right) + \right. \\
 & + \cos \left( \left( -\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3} \right) \theta \right) - 2 \cos \left( \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3} - \frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3} \right) \theta \right) - \frac{m^2a^2g^2\theta^2}{2C^6\omega^6} (2magA - C^2\omega^2) \cos \left( \left( \frac{mga}{C\omega} - \frac{m^2g^2a^2A}{C^3\omega^3} \right) \theta \right) - \\
 & - \frac{m^2a^2g^2\theta^2}{C^6\omega^6(d_2d_3)^4} (mag^3A^5 - \frac{1}{2}g^2A^3C^2\omega^2(4mal + A) + lgAC^4\omega^4(mal + A) - \\
 & - \frac{1}{2}lC^6\omega^6(a + l)^2 \cos \left( \left( -\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3} \right) \theta \right) - \frac{1}{4} \cos \left( \left( \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_2} \right) \theta \right) \times \\
 & \times \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g(l^{1/2}d_2 + lC\omega)}{4ld_2^2} \right)^2 \theta^2 - \frac{1}{4} \cos \left( \left( -\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3} \right) \theta \right) \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} - \right. \\
 & \left. - \frac{ma^2g(d_3 - l^{1/2}C\omega)}{4l^{1/2}d_3^2} \right)^2 \theta^2 \frac{k_1k_2}{g^2} + \left( -\frac{m^2a^2g^2\theta^2}{4C^6\omega^6} (2magA - C^2\omega^2) \times \right. \\
 & \times \cos \left( \left( \frac{mga}{C\omega} - \frac{m^2g^2a^2A}{C^3\omega^3} \right) \theta \right) - \frac{lg^{1/2}\theta}{16(d_3)^3} \left( \left( \frac{g}{l} \right)^{3/2} A^3 - \frac{3gA^2C\omega}{l} + \sqrt{\frac{g}{l}} \left( \frac{ma^2gA^2}{2l} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + 3AC^2\omega^2 \right) - \frac{ma^2gAC\omega}{3l} - C^3\omega^3 \right) \sin \left( \left( -\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3} \right) \theta \right) - \frac{1}{8} \cos \left( \left( \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_2} \right) \theta \right) \times \\
 & \times \left( \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g(d_2 + l^{1/2}C\omega)}{4l^{1/2}d_2^2} \right)^2 \theta^2 - \frac{1}{8} \cos \left( \left( -\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3} \right) \theta \right) \left( -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} - \right. \\
 & \left. - \frac{ma^2g(d_3 - l^{1/2}C\omega)}{4l^{1/2}d_3^2} \right)^2 \theta^2 + \frac{m^2a^2g^2A\theta}{2C^3\omega^3} \sin \left( \left( \frac{mga}{C\omega} - \frac{m^2g^2a^2A}{C^3\omega^3} \right) \theta \right) + \frac{lg^{1/2}\theta}{16d_3^3} \left( \left( \frac{g}{l} \right)^{3/2} A^3 + \right. \\
 & \left. + \frac{3gA^2C\omega}{l} + \sqrt{\frac{g}{l}} \left( \frac{ma^2gA^2}{2l} + 3AC^2\omega^2 \right) + \frac{ma^2gAC\omega}{3l} - C^3\omega^3 \right) \sin \left( \left( \sqrt{\frac{g}{l}} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_2} \right) \theta \right) - \frac{m^2a^2g^2\theta^2}{2C^6\omega^6(d_2d_3)^4} (mag^3A^5 - \frac{1}{2}g^2A^3C^2\omega^2(4mal + A) + lgAC^4\omega^4(mal + \\
 & + A) - \frac{1}{2}lC^6\omega^6(a + l)^2 \cos \left( \left( -\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3} \right) \theta \right) - \frac{ma^2g^2A\theta}{2C^3\omega^3(d_2d_3)^3} (mg^3A^6 -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3mlg^2A^4C^2\omega^2 + 3ml^2gA^2C^4\omega^4 + lC^6\omega^6(A - ml^2)) \sin\left(\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\right)\theta\right) + \frac{m^2a^2g^2A^2}{C^4\omega^4} \left(\cos\left(\left(\frac{mga}{C\omega} - \frac{m^2g^2a^2A}{C^3\omega^3}\right)\theta\right) + \cos\left(\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\right)\theta\right) - 2 \cos\left(\frac{gA(A - ma^2) - lC^2\omega^2}{2Ad_2d_3}C\omega\theta\right) + \left(\frac{(d_2d_3)^2 - 4lgA^2C^2\omega^2}{16(d_2d_3)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{ma^2l^{1/2}g^{1/2}C\omega}{8(d_2d_3)^4} (g^3A^6 - l^{1/2}g^{5/2}A^5C\omega - 3lg^2A^4C^2\omega^2 + 2l^{3/2}g^{3/2}A^3C^3\omega^3 + \right. \\
 & \left. + 3l^2gA^2C^4\omega^4 - l^{5/2}g^{1/2}AC^5\omega^5 - l^3C^6\omega^6)\right) \left(\cos\left(\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_2}\right)\theta\right) + \right. \\
 & \left. + \cos\left(\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3}\right)\theta\right) - 2 \cos\left(\frac{ma^2gC\omega\theta}{2d_2d_3}\right) - \frac{ma^2l^{3/2}g^{1/2}C^3\omega^3}{4d_2^2d_3^5} (g^{3/2}A^3 - \right. \\
 & \left. - lg^{1/2}AC^2\omega^2 + l^{1/2}C\omega(gA^2 + lC^2\omega^2)\right) \left(\cos\left(\left(-\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3}\right)\theta\right) + \right. \\
 & \left. + \cos\left(\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\right)\theta\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(-\sqrt{\frac{g}{l}} - \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_3} - \frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\right)\theta\right) + \frac{ma^2l^{3/2}g^{3/2}AC^3\omega^3}{2d_2^5d_3^3} (gA^3 - l^{1/2}g^{1/2}A^2C\omega - 3lAC^2\omega^2) \left(\cos\left(\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_2}\right)\theta\right) + \cos\left(\left(-\frac{C\omega}{A} - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\right)\theta\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l}} + \frac{ma^2g}{2l^{1/2}d_2} - \frac{C\omega}{A} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{mga}{C\omega} + \frac{ma^2gd_1}{C^3\omega^3d_2d_3}\right)\theta\right) \left)\left(\left(\frac{k_1}{g}\right)^2 + \left(\frac{k_2}{g}\right)^2\right) \right) > 8, \quad \frac{a}{l} \ll 1.
 \end{aligned}$$

