

О. Б. ПОЛУБАСОВ

Россия, г. Санкт-Петербург, ГУП «НИИ "Звезда"»
E-mail: pbas@spb.cityline.ru

Дата поступления в редакцию
19.10 2000 г.
Оппонент к. т. н. В. В. СИБИРЯКОВ

ГЛОБАЛЬНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА МЕЖСЛОЙНЫХ ПЕРЕХОДОВ

Использование предложенной процедуры в топологическом трассировщике FreeStyleRoute позволяет в 10-30 раз уменьшить количество межслойных переходов.

Увеличение количества элементов на печатной плате или кристалле БИС, усложнение самих элементов приводят к тому, что задача трассировки соединений становится всё более трудной.

Для увеличения плотности компоновки соединений используются два основных способа: уменьшение ширины проводников и зазоров между ними и увеличение количества трассировочных слоев. Оба способа ведут к снижению технологичности изготовления и ремонтпригодности изделий, увеличению процента брака.

Особую сложность представляет проблема минимизации количества межслойных переходов. На практике обычно прокладывают участки проводников строго ортогонально (вертикально в одном слое и горизонтально в другом), а лишние переходы удаляют только после завершения трассировки. Для этого фрагмент трассы переносят из одного слоя в другой. Возможности такой процедуры весьма ограничены, т. к. получаемое количество переходов в десятки раз больше необходимого.

Для решения указанной задачи предлагались следующие методы:

– Минимизация числа слоев [1, с. 231] на основе раскраски графа пересечений. Задача NP-трудна, кроме того, хроматическое число графа пересечений может оказаться больше заданного числа слоев.

– Последовательное выделение в графе пересечений максимальных плоских суграфов [2, с. 226]. Недостатки те же. При этом возможно возникновение погрешности за счет использования "жадного алгоритма". Можно отметить, что нахождение максимального плоского суграфа – задача не проще первой.

– Нахождение кликового покрытия графа пересечений, в котором вершины, соответствующие непесекающимся отрезкам, соединены ребром [3, с. 64–69]. Задача о покрытии NP-трудна, при этом входная цепочка – число клик графа (в худшем случае – $3^{n/3}$).

Сложность практической реализуемости указанных методов свидетельствует об актуальности раз-

работки эффективных алгоритмов решения задачи минимизации количества межслойных переходов. Один из возможных подходов рассмотрен ниже.

1. Задача расслоения совмещенной топологии и граф доменов

При проектировании многослойных печатных плат со сквозными металлизированными отверстиями в некоторых методах трассировки предварительно прокладывают трассы в одной плоскости. При этом разрешено пересечение трасс, но не более двух в каждой точке пересечения. Полученный результат называется совмещенной топологией трасс. Затем необходимо распределить фрагменты трасс по имеющимся слоям таким образом, чтобы трассы на одном слое не пересекались и количество переходов со слоя на слой было минимальным.

Если для трассировки доступно только два коммутационных слоя, задача минимизации количества переходов при расслоении может быть точно решена непереборным алгоритмом.

Определение 1. Назовем точки пересечения трасс **доменами**. Название связано с тем, что в каждой такой точке пересекаются ровно две трассы, причем возможны только два варианта: либо одна трасса проходит через точку пересечения в первом слое, а другая – во втором, либо наоборот. Эти два варианта можно соотнести с двумя возможными ориентациями домена.

Произвольно выбрав ориентацию для каждого домена, назовем ее исходной.

На **рис. 1** черные кружки изображают контактные площадки (доступные на обоих слоях), точки

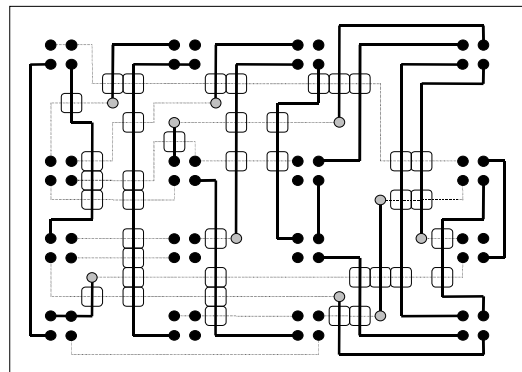


Рис. 1. Совмещенная топология проводников

пересечения трасс — домены — обведены скругленными квадратами. Так как в этом примере отрезки трасс проложены лишь в двух направлениях, примем, что в исходной ориентации вертикальные отрезки проходят через точки пересечения в первом слое (жирные линии), а горизонтальные — во втором (тонкие пунктирные линии).

Рассмотрим участок трассы между двумя соседними точками пересечения. Если его концы принадлежат разным слоям, на участке необходим переход с одного слоя на другой (на рисунке переходы изображены маленькими светлыми кружками, их 10), иначе переход на участке не нужен. Соединив на графе доменов (рис. 2) соответствующие домены ребром, припишем ребру вес +1, если на участке нет перехода, и -1, если переход есть. Положительные и отрицательные ребра изображены на рис. 2 тонкими и жирными линиями, соответственно.

