УДК 531.38

©2011. **А.В. Мазнев**

# О ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае переменного гиростатического момента. Для уравнений движения определены условия существования двух линейных инвариантных соотношений по всем переменным. Найдена зависимость от времени величин гиростатического момента и условия на постоянные параметры обобщенных уравнений Кирхгофа, которые характеризуют новое решение этих уравнений.

**Ключевые слова:** *гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение.*

**Введение.** Классическая задача динамики о вращении твердого тела под действием силы тяжести получила многочисленные обобщения, среди которых можно отметить задачи о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом под действием силы тяжести [1–3] и под действием потенциальных и гироскопических сил [4]. Последняя задача является актуальной, поскольку описывается дифференциальными уравнениями, которые изоморфны уравнениям движения тела в жидкости [4, 5]. Обзор результатов, полученных в данном разделе механики, представлен в монографии [6].

Во многих объектах современной техники содержатся элементы, которые являются твердыми симметричными телами, вращающимися вокруг осей в теле-носителе. Это обстоятельство является практическим обоснованием актуальности моделирования движений системы связанных твердых тел класса гиростата [3]. Фундаментальными в этом направлении являются работы Ж. Лиувилля [7], В. Вольтерра [8], Н.Е. Жуковского [9], поскольку в них выведены уравнения движения гиростата с переменным гиростатическим моментом. Важным этапом в теоретическом моделировании системы гиростатов можно считать уравнения П.В. Харламова [3]. Простейшие классы движений гиростата с переменным гиростатическим моментом рассмотрены в [10–13].

Принципиальным отличием задач о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом от задач о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом является различие свойств взаимодействия теланосителя и носимых тел. В первом случае гиростатический момент $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{const}$. Во втором случае $\dot{\lambda}(t) = L(t)$, где функция $L(t)$ либо задана, либо подлежит определению.

**Постановка задачи.** Рассмотрим уравнения движения гиростата под действием специального класса потенциальных и гироскопических сил с учетом переменности гиростатического момента [3, 4]

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\omega} + \lambda(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}) - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu},\\ &\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\lambda} = L, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь введены обозначения: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения; $\boldsymbol{\omega} = a\boldsymbol{x} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $a = (a_{ij})$ – гирационный тензор; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $L$ – функция, характеризующая взаимодействие тела-носителя и носимых тел; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – постоянный единичный вектор, указывающий направление вектора гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор обобщенного цента масс гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\nu}$ и $\lambda$ обозначает дифференцирование по времени.

Система (1) допускает два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \tag{2}$$

где $k$ – произвольная постоянная.

Поставим задачу определения функции $L = L(t)$ при условии, что система (1) допускает два линейных инвариантных соотношения

$$x_1 - (b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3) = 0, \quad x_2 - (d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3) = 0. \tag{3}$$