Положим  $k_1 = -k_2 = k$ . Области неустойчивости при  $\omega = 1\text{с}^{-1}$ ,  $C = 1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $A = 1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $l = 50\text{м}$ ,  $m = 1\text{кг}$ ,  $a = 1\text{м}$ ,  $g = 9,8\text{м}/\text{с}^2$  в пространстве параметров  $(\theta, \frac{k}{g})$  изображены на рис. 1 серым цветом.

Области неустойчивости при  $\omega = 10\text{с}^{-1}$ ,  $C = 0, 1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $A = 1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $l = 10\text{м}$ ,  $m = 5\text{кг}$ ,  $a = 0,5\text{м}$ ,  $g = 9,8\text{м}/\text{с}^2$  в пространстве параметров  $(\theta, \frac{k}{g})$  изображены на рис. 2 серым цветом.

Области неустойчивости при  $\omega = 10\text{с}^{-1}$ ,  $C = 0, 1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $A = 1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $l = 10\text{м}$ ,  $m = 5\text{кг}$ ,  $a = -0,5\text{м}$ ,  $g = 9,8\text{м}/\text{с}^2$  в пространстве параметров  $(\theta, \frac{k}{g})$  изображены на рис. 3 штриховкой.

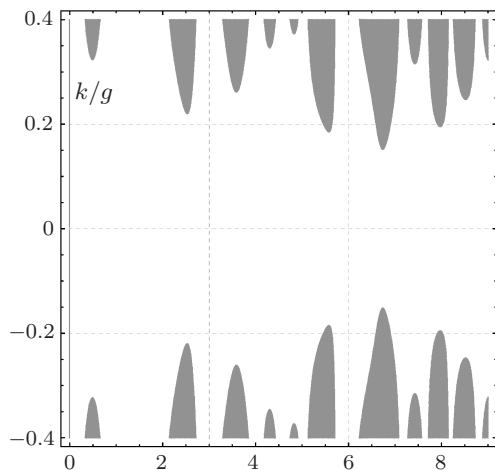


Рис. 1

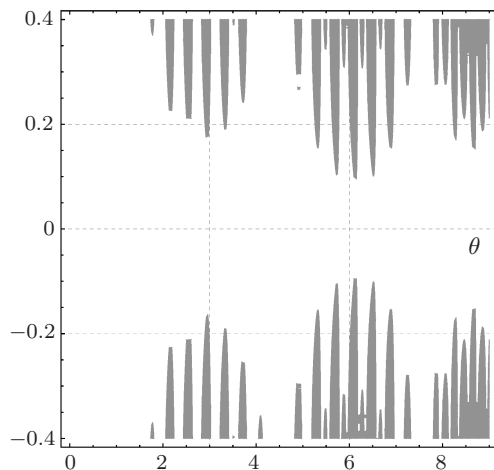


Рис. 2

Области неустойчивости при  $\omega = 1\text{с}^{-1}$ ,  $C = 2\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $A = 1\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ,  $l = 50\text{м}$ ,  $m = 1\text{кг}$ ,  $a = -1\text{м}$ ,  $g = 9,8\text{м}/\text{с}^2$  в пространстве параметров  $(\theta, \frac{k}{g})$  изображены на рис. 4 штриховкой.