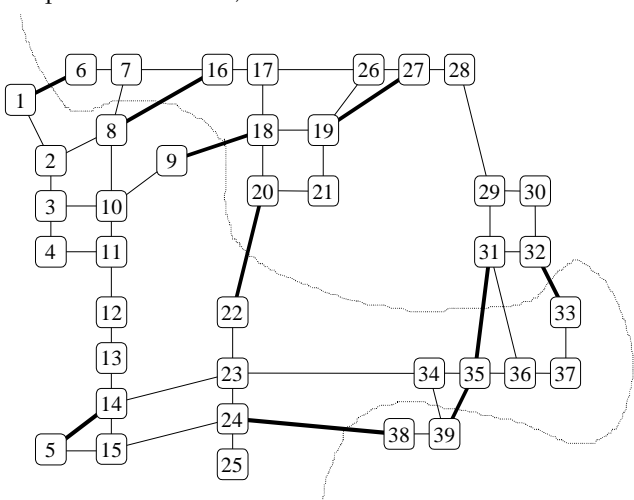


Рис. 2. Соответствующий граф доменов и его наиболее отрицательный разрез

При оптимальном расслоении одни домены сохраняют исходную ориентацию, другие — изменяют ее на противоположную. Следует отметить, что при изменении ориентации домена мы должны также изменить знаки весов инцидентных домену ребер (рис. 3).

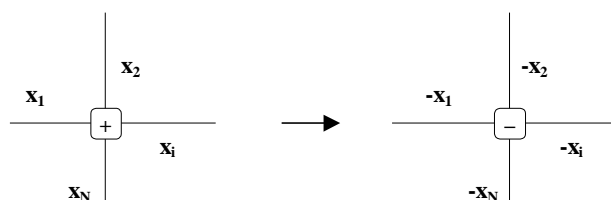


Рис. 3. Изменение ориентации домена

Так как при каждом конкретном расслоении суммарный вес отрицательных ребер соответствует (по абсолютной величине) количеству переходов, то определение оптимального расслоения сводится к выявлению в графе доменов наиболее отрицательного разреза (в терминологии А. Зыкова — квалиразреза [4, с. 199]). При оптимальном расслоении домены,

находящиеся по одну сторону разреза, сохраняют свою ориентацию, а по другую — изменяют ее, при этом количество переходов изменится на величину разреза. Интересующий нас разрез показан на рис. 2 волнистой линией. Его величина равна $+3-8 = -5$, т. к. он состоит из трех положительных и восьми отрицательных ребер.

Как известно, для графов общего вида задача поиска наиболее отрицательного разреза NP-сложна, но для планарных графов разрешима за полиномиальное время. Легко видеть, что граф доменов всегда планарен. Один из эффективных алгоритмов [5] решает эту задачу за $O(PN \log N + P^3 \log P)$ при требуемой памяти $O(PN)$, где N — число вершин графа доменов, P — число граней, ограниченных нечетным числом ребер отрицательного веса.

2. Редукция графа доменов

Пересечения трасс на рисунке совмещенной топологии типичной современной схемы исчисляются десятками тысяч, что ведет к большой размерности графа доменов. При этих условиях потребности во времени и памяти даже полиномиального алгоритма поиска наиболее отрицательного разреза оказываются чрезмерно большими. Для практического применения можно допустить алгоритмы только с линейными требованиями к памяти и только с линейными требованиями к числу операций.

Перечисленные ниже преобразования редукции графа доменов за линейное число операций уменьшают его размер без потери оптимального решения. После определения оптимальной ориентации доменов редуцированного графа легко восстановить оптимальную ориентацию и для исходного графа.

В общем случае граф доменов является мультиграфом, поскольку он может иметь петли и кратные ребра. Однако петли не входят ни в один разрез, поэтому их можно удалить. При этом так как петли отрицательного веса соответствуют обязательным переходам, то удаляя отрицательные петли, запомним их суммарный вес (со знаком "плюс"). Назовем эту величину накопленным количеством переходов (НКП).

Преобразование 1 (рис. 4). Пусть домены А и В соединены сразу несколькими ребрами. Так как эти ребра входят в любой разрез только все

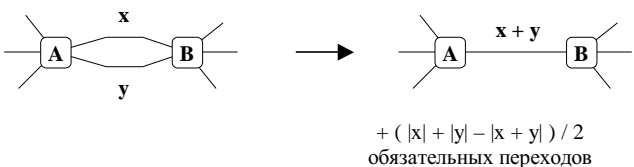


Рис. 4. Графическая иллюстрация к преобразованию 1

вместе, то заменим их на одно ребро суммарного веса. При этом если веса ребер имели разные знаки, то некоторое количество переходов попадет в разряд обязательных. Добавим эту величину к накопленному количеству переходов. Вес результирующего ребра может оказаться и равным нулю, такое ребро просто исчезает.