Обозначая $x_3 = \sigma(t)$, продифференцируем левые части соотношений (3) в силу скалярных уравнений, вытекающих из (1), и учтем уравнение $\dot{\lambda} = L$. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} &a_{23}\sigma^2 - \lambda(D_0 + D_1\nu_1 + D_2\nu_2 + D_3\nu_3 + D_4\sigma) + \alpha_1\dot{\lambda} -\\ &\quad -\sigma(K_0 + K_1\nu_1 + K_2\nu_2 + K_3\nu_3) - (E_0 + E_1\nu_1 + E_2\nu_2 + E_3\nu_3 + E_{11}\nu_1^2 +\\ &\quad + E_{22}\nu_2^2 + E_{33}\nu_3^2 + 2E_{12}\nu_1\nu_2 + 2E_{13}\nu_1\nu_3 + 2E_{23}\nu_2\nu_3) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &a_{13}\sigma^2 + \lambda(F_0 + F_1\nu_1 + F_2\nu_2 + F_3\nu_3 + F_4\sigma) - \alpha_2\dot{\lambda} +\\ &\quad + \sigma(G_0 + G_1\nu_1 + G_2\nu_2 + G_3\nu_3) + M_0 + M_1\nu_1 + M_2\nu_2 + M_3\nu_3 +\\ &\quad + M_{11}\nu_1^2 + M_{22}\nu_2^2 + M_{33}\nu_3^2 + 2M_{12}\nu_1\nu_2 + 2M_{13}\nu_1\nu_3 + 2M_{23}\nu_2\nu_3 = 0; \end{aligned} \tag{5}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &D_0 = \alpha_2 C_0 - \alpha_3 B_0, \quad D_1 = \alpha_2 C_1 - \alpha_3 B_1, \quad D_2 = \alpha_2 C_2 - \alpha_3 B_2,\\ &D_3 = \alpha_2 C_3 - \alpha_3 B_3, \quad D_4 = \alpha_2 a_{33} - \alpha_3 a_{23}, \quad K_0 = a_{33} d_0 - B_0, \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
K_1 = a_{33}n_1 - a_{23}n_4 - B_1, \quad K_2 = a_{33}n_2 + a_{23}B_{23} + a_{13}b_3 - B_2,\\
K_3 = a_{33}n_5 - a_{13}b_2 + a_{23}n_7 - B_3, \quad E_0 = d_0C_0,\\
E_1 = d_0C_1 + n_1C_0 - n_4B_0, \quad E_2 = d_0C_2 + n_2C_0 + b_3A_0 + B_{23}B_0 - s_3,\\
E_3 = d_0C_3 + n_5C_0 + n_7B_0 - b_2A_0 + s_2, \quad E_{11} = n_1C_1 - n_4B_1,\\
E_{22} = n_2C_2 + B_{23}B_2 + b_3A_2 + C_{23}, \quad E_{33} = n_5C_3 + n_7B_3 - b_2A_3 - C_{23},\\
2E_{12} = n_2C_1 + n_1C_2 + b_3A_1 + B_{23}B_1 - n_4B_2 + C_{13},\\
2E_{13} = n_1C_3 + n_5C_1 - b_2A_1 + n_7B_1 - n_4B_3 - C_{12},\\
2E_{23} = n_2C_3 + n_5C_2 + n_7B_2 + B_{23}B_3 + b_3A_3 - b_2A_2 + C_{33} - C_{22};\\
F_0 = \alpha_3A_0 - \alpha_1C_0, \quad F_1 = \alpha_3A_1 - \alpha_1C_1, \quad F_2 = \alpha_3A_2 - \alpha_1C_2,\\
F_3 = \alpha_3A_3 - \alpha_1C_3, \quad F_4 = \alpha_3a_{13} - \alpha_1a_{33}, \quad G_0 = (a_{11} - a_{33})b_0 + a_{12}d_0,\\
G_1 = a_{11}b_1 + n_3a_{33} + a_{12}d_1 - a_{13}B_{13} - a_{23}d_3,\\
G_2 = a_{11}b_2 - n_1a_{33} + a_{12}d_2 + n_5a_{13},\\
G_3 = a_{11}b_3 - n_4a_{33} + a_{12}d_3 - n_6a_{13} + a_{23}d_1;
\end{gathered}
\tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
M_0 = -b_0C_0, \quad M_1 = n_3C_0 - b_0C_1 - d_3B_0 - B_{13}A_0 + s_3,\\
M_2 = -n_1C_0 + n_5A_0 - b_0C_2, M_3 = -n_4C_0 + d_1B_0 - n_6A_0 - b_0C_3 - s_1,\\
M_{11} = n_3C_1 - d_3B_1 - B_{13}A_1 - C_{13}, \quad M_{22} = -n_1C_2 + n_5A_2,\\
M_{33} = -n_4C_3 + d_1B_3 - n_6A_3 + C_{13},\\
2M_{12} = -n_1C_1 + n_3C_2 + n_5A_1 - d_3B_2 - B_{13}A_2 - C_{23},\\
2M_{13} = n_3C_3 - n_4C_1 - n_6A_1 + b_1B_1 - d_3B_3 - B_{13}A_3 + C_{11} - C_{33},\\
2M_{23} = -n_1C_3 - n_4C_2 + n_5A_3 - n_6A_2 + d_1B_2 + C_{12}.
\end{gathered}
\tag{7}
$$

В формулах (6), (7) введены обозначения

$$
\begin{gathered}
A_i = a_{11}b_i + a_{12}d_i, \quad B_i = a_{12}b_i + a_{22}d_i, \quad C_i = a_{13}b_i + a_{23}d_i \quad (i = \overline{0,3});\\
n_1 = d_1 + b_2 - b_{12}, \quad n_2 = d_2 - b_1 - B_{22}, \quad n_3 = d_2 - b_1 + B_{11},\\
n_4 = b_3 - B_{13}, \quad n_5 = d_3 - B_{23}, \quad n_6 = d_2 + B_{33}, \quad n_7 = b_1 + B_{33}.
\end{gathered}
\tag{8}
$$