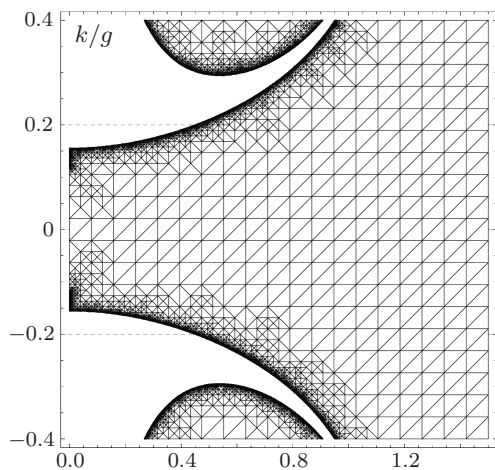


Рис. 3

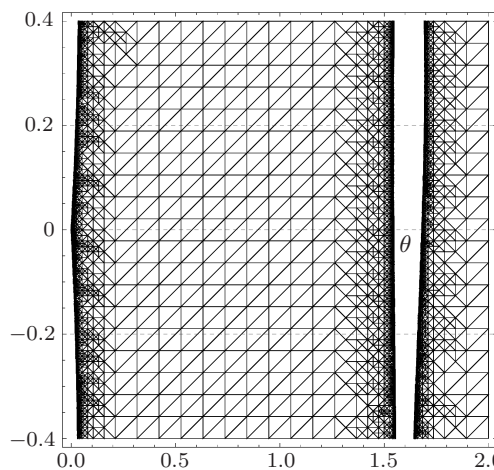


Рис. 4

1. Слынько В.И. Устойчивость движений в критических случаях голономной механической системы с двумя степенями свободы при наличии ударов // Прикл. механика. – 44. № 6. – С. 105–117.
2. Слынько В.И. О границах областей асимптотической устойчивости положений равновесия двухзвенного математического маятника с колеблющейся точкой подвеса // Там же – 2008. – 44. № 7. – С. 120–133.



3. Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях. – К: Наук. думка, 1984. – 307 с.
4. Martyniuk A.A., Miladzhanov V.G. The stability of an orbiting observatory with gyroscopic stabilization of motion // Intern. Appl. Mech. – 2000. – **36**. № 5. – P. 682–690.
5. Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. – М.: Наука, 1987. – 328 с.
6. Штокало И.З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Матем. сб. – 1946. – **19**. № 2. – С. 263–286.
7. Швыгин А.Л. Об устойчивости колебаний тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 103–108.
8. Пузырев В.Е. Об устойчивости равномерных вращений гиростата на колеблющемся основании // Там же. – 1999. – Вып. 28. – С. 88–91.
9. Пузырев В.Е. Пассивная стабилизация стационарного движения вращающегося маятника // Там же. – 2003. – Вып. 33. – С. 100–107.
10. Глухих Ю.Д. Колебания сферического маятника с вибрирующей точкой подвеса // Там же. – 2005. – Вып. 35. – С. 109–114.
11. Неспирный В.Н., Королев В.А. Стабилизация колебаний маятника с подвижной точкой подвеса относительно наклонного равновесия // Там же. – 2009. – Вып. 39. – С. 195–206.
12. Голубев Ю.Ф. Резонансы в линейных системах с одной степенью свободы и кусочно-постоянными параметрами // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 2. – С. 204–212.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
14. Ишминский А.Ю., Сторожженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи. – М.: Наука, 1991. – 330 с.
15. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
16. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Е.В. Ocheretnyuk, V.I. Slyn'ko

### Parametric resonance in problems of a dynamically symmetric rigid body suspended on a length string

Dynamically symmetric rigid body on a string suspension is considered. Suspension point performs periodic oscillations. The loss of stability of the system, provided that the length of the suspension is much greater than the distance from the center of mass of the body to the point of attachment rake is investigated. Research is carried out using the Floquet theory. The sufficient conditions of instability are obtained.

**Keywords:** rigid body on a string suspension, Floquet theory, parametric resonance .

Є.В. Очеретнюк, В.І. Слинько

### Параметричний резонанс у задачах динаміки твердого тіла на довгому струнному підвісі

Розглядається динамічно симетричне тверде тіло на струнному підвісі. Точка підвісу здійснює періодичні коливання. Досліджується втрата стійкості системи при умові, що довжина підвісу набагато більша відстані від центра мас тіла до точки кріплення до підвісу. Дослідження проводяться методами теорії Флоке. Отримано достатні умови втрати стійкості.

**Ключові слова:** тверде тіло на струнному підвісі, теорія Флоке, параметричний резонанс.

Ин-т механіки ім. С.П. Тимошенко НАН України, Київ  
ocheretnyukeugen@ukr.net, vitstab@ukr.net

Получено 12.09.11