Преобразование 2 (рис. 5). Пусть вес ребра АВ положителен и настолько велик, что сумма абсолютных величин весов остальных ребер, инцидентных домену А, не превышает его. Тогда среди наиболее отрицательных разрезов существует разрез, не содержащий ребра АВ.

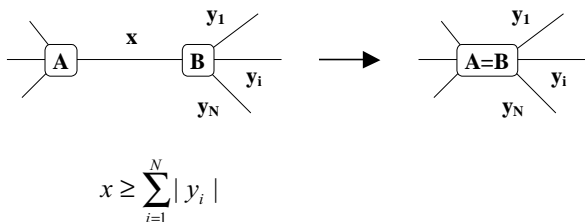
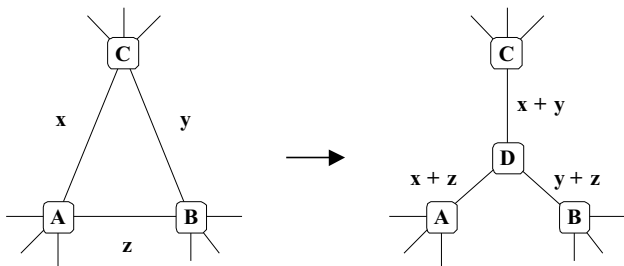


Рис. 5. Преобразование 2

Действительно, предположим, что ребро АВ входит в наиболее отрицательный разрез. Тогда, заменив в этом разрезе ребро АВ на совокупность остальных ребер, инцидентных домену А, мы получим разрез не менее отрицательный.

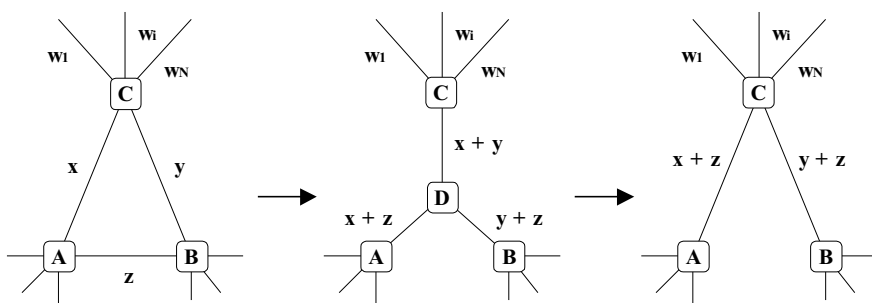
Стянем ребро АВ, объединив вершины А и В в одну. (В частности, всегда можно стянуть одно из ребер, инцидентных домену степени 2 или 1.)

Преобразование 3. Изолированному домену припишем произвольную ориентацию и удалим его из дальнейшего рассмотрения.



$x, y, z > 0$

Рис. 6. Преобразование 4



$x, y, z > 0$

$x + y \geq \sum_{i=1}^N |w_i|$

Рис. 7. Выгода преобразования 4

Преобразование 4. На рис. 6 слева показана треугольная грань АВС, веса всех ее ребер положительны. Эквивалентный подграф показан на том же рисунке справа. Преобразование корректно, поскольку ребра треугольной грани входят в любой разрез только попарно.

В чем же состоит выгода данного преобразования? Ведь число ребер осталось прежним, а число вершин даже увеличилось.

Дело в том, что новые ребра имеют больший вес и обычно сразу же бывают стянуты преобразованием 2. Условимся применять преобразование 4 только в том случае, если хотя бы одно из новых ребер будет стянуто. Тогда число вершин не увеличится, а число ребер уменьшится (рис. 7).

Еще несколько чуть более сложных преобразований будет приведено в разделе 4.

Теорема 1.

Число операций, требующееся для редукции графа доменов, линейно зависит от суммы числа вершин и числа ребер графа.

Действительно, каждое преобразование выполняется за константное число операций, а т. к. после каждого преобразования уменьшается или число ребер, или число вершин, то общее число операций не превышает $O(N+M)$, где N — число вершин, M — ребер.

После применения описанных преобразований размер графа доменов уменьшается. Поскольку эти преобразования не нарушают планарности графа, к редуцированному графу может быть применен алгоритм поиска наиболее отрицательного разреза [5]. Вопрос, намного ли результирующий граф меньше исходного, остается открытым. Можно указать, что за 10 лет практического применения были опробованы многие тысячи реальных топологий. Для каждой из них размер графа доменов в результате редукции уменьшался до нуля.