В силу инвариантных соотношений (3), обозначений (8) и равенства $x_3 = \sigma$ компоненты вектора угловой скорости таковы

$$
\begin{gathered}
\omega_1 = A_0 + A_1\nu_1 + A_2\nu_2 + A_3\nu_3 + a_{13}\sigma,\\
\omega_2 = B_0 + B_1\nu_1 + B_2\nu_2 + B_3\nu_3 + a_{23}\sigma,\\
\omega_3 = C_0 + C_1\nu_1 + C_2\nu_2 + C_3\nu_3 + a_{33}\sigma.
\end{gathered}
\tag{9}
$$

Выпишем, используя соотношения (9), скалярные уравнения, вытекающие из второго уравнения системы (1):

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= C_0\nu_2 - B_0\nu_3 + C_1\nu_1\nu_2 - B_1\nu_1\nu_3 + (C_3 - B_2)\nu_2\nu_3 + C_2\nu_2^2 - \\ &\quad - B_3\nu_3^2 + \sigma(a_{33}\nu_2 - a_{23}\nu_3), \\ \dot{\nu}_2 &= A_0\nu_3 - C_0\nu_1 - C_2\nu_1\nu_2 + (A_1 - C_3)\nu_1\nu_3 + A_2\nu_2\nu_3 + A_3\nu_3^2 - \\ &\quad - C_1\nu_1^2 + \sigma(a_{13}\nu_3 - a_{33}\nu_1), \\ \dot{\nu}_3 &= B_0\nu_1 - A_0\nu_2 + (B_2 - A_1)\nu_1\nu_2 + B_3\nu_1\nu_3 - A_3\nu_2\nu_3 + B_1\nu_1^2 - \\ &\quad - A_2\nu_2^2 + \sigma(a_{23}\nu_1 - a_{13}\nu_2). \end{aligned} \tag{10}$$

Дифференциальное уравнение на функцию $\sigma + \alpha_3\lambda$ получим, спроектировав динамическое уравнение из (1) на третью координатную ось

$$\begin{aligned} (\sigma + \alpha_3\lambda)^{\cdot} &= \lambda(Q_0 + Q_1\nu_1 + Q_2\nu_2 + Q_3\nu_3 + Q_4\sigma) + \\ &\quad + \sigma(L_0 + L_1\nu_1 + L_2\nu_2 + L_3\nu_3) + R_0 + R_1\nu_1 + R_2\nu_2 + R_3\nu_3 + \\ &\quad + R_{11}\nu_1^2 + R_{22}\nu_2^2 + R_{33}\nu_3^2 + 2R_{12}\nu_1\nu_2 + 2R_{13}\nu_1\nu_3 + 2R_{23}\nu_2\nu_3, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} &Q_0 = \alpha_1 B_0 - \alpha_2 A_0, \quad Q_1 = \alpha_1 B_1 - \alpha_2 A_1, \quad Q_2 = \alpha_1 B_2 - \alpha_2 A_2, \\ &Q_3 = \alpha_1 B_3 - \alpha_2 A_3, \quad Q_4 = \alpha_1 a_{23} - \alpha_2 a_{13}, \quad L_0 = a_{23} b_0 - a_{13} d_0, \\ &L_1 = a_{23} m_1 - a_{13} m_2, \quad L_2 = a_{23} m_3 - a_{13} m_4, \quad L_3 = a_{23} n_4 - a_{13} n_5, \\ &R_0 = b_0 B_0 - d_0 A_0, \quad R_1 = m_1 B_0 + b_0 B_1 - m_2 A_0 - d_0 A_1 - s_2, \\ &R_2 = m_3 B_0 + b_0 B_2 - m_4 A_0 - d_0 A_2 + s_1, \\ &R_3 = n_4 B_0 + b_0 B_3 - n_5 A_0 - d_0 A_3, \quad R_{11} = m_1 B_1 - m_2 A_1 + C_{12}, \\ &R_{22} = m_3 B_2 - m_4 A_2 - C_{12}, \quad R_{33} = n_4 B_3 - n_5 A_3, \\ &2R_{12} = m_3 B_1 + m_1 B_2 - m_4 A_1 - m_2 A_2 + C_{22}, \\ &2R_{13} = n_4 B_1 + m_1 B_3 - n_5 A_1 - m_2 A_3 + C_{23}, \\ &2R_{23} = n_4 B_2 + m_3 B_3 - n_5 A_2 - m_4 A_3 - C_{13}, \\ &m_1 = b_1 - B_{11}, \quad m_2 = d_1 - B_{12}, \quad m_3 = b_2 - B_{12}, \quad m_4 = d_2 - B_{22}. \end{aligned} \tag{12}$$

Интеграл моментов из (2) позволяет выразить переменную $\sigma$ через переменные $\nu_i$ $(i = \overline{1,3})$ и $\lambda$:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{1}{\nu_3}\Big[&k - b_0\nu_1 - d_0\nu_2 + (\frac{1}{2}B_{11} - b_1)\nu_1^2 + (\frac{1}{2}B_{22} - d_2)\nu_2^2 + \\ &+ \frac{1}{2}B_{33}\nu_3^2 - \lambda(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 + \alpha_3\nu_3)\Big]. \end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, задача исследования условий существования у уравнений (1) инвариантных соотношений (3) может быть сведена к интегрированию уравнений (4), (5), (11) с интегралами $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1$ и (13).

**Случай $\boldsymbol{\lambda=\lambda_0+\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\lambda_3\nu_3}$.** Рассмотрим случай, когда $\lambda(t)$ является линейной функцией от $\nu_1(t),\nu_2(t),\nu_3(t)$, т.е. положим в (4), (5), (11), (13)

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\lambda_3\nu_3. \tag{14}$$

Подставим (14) в выражение (13) и воспользуемся равенством $\nu_3^2=1-\nu_1^2-\nu_2^2$. Тогда получим

$$\begin{aligned}\sigma=\frac{1}{\nu_3}\big(&\varepsilon_0+\varepsilon_1\nu_1+\varepsilon_2\nu_2+\varepsilon_3\nu_3+\varepsilon_{11}\nu_1^2+\varepsilon_{22}\nu_2^2+\\&+2\varepsilon_{12}\nu_1\nu_2+2\varepsilon_{13}\nu_1\nu_3+2\varepsilon_{23}\nu_2\nu_3\big),\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0=k-\lambda_3\alpha_3+\frac{1}{2}B_{33},\qquad \varepsilon_1=-b_0-\lambda_0\alpha_1,\qquad \varepsilon_2=-d_0-\lambda_0\alpha_2,\\&\varepsilon_3=-\lambda_0\alpha_3,\qquad \varepsilon_{11}=\frac{1}{2}(B_{11}-B_{33}-2b_1-2\lambda_1\alpha_1+2\lambda_3\alpha_3),\\&\varepsilon_{22}=\frac{1}{2}(B_{22}-B_{33}-2\alpha_2-2\lambda_2\alpha_2+2\lambda_3\alpha_3),\\&2\varepsilon_{12}=B_{12}-\alpha_1-b_2-\lambda_1\alpha_2-\lambda_2\alpha_1,\\&2\varepsilon_{13}=B_{13}-b_3-\lambda_1\alpha_3-\lambda_3\alpha_1,\qquad 2\varepsilon_{23}=B_{23}-\alpha_3-\lambda_2\alpha_3-\lambda_3\alpha_2.\end{aligned} \tag{16}$$

Подставим выражения (14), (15) в уравнения (4), (5) и учтем уравнения Пуассона (10) на инвариантном соотношении (15). Потребуем, чтобы полученные уравнения выполнялись для всех значений $\nu_1,\nu_2,\nu_3$. Тогда нетрудно показать, что должны выполняться равенства

$$a_{13}=0,\qquad a_{23}=0. \tag{17}$$

Поворот подвижной системы координат вокруг третьей координатной оси не изменяет структуры инвариантных соотношений (3), т. е. выбором этой системы можно добиться условия $a_{12}=0$. Уравнения Пуассона (10) в обозначениях (8) при выполнении условий $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ примут вид

$$\begin{aligned}\dot\nu_1=&\frac{1}{\nu_3}\Big[a_3\nu_2(\varepsilon_0+\varepsilon_1\nu_1+\varepsilon_2\nu_2+\varepsilon_3\nu_3+\varepsilon_{11}\nu_1^2+\varepsilon_{22}\nu_2^2+2\varepsilon_{12}\nu_1\nu_2+\\&+2\varepsilon_{13}\nu_1\nu_3+2\varepsilon_{23}\nu_2\nu_3)-a_2\nu_3^2(d_0+d_1\nu_1+d_2\nu_2+d_3\nu_3)\Big],\\\dot\nu_2=&\frac{1}{\nu_3}\Big[a_1\nu_3^2(b_0+b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_3\nu_3)-a_3\nu_1(\varepsilon_0+\varepsilon_1\nu_1+\varepsilon_2\nu_2+\varepsilon_3\nu_3+\\&+\varepsilon_{11}\nu_1^2+\varepsilon_{22}\nu_2^2+2\varepsilon_{12}\nu_1\nu_2+2\varepsilon_{13}\nu_1\nu_3+2\varepsilon_{23}\nu_2\nu_3)\Big],\\\dot\nu_3=&a_0d_0\nu_1-a_1b_0\nu_2+(a_2d_2-a_1b_1)\nu_1\nu_2+a_2d_3\nu_1\nu_3-a_1b_3\nu_2\nu_3+\\&+a_2d_1\nu_1^2-a_1b_2\nu_2^2.\end{aligned} \tag{18}$$