3. Пример редукции графа доменов

Посмотрим еще раз на рис. 2. Заметим, что домен 25 имеет лишь одну связь — с доменом 24. Вес этого ребра положителен, следовательно, для отсутствия на нем перехода необходимо, чтобы домены 25 и 24 были ориентированы одинаково. Стянув ребро, объединим домены 25 и 24 в один. Оставим за ним номер 24, забыв, что домен 25 имеет такую же ориентацию. В дальнейшем изложении будем использовать краткую запись объединения вершин:

1. 25 → 24.

Обратим внимание на домен 5. Его степень равна двум, следовательно, мы опять вправе применить преобразование 2. При этом, т. к. веса обоих ребер совпадают по абсолютному значению (хотя имеют

разные знаки), равноправны два варианта его применения: либо объединить домены 5 и 15, считая, что их ориентация одинакова, либо объединить домены 5 и 14, считая, что их ориентация различна. Выберем первый вариант: **2.** $5 \rightarrow 15$.

Теперь оказалось, что новый домен (за которым мы оставили номер 15) и домен 14 соединены сразу двумя ребрами: ребром с весом +1 и ребром с весом -1 (рис. 8, а). В зависимости от того, одинаковую

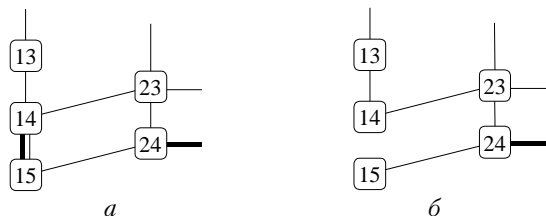


Рис. 8. Взаимоуничтожение пары ребер

или разную ориентацию получают в окончательном расслоении домены 14 и 15, на том или другом ребре потребуется переход. Запомним этот факт, добавив один переход к накопленному количеству переходов (НКП), первоначально нулевому: НКП=1.

Применение преобразования 1 привело к тому, что домены 14 и 15 больше не соединены ребром (рис. 8, б). Обозначая вес ребра между доменами а и b через $W(a,b)$, запишем: $W(14,15) = 0$.

Теперь степень домена 15 стала равной единице, и его можно объединить с доменом 24: **3.** $15 \rightarrow 24$.

Вторую степень имеют домены 1, 4, 6, 9, 12, 13, 14, 21, 22, 24, 28, 30, 33, 37 и 38. Следовательно: **4.** $14 \rightarrow 23$, **5.** $1 \rightarrow 2$, **6.** $4 \rightarrow 11$, **7.** $6 \rightarrow 7$, **8.** $9 \rightarrow 10$, **9.** $12 \rightarrow 11$, **10.** $13 \rightarrow 12$, **11.** $21 \rightarrow 20$, **12.** $22 \rightarrow 23$, **13.** $24 \rightarrow 23$, **14.** $28 \rightarrow 27$, **15.** $30 \rightarrow 39$, **16.** $33 \rightarrow 37$, **17.** $37 \rightarrow 36$, **18.** $38 \rightarrow 39$.

Теперь, после шага 18, степени всех вершин графа больше чем 2 (рис. 9), и преобразование 2 к его элементам неприменимо. Применим к треугольной грани, образованной доменами 18, 19 и 20, преобразование 4.

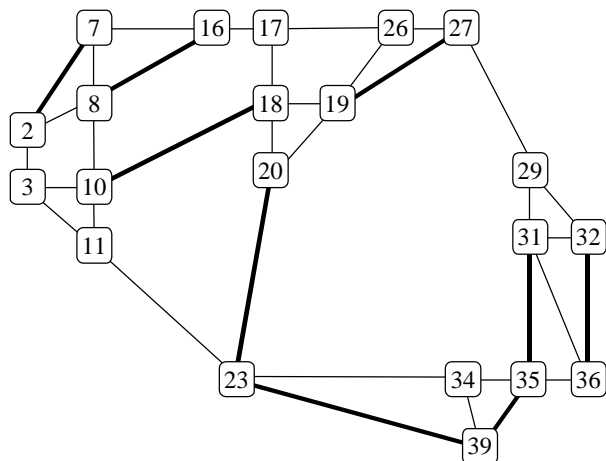


Рис. 9. Граф после шага 18

На рис. 10, а видно, что новый домен (обозначенный звездочкой) связан с доменами 18, 19 и 20 ребрами веса +2. Поскольку все три ребра можно стянуть с помощью преобразования 2, то домены 18, 19, 20, а также новый домен будут объединены в один (рис. 10, б). Оставим за ним номер 20, запомнив, что домены 18 и 19 имеют такую же ориентацию: **19.** $18, 19 \rightarrow 20$.