В уравнениях (18) учтены обозначения $a_{ii} = a_i \quad (i = \overline{1,3})$, которые будем использовать и в дальнейшем.

Условия (17) и уравнения (18) позволяют несколько упростить указанные выше преобразования системы (4), (5). Потребуем, чтобы редуцированные уравнения были тождествами на сфере Пуассона:

$$\lambda_0\alpha_2 a_3 + (a_3 - a_2)d_0 = 0, \qquad \lambda_0\alpha_1 a_3 + (a_3 - a_1)b_0 = 0,$$
$$\lambda_1\alpha_2 a_3 + (a_3 - a_2)d_1 + a_3(b_2 - B_{12} + \alpha_1\lambda_2) = 0$$

$$\begin{aligned} &\lambda_2\alpha_2 a_3 + (a_3 - a_2)d_2 - a_3(b_1 + B_{22} + \alpha_1\lambda_1) = 0, \\ &\lambda_1\alpha_1 a_3 + (a_3 - a_1)b_1 - a_3(d_2 + B_{11} + \alpha_2\lambda_2) = 0, \\ &\lambda_2\alpha_1 a_3 + (a_3 - a_1)b_2 + a_3(d_1 - B_{12} + \alpha_2\lambda_1) = 0; \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_0 D_0 + \varepsilon_0\beta_0 + \lambda_3 D_3 + \alpha_1(\lambda_1 a_2 d_3 - \lambda_2 a_1 b_3) + E_0 + E_{33} = 0, \\ &\lambda_0 D_1 + \varepsilon_1\beta_1 + \lambda_1 D_0 - \alpha_1\lambda_3 a_2 d_0 + E_1 = 0, \\ &\lambda_0 D_2 + \varepsilon_2\beta_0 + \lambda_2 D_0 + \alpha_1\lambda_3 a_1 b_0 + E_2 = 0, \\ &\lambda_0 D_3 + \varepsilon_3\beta_0 + \lambda_3 D_0 + \alpha_1(\lambda_1 a_2 d_0 - \lambda_2 a_1 b_0) + E_3 = 0, \\ &\lambda_1 D_3 + \lambda_3 D_1 + \alpha_1(\lambda_1 a_2 d_1 - \lambda_2 a_1 b_1 - \lambda_3 a_2 d_3) + 2\varepsilon_{13}\beta_0 + 2E_{13} = 0, \\ &\lambda_2 D_3 + \lambda_3 D_2 + \alpha_1(\lambda_1 a_2 d_2 - \lambda_2 a_1 b_2 + \lambda_3 a_1 b_3) + 2\varepsilon_{23}\beta_0 + 2E_{23} = 0, \\ &\lambda_1 D_1 - \lambda_3 D_3 + \beta_0\varepsilon_{11} + \alpha_1(\lambda_2 a_1 b_3 - \lambda_1 a_2 d_3 - \lambda_3 a_2 d_1) + E_{11} - E_{33} = 0, \\ &\lambda_2 D_2 - \lambda_3 D_3 + \beta_0\varepsilon_{22} + \alpha_1(\lambda_2 a_1 b_3 - \lambda_1 a_2 d_3 + \lambda_3 a_1 b_2) + E_{22} - E_{33} = 0, \\ &\lambda_2 D_1 + \lambda_1 D_2 + 2\beta_0\varepsilon_{12} - \alpha_1\lambda_3(a_2 d_2 - a_1 b_1) + 2E_{12} = 0; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_0 F_0 + \lambda_3 F_3 + \varepsilon_0\gamma_0 + \alpha_2(\lambda_1 a_2 d_3 - \lambda_2 a_1 b_3) + M_0 + M_{33} = 0, \\ &\lambda_0 F_1 + \lambda_1 F_0 + \varepsilon_1\gamma_0 - \alpha_2\lambda_3 a_2 d_0 + M_1 = 0, \\ &\lambda_0 F_2 + \lambda_2 F_0 + \varepsilon_2\gamma_0 + \alpha_2\lambda_3 a_1 b_0 + M_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 F_1 - \lambda_3 F_3 + \varepsilon_{11}\gamma_0 + \alpha_2(\lambda_2 a_1 b_3 - \lambda_1 a_2 d_3 - \lambda_3 a_2 d_1) + M_{11} - M_{33} = 0, \\ &\lambda_2 F_2 - \lambda_3 F_3 + \varepsilon_{22}\gamma_0 + \alpha_2(\lambda_2 a_1 b_3 - \lambda_1 a_2 d_3 - \lambda_3 a_1 b_2) + M_{22} - M_{33} = 0, \\ &\lambda_1 F_2 + \lambda_2 F_1 + 2\varepsilon_{12}\gamma_0 - \alpha_2\lambda_3(a_2 d_2 - a_1 b_1) + 2M_{12} = 0, \\ &\lambda_3 F_0 + \lambda_0 F_3 + \varepsilon_3\gamma_0 + \alpha_2(\lambda_1 a_2 d_0 - \lambda_2 a_1 b_0) + M_3 = 0, \\ &\lambda_3 F_1 + \lambda_1 F_3 + 2\varepsilon_{13}\gamma_0 + \alpha_2(\lambda_1 a_2 d_1 - \lambda_2 a_1 b_1 - \lambda_3 a_2 d_3) + 2M_{13} = 0, \\ &\lambda_3 F_2 + \lambda_2 F_3 + 2\varepsilon_{23}\gamma_0 + \alpha_2(\lambda_1 a_2 d_2 - \lambda_2 a_1 b_1 + \lambda_3 a_1 b_3) + 2M_{23} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\beta_0 = \alpha_2\lambda_3 a_3 + (a_3 - a_2)d_3 - a_3 B_{23}, \quad \gamma_0 = \alpha_1\lambda_3 a_3 + (a_3 - a_1)b_3 - a_3 B_{13}. \tag{22}$$