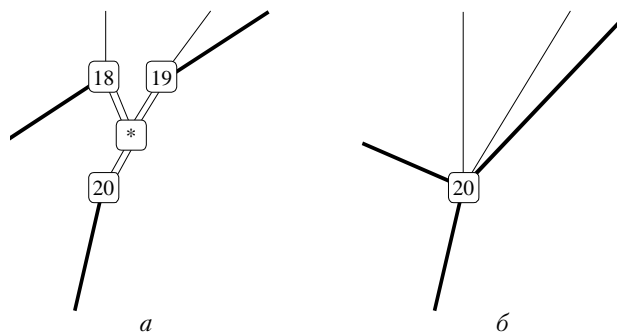


Рис. 10. Шаг 19

Аналогично: **20.** $29, 32 \rightarrow 31$, $W(31, 36)=0$, НКП=2; **21.** $3, 11 \rightarrow 10$.

Текущее состояние графа показано на рис. 11. **22.** $36 \rightarrow 35$; **23.** $31 \rightarrow 27$; **24.** $17, 26 \rightarrow 20$, $W(20, 27)=0$, НКП=3; **25.** $2, 10 \rightarrow 8$, $W(8, 7)=0$, НКП=4.

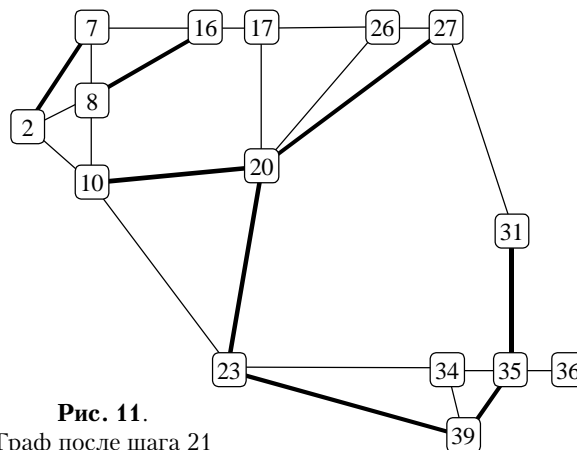


Рис. 11. Граф после шага 21

Далее редукция протекает лавинообразно (рис. 12). Домен 27 соединен лишь с доменом 35, но вес соединяющего ребра отрицателен (-1). Стянув ребро, отметим, что домен 27 имеет ориентацию, противоположную ориентации домена 35: **26.** $27 \rightarrow 35$;

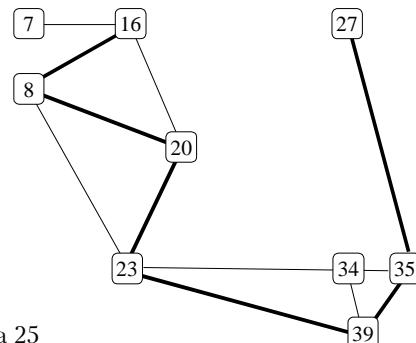


Рис. 12. Граф после шага 25

27. $35 \rightarrow 34$, $W(34, 39)=0$, НКП=5; 28. $34 \rightarrow 23$; 29. $39 \rightarrow -23$; 30. $7 \rightarrow 16$; 31. $23 \rightarrow 8$, $W(8, 20)=-2$; 32. $20 \rightarrow 16$, $W(8, 16)=-3$; 33. $8 \rightarrow -16$.

Остался единственный домен 16 (рис. 13), и пора применить преобразование 3.

16

Рис. 13. Граф полностью разобран

Пусть домен 16 сохранит исходную ориентацию. Обратным ходом алгоритма восстановим все домены исходного графа и узнаем их оптимальную ориентацию:

- 33. Домен 8 ориентирован противоположно домену 16.
- 32. Домен 20 ориентирован так же, как и домен 16.
- 31. Домен 23 ориентирован так же, как и домен 8.
- 30. Домен 7 ориентирован так же, как и домен 16.
- 29. Домен 39 ориентирован противоположно домену 23.

- 2. Домен 5 ориентирован так же, как и домен 15.
- 1. Домен 25 ориентирован так же, как и домен 24.

Накопленное количество переходов оказалось равным 5. На рис. 14 показан найденный разрез, а на рис. 15 — соответствующее расслоение. Потребовалось, действительно, 5 переходов.

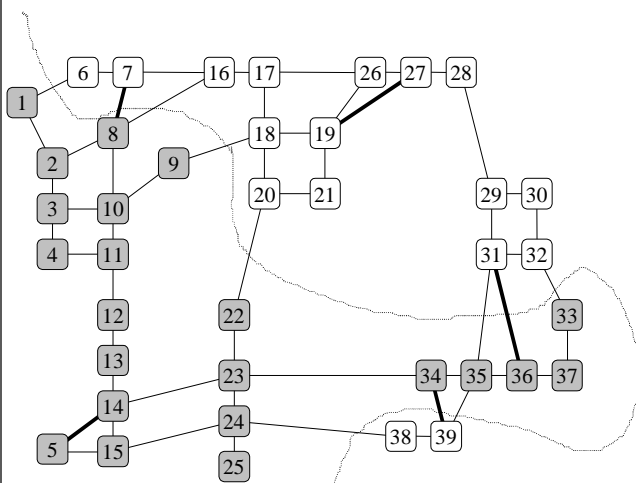


Рис. 14. Оптимальная ориентация доменов

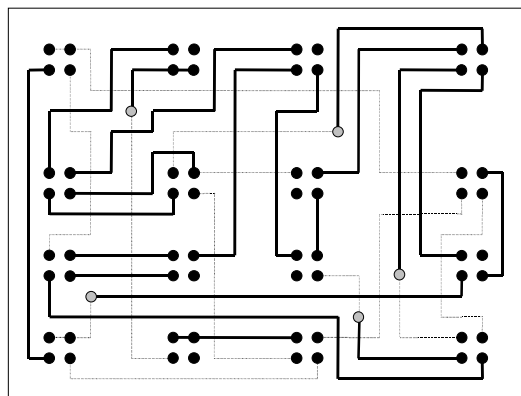


Рис. 15. Оптимальное расслоение

4. Дополнительный набор преобразований графа доменов

Преобразование 5 (рис. 16) обратно преобразованию 4. Возникающие при этом преобразовании дробные веса ребер не должны никого смущать, поскольку манипуляции с графом чисто формальные.

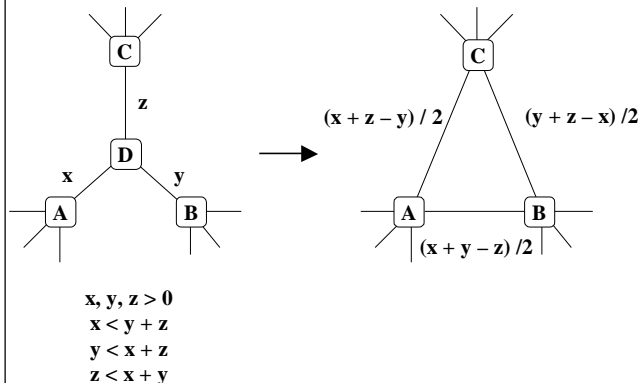


Рис. 16. Преобразование 5

Какую ориентацию следует приписать удаляемой вершине D во время обратного хода алгоритма? Легко понять, что домен D должен получить ту ориентацию, какой обладает большинство из смежных с ним доменов A, B и C. Запишем это символически: $D \rightarrow (A, B, C)$.

Теперь заметим, что при любых изменениях ориентации доменов четность числа ребер отрицательного веса в любом цикле сохраняется. Таким образом, существуют только два принципиально различных типа треугольных граней: все ребра положительного веса или одно из ребер имеет отрицательный вес. Преобразование 4 (рис. 6) работает лишь с треугольниками первого типа.

Преобразование 6 (рис. 17, а). Рассмотрим треугольную грань ABC, одно из ребер которой AB имеет отрицательный вес $-z$.

Обозначим $S = \sum_{i=1}^N |w_i|$. И пусть $x + y - 2z \geq S$.

Добавим временно к графу ребро CD веса $x+y-2z$ (рис. 17, б). Заметим, что поскольку вес нового ребра не меньше S, то величина наиболее отрицательного разреза не изменится. Пообещаем не разрезать ребро CD.

Применим к временно добавленной вершине D преобразование 5. Теперь вершины A и B соединены сразу двумя ребрами с весами z и $-z$, которые взаимно уничтожаются, а z переходов попадает в разряд обязательных (рис. 17, в).

Во время обратного хода алгоритма вспомним о своем обещании не разрезать ребро CD. Если оно все же оказалось разрезанным (это может произойти, если $x+y-2z=S$), то изменим ориентацию домена C, перенесем тем самым разрез с ребра CD на остальные инцидентные домену C ребра. Другими словами, если при обратном ходе обнаружится, что ориентация обоих доменов A и B отличается от ориентации домена C, то ориентацию домена C надо изменить. Запишем это символически: $C \rightarrow (A, B, C)$.