Учитывая обозначения (6)–(8), (16), в равенствах (19)–(21) получим условия существования у уравнений (1) инвариантных соотношений (3) с учетом

(14), (15). Для завершения интегрирования системы (1) необходимо найти решение уравнения (11), в обозначениях (12), а также решение уравнений Пуассона (18). Поскольку выражение для $\sigma$ из (15) получено на основании первого интеграла моментов из (2), то одно из уравнений (4), (5), (11) можно заменить соотношением (15). Прямой подстановкой (14), (15), с учетом уравнений (18), в уравнение (11) можно показать, что оно выполняется тождественно на основании равенств (19)–(21). Таким образом, необходимо показать разрешимость системы (19)–(21) и выполнить интегрирование уравнений (18).

**Случай $\boldsymbol{\alpha_3 = \alpha_2 = 0}$.** Положим в равенствах (19)–(21) $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = \alpha_2 = 0$. Тогда они существенно упрощаются и можно привести пример разрешимости уравнений (19)–(21)

$$\begin{gathered} b_0 = d_0 = 0, \quad \lambda_0 = \frac{s_1}{a_1 b_3}, \quad \lambda_1 = \frac{a_1 B_{13}}{a_1 - a_3}, \quad \lambda_2 = \frac{a_2 B_{23}}{a_2 - a_3}, \\ \lambda_3 = B_{33} + \frac{a_3(a_1 + a_2)}{a_2 \Delta}[(a_2 - a_3)B_{11} - a_3 B_{22}], \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} b_2 = 0, \quad d_1 = 0, \quad b_1 = \frac{a_3}{\Delta}[(a_2 - a_3)B_{11} - a_3 B_{22}], \\ d_2 = \frac{a_3}{\Delta}[(a_1 - a_3)B_{22} - a_3 B_{11}], \quad \Delta = a_2 a_3 + a_1 a_3 - a_1 a_2, \\ b_3 = \frac{a_3 B_{13}}{a_3 - a_1}, \quad d_3 = \frac{a_3 B_{23}}{a_3 - a_2}, \end{gathered} \tag{24}$$

$$s_3 = -\frac{s_1 b_1}{b_3}, \quad s_2 = -\frac{s_1 a_2 d_3}{a_1 b_3}, \quad B_{12} = 0, \tag{25}$$