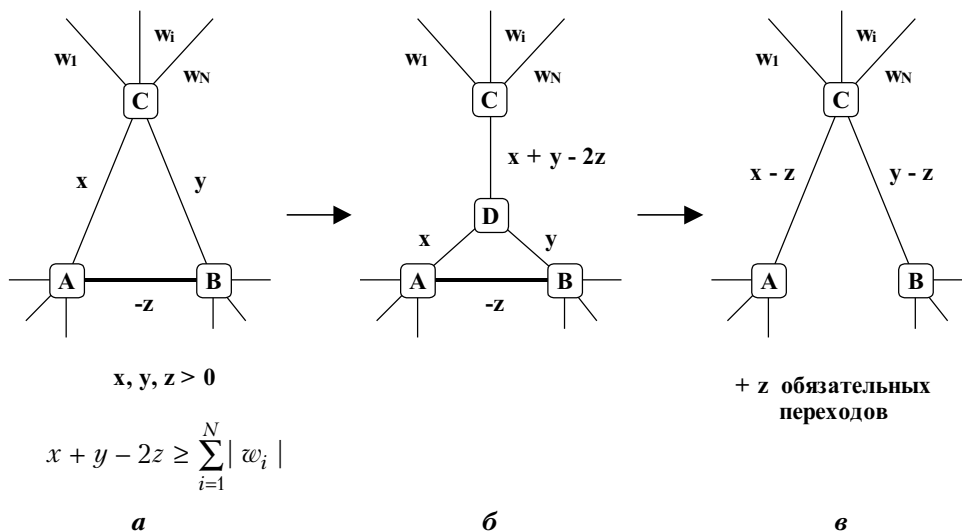


Рис. 17. Преобразование 6

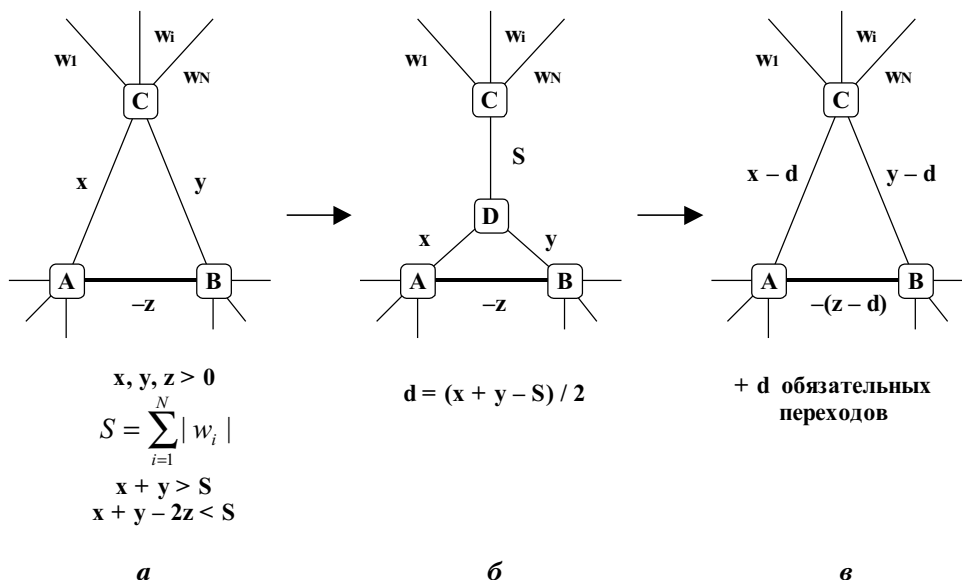


Рис. 18. Частичное преобразование 6

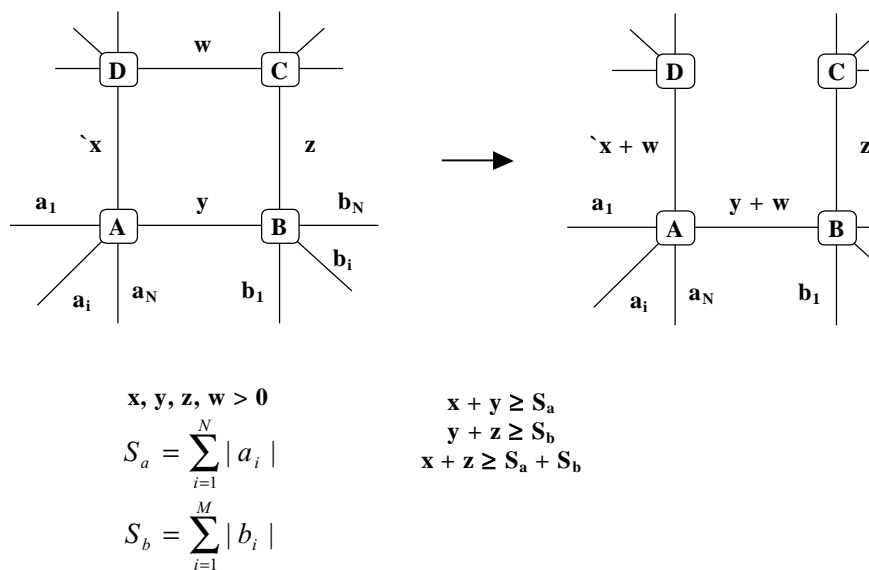


Рис. 19. Преобразование 7

Любопытно сравнить рисунки 7 и 17.

А что, если $x+y>S$, но $x+y-2z<S$? Тогда ребро АВ совсем убрать нельзя, но можно уменьшить его абсолютную величину на $(x+y-S)/2$. Настолько же уменьшатся и веса ребер АС и ВС (рис. 18).

Не будем вводить для этого преобразования отдельного номера, поскольку оно аналогично преобразованию 6, за исключением того, что число ребер не уменьшается. Тем не менее накопленное количество переходов увеличивается, поэтому зацикливание невозможно.

Преобразование 7 (рис. 19). Рассмотрим четырехугольную грань ABCD. Обозначим

$$S_a = \sum_{i=1}^N |a_i|, \quad S_b = \sum_{i=1}^M |b_i|,$$

и пусть $x+y \geq S_a$, $y+z \geq S_b$, $x+z \geq S_a+S_b$.

Из первого неравенства следует, что среди наиболее отрицательных разрезов существует разрез, не содержащий совместно ребер АВ и AD.

Действительно, предположим, что в наиболее отрицательный разрез входят ребра АВ и AD. Тогда, заменив в этом разрезе ребра АВ и AD на совокупность остальных ребер, инцидентных домену А, мы получим разрез не менее отрицательный.

Из двух других неравенств точно так же следует, что среди наиболее отрицательных разрезов существует разрез, не содержащий совместно ребер АВ и ВС и совместно ребер ВС и CD.

Таким образом, среди всех возможных разрезов четырехугольника ABCD остались только разрезы CD+AD, CD+AB и CD+BC. Их величины соответственно равны $x+w$, $y+w$ и $z+w$. Из рис. 19 видно, что преобразование не нарушает величин этих разрезов.

Перечень преобразований можно продолжить (например, провести преобразование пятиугольной грани), но для практических нужд вполне достаточно приведенного набора.

Практика также показывает, что преобразование 5 (превращение тройника в треугольник) очень важно, однако применять его следует в последнюю очередь, когда другие преобразования неприменимы. Это, кстати, единственное преобразование, которое не уменьшает числа ребер графа, уменьшает только число вершин.

5. Точки разветвления трасс и планарные контактные площадки

Кроме сквозных контактных площадок, на реальных платах встречаются и такие элементы печатного монтажа, как точки разветвления трасс и планарные контактные площадки (площадки, доступные только на одном слое).

Обратим внимание вначале на точки ветвления степени три — тройники. Заметим, что из трех трасс, подходящих к тройнику, хотя бы две подходят в одном слое. Если в точке ветвления есть межслойный переход, перенесем его на оставшуюся трассу. Теперь тройник целиком находится на одном слое, на графе ему соответствует домен, причем изменение ориентации домена означает перемещение тройника на другой слой.

К сожалению, с точками ветвления больших степеней подобным образом поступить нельзя. Не существует адекватного представления точек ветвления степени больше трех. Но поскольку таких точек не бывает много, предлагается, жертвуя точностью решения, рассматривать их как контактные площадки, доступные на обоих слоях. Такие площадки, по определению, доменами не являются и на графе доменов никак не фигурируют.

Особо следует сказать о планарных контактных площадках, т. е. площадках, доступных на одном, фиксированном слое. Так как изменить номер доступного слоя мы не можем, таким площадкам соответствуют домены фиксированной ориентации. При этом все эти домены можно сразу же объединить в один. Этот дополнительный домен имеет связь с большим количеством доменов, и граф перестает быть планарным. А это значит, что задача поиска наиболее отрицательного разреза становится NP-сложной.

Но ведь при описании преобразований графа мы нигде не требовали его планарности. Эксперименты показали, что и при наличии планарных контактных площадок редукция не только возможна, но даже осуществляется с большей скоростью.

Наконец, предположим, что стоимости переходов на различных участках трасс различны, и необходимо минимизировать суммарную стоимость переходов. Этого можно достичь, назначив ребрам соответствующие веса (знаки весов по-прежнему определяют наличие или отсутствие переходов). Задача решается аналогично.

6. Заключение

Описана эффективная процедура минимизации количества межслойных переходов на основе редукции графа доменов. Для проведения редукции разработан набор локальных преобразований. Показано, что предложенные локальные преобразования не приводят к потере оптимального решения.

Показано также, что сложность алгоритма линейно зависит от количества пересечений проводников.

Предложенная в статье процедура глобальной минимизации числа переходов применяется в топологическом трассировщике FreeStyleRoute. В результате обычно достигается количество межслойных переходов примерно в 10—30 раз меньшее, чем у трассировщиков, не использующих эту процедуру.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Селютин В. А. Машинное конструирование электронных устройств. — М.: Сов. радио, 1977.
2. Мелихов А. М., Берштейн Л. С., Курейчик В. М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. — М.: Наука, 1974.
3. Базилович Р. П. Декомпозиционные и топологические методы автоматизированного метода конструирования электронных устройств. — Львов.: Вища школа, 1981.
4. Зыков А. А. Основы теории графов. — М.: Наука, 1987.
5. Карзанов А. В. Алгоритм максимальной упаковки нечетнополюсных разрезов и его приложения // В кн.: Исследования по прикладной теории графов. — Новосибирск: Наука, 1986. — С. 126—140.