$$\begin{gathered} B_{11}(a_2 a_3 + a_1 a_2 - a_1 a_3) + B_{22}(a_2 a_3 - a_1 a_3 - a_1 a_2) = 0, \\ C_{12} = 0, \quad C_{13} = \frac{a_1 a_3 b_1 B_{13}}{a_1 - a_3}, \quad C_{23} = \frac{a_1 a_3 b_1 B_{23}}{a_2 - a_3}, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} C_{22} = C_{33} + \frac{a_1 a_3^2 B_{13}^2}{(a_1 - a_3)^2} + \frac{a_2 a_3^2 B_{23}^2}{(a_2 - a_3)^2} - \frac{a_1^2 b_1^2}{a_2}, \\ C_{11} = C_{33} + \frac{a_1 a_3^2 B_{13}^2}{(a_1 - a_3)^2} + \frac{a_2 a_3^2 B_{23}^2}{(a_2 - a_3)^2} - a_1 b_1^2, \end{gathered} \tag{27}$$

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{23} = 0. \tag{28}$$

В условиях (23)–(28) другие значения параметров из (15) не выписаны, поскольку выражение (15) удобно представить в виде

$$\sigma = \frac{1}{\nu_3}(g_0 + g_3 \nu_3 + g_{33} \nu_3^2), \tag{29}$$

где

$$g_0 = k - b_1 + \frac{1}{2}B_{11}, \qquad g_3 = -\lambda_0, \qquad g_{33} = -d_2 - \frac{1}{2}(B_{11} + B_{33}). \tag{30}$$

При выполнении условий (23)–(30) уравнения (4), (5) становятся тождествами, если $\lambda$ задана в виде (14), а в уравнениях Пуассона (18) учтены условия $d_0 = 0$, $b_0 = 0$, $b_2 = 0$, $d_1 = 0$. Запишем (18) с учетом обозначения (29)

$$\begin{aligned}
\dot{\nu}_1 &= \frac{1}{\nu_3}\Big[g_0 a_3 \nu_2 + a_3 g_3 \nu_2 \nu_3 + (a_3 g_{33} - a_1 b_1)\nu_2 \nu_3^2 - a_2 d_3 \nu_3^3\Big],\\
\dot{\nu}_2 &= \frac{1}{\nu_3}\Big[-g_0 a_3 \nu_1 - a_3 g_3 \nu_1 \nu_3 - (a_3 g_{33} - a_1 b_1)\nu_1 \nu_3^2 + a_1 b_3 \nu_3^3\Big],\\
\dot{\nu}_3 &= \nu_3(a_2 d_3 \nu_1 - a_1 b_3 \nu_2).
\end{aligned} \tag{31}$$

Проанализируем условия (23)–(28): в условиях (23) указаны значения коэффициентов в разложении (14), а в условиях (24) – коэффициентов при $\nu_i$, $x_1, x_2$. Равенства (25)–(27) являются условиями на параметры динамических уравнений из системы (1). Равенства (28) определяют структуру функции (15). Условия (30) характерны тем, что $g_0$ зависит от произвольной постоянной $k$.

Уравнения (31) имеют первый интеграл с фиксированной постоянной: $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$. Для интегрирования системы (31) необходимо найти дополнительный интеграл. Этот интеграл можно указать, например, при дополнительном условии $g_3 = 0$. В силу условий (23), (25) получим равенства $s_i = 0 \ \ (i = \overline{1,3})$, т.е. центр масс гиростата неподвижен. Тогда уравнения (31) допускают первый интеграл

$$a_1 b_3 \nu_1 + a_2 d_3 \nu_2 + (a_3 g_{33} - a_1 b_1)\nu_3 - \frac{a_3 g_0}{\nu_3} = c, \tag{32}$$

где $c$ – произвольная постоянная.

Введем вместо $\nu_i$ переменные $\theta, \varphi$:

$$\nu_1 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \tag{33}$$

Используя первый интеграл (32), из системы (31) получим

$$\dot{\nu}_3 = -\sqrt{F(\nu_3)}, \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned}
&F(\nu_3) = h_0 + h_1\nu_3 + h_2\nu_3^2 + h_3\nu_3^3 + h_4\nu_3^4,\\
&h_0 = -a_3^2 g_0^2,\ h_1 = -2c a_3 g_0,\ h_2 = a_1^2 b_3^2 + a_2^2 d_3^2 - 2a_3 g_0(a_1 b_1 - a_3 g_{33}) - c^2,\\
&h_3 = -2c(a_1 b_1 - a_3 g_{33}), \qquad h_4 = -a_1^2 b_3^2 - a_2^2 d_3^2 - (a_1 b_1 - a_3 g_{33})^2.
\end{aligned} \tag{35}$$

Пусть

$$\mu_0 = \sqrt{a_1^2 b_3^2 + a_2^2 d_3^2}, \qquad \sin\sigma_0 = \frac{a_2 d_3}{\mu_0}, \qquad \cos\sigma_0 = \frac{a_1 b_3}{\mu_0}. \tag{36}$$

Зависимость $\nu_3 = \nu_3(t)$ определим на основе формулы (34) путем обращения интеграла
$$\int\limits_{\nu_3^{(0)}}^{\nu_3} \frac{d\nu_3}{\sqrt{F(\nu_3)}} = -(t - t_0). \tag{37}$$

Тогда $\theta(t) = \arccos \nu_3(t)$ в силу (33), а в силу (32), (36)
$$\varphi = \sigma_0 + \arccos \frac{2\big[(a_1 b_1 - a_3 g_{33})\cos^2\theta + c\cos\theta + a_3 g_0\big]}{\mu_0 \sin 2\theta}. \tag{38}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{x}$, функцию $\lambda(t)$ найдем, используя (3), (29), (33), (37), (38):
$$\begin{aligned} &x_1 = b_1 \sin\theta\cos\varphi + b_3\cos\theta, \quad x_2 = d_2\sin\theta\sin\varphi + d_3\cos\theta, \\ &x_3 = \frac{1}{\cos\theta}(g_0 + g_{33}\cos^2\theta), \quad \lambda = (\lambda_1\cos\varphi + \lambda_2\sin\varphi)\sin\theta + \lambda_3\cos\theta. \end{aligned} \tag{39}$$

Функцию $L(t)$ найдем, используя значение $\lambda$ из (39).

Действительность решения (37)–(39) зависит от действительности функции $\nu_3(t)$. Поскольку $g_0$ и $c$ – произвольные постоянные, то принимая их достаточно малыми, можно добиться малых значений $h_0, h_1$ и положительного значения величины $h_2$. Это значит, что существуют такие значения параметров задачи, для которых функция $\nu_3(t)$ действительна.

**Вывод.** В статье построено новое решение уравнений (1), которое характеризуется двумя линейными инвариантными соотношениями (3) по компонентам $x_1, x_2, \nu_i$, одним рациональным соотношением (15) для $x_3$ и линейным соотношением (14) для $\lambda(t)$. Решение выражается эллиптическими функциями времени.


1. *Харламов П.В.* Лекции по динамике твердого тела. – Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1965. – 221 с.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела // Киев: Наук. думка. – 1978. – 296 с.
3. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. theor. appl. – 1986. – **5**, № 5. – P. 742–745.
5. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Ж. прикл. математики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Liouville J.* Developpements sur un chapitre de la Mecanique de Poisson // J. math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1–25.
8. *Volterra V.* Sur la theorie des variations des latitudes // Acta. Math. – 1899. – **22**. – P. 201–358.

9. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч.: В 8 т. – М.;Л.: Гостехиздат, 1949. – Т. 2. – С. 152–309.
10. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80–86.
11. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАНУ. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
12. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
13. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Там же. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.

**A.V. Maznev**

**On two linear invariant relations of gyrostat motion equations with a variable gyrostatic momentum under the action of potential and gyroscopic forces**

The problem of gyrostat motion under the action of potential and gyroscopic forces in the case of variable gyrostatic momentum is considered. Existence conditions for two linear in all variables invariant relations of the motion equations are defined. Time dependence of the gyrostatic momentum value and the set of parameter conditions that characterize the new solution of the generalized Kirchhoff equations are found.

**Keywords:** *gyrostat, gyrostatic momentum, invariant relation.*

**О.В. Мазнєв**

**Про два лінійні інваріантні співвідношення рівнянь руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних і гіроскопічних сил**

Розглянуто задачу про рух гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту. Для рівнянь руху визначено умови існування двох лінійних інваріантних співвідношень за всіма змінними. Знайдено залежність від часу величин гіростатичного моменту й умови на постійні параметри узагальнених рівнянь Кірхгофа, які характеризують новий розв'язок цих рівнянь.

**Ключові слова:** *гіростат, гіростатичний момент, інваріантне співвідношення.*

*Донецкий национальный ун-т*
`maznev_av@rambler.ru`

Получено 28.10.11