

Д. т. н. А. А. АЩЕУЛОВ, к. ф.-м. н. В. Г. ОХРЕМ,  
к. ф.-м. н. Е. А. ОХРЕМ

Украина, Черновицкий нац. университет им. Ю. Федьковича  
E-mail: oe-dpt@chnu.cv.ua

Дата поступления в редакцию  
03.10 2002 г.

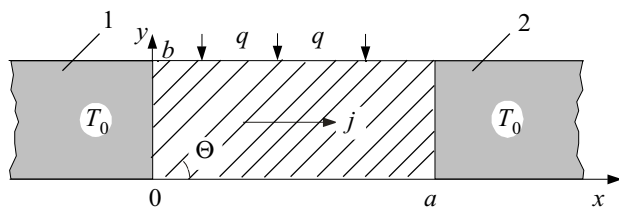
Оппонент д. ф.-м. н. И. В. ГУЦУЛ  
(ЧНУ им. Ю. Федьковича, г. Черновцы)

## ТЕПЛОВАЯ МОДЕЛЬ И КПД АНИЗОТРОПНОГО ТЕРМОЭЛЕМЕНТА В РЕЖИМЕ ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

*В нагруженном анизотропном термоэлементе проанализированы двухмерное распределение температуры и КПД в случае постоянной плотности электрического тока.*

Анизотропный термоэлемент (АТ) может использоваться в качестве преобразователя теплового излучения в различных режимах [1, с. 88—93]. Термоэлектрические процессы в АТ изучались в большинстве случаев при условии одномерности температурного поля [2—5]. Однако одномерность температуры имеет место только в средней части термоэлемента при условии, что он достаточно длинный. В реальности же одномерность нарушается, особенно когда токоподводы к АТ массивны. Температурная модель для описания термоэлектрических процессов в АТ при этом имеет более сложный характер.

В настоящей статье рассматривается нагруженный АТ, в котором электрический ток плотностью  $j = \text{Const}$  направлен вдоль оси  $x$  (см. рисунок). (Допущение о постоянстве плотности тока использовалось, например, в [6] для АТ, работающего в режиме холодильника.) Вычисляются распределение температуры при заданных граничных условиях и соответствующий ему коэффициент полезного действия (КПД). Предложенная схема расчета КПД при двухмерном распределении температуры является оригинальной и, по нашему мнению, более точно соответствует действительному положению вещей.



Принципиальная схема АТ в режиме генерации электроэнергии:

1 — кристалл; 2 — термостаты; 3 — падающий тепловой поток (штриховкой показано направление кристаллографической оси)

Будем считать, что материал АТ термоэлектрически анизотропный, кристаллографическая ось наклонена под углом  $\Theta$  к оси  $x$ . Кинетические коэффициенты ( $\kappa$  — удельная теплопроводность,  $\rho$  — удельное

электросопротивление,  $\alpha_{12}$  — поперечная термоэдс) не зависят от температуры и координат. Тогда обобщенное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \gamma = 0, \quad (1)$$

где  $T$  — температура,  $\gamma = \rho j^2 / \kappa$ .

Граничные условия:

$$T(0, y) = T(a, y) = T_0; \quad (2)$$

$$-\kappa \frac{\partial T(x, b)}{\partial y} + \alpha_{12} j T(x, b) = -q; \quad (3)$$

$$-\kappa \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} + \alpha_{12} j T(x, 0) = 0, \quad (4)$$

где  $q$  — плотность падающего на верхнюю грань АТ теплового потока.

Условия (2) означают, что торцы АТ термостатированы. Термостат выполнен из металла с высокими электро- и теплопроводностью и поэтому его части 1 и 2, являющиеся одновременно и токоподводами, обеспечивают одномерность тока, что, в свою очередь, приводит к его постоянству. Условие (3) — падающий тепловой поток плотностью  $q$  поглощается верхней ( $y=b$ ) гранью АТ; (4) — адиабатическая изоляция нижней ( $y=0$ ) грани АТ.

Решение уравнения (1) представим в виде

$$T(x, y) = T_0 - \frac{1}{2} \gamma x(x-a) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \exp(\delta_n y) + B_n \exp(-\delta_n y)) \sin(\delta_n x), \quad (5)$$

где  $\delta_n = n\pi/a$ ,  $A_n$  и  $B_n$  — постоянные интегрирования.

Выражение (5) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2). Из уравнений (3), (4) с учетом выражения (5) получим систему двух уравнений относительно  $A_n$  и  $B_n$ :

$$(\kappa \delta_n - \alpha_{12} j) A_n - (\kappa \delta_n - \alpha_{12} j) B_n = \alpha_{12} j \left( T_0 E_n - \frac{1}{2} \gamma C_n \right)$$

$$(\kappa \delta_n - \alpha_{12} j) A_n \exp(\delta_n b) - (\kappa \delta_n - \alpha_{12} j) B_n \exp(-\delta_n b) =$$

$$= \alpha_{12} j \left( T_0 E_n - \frac{1}{2} \gamma C_n \right) + E_n q,$$

где  $E_n = 2(1 - (-1)^n) / (n\pi)$ ,  $C_n = -4a^2(1 - (-1)^n) / (n\pi)$  — коэффициенты разложения единицы и функции  $x(x-a)$  в ряды Фурье по косинусам.

Из приведенных уравнений находим:

$$A_n = -\frac{\alpha_{12}j \left( T_0 E_n - \frac{1}{2} \gamma C_n \right) \left( \exp(-\delta_n b) - 1 \right) + E_n q}{2(\kappa \delta_n - \alpha_{12}j) \operatorname{sh} \delta_n b},$$

$$B_n = -\frac{\alpha_{12}j \left( T_0 E_n - \frac{1}{2} \gamma C_n \right) \left( \exp(\delta_n b) - 1 \right) + E_n q}{2(\kappa \delta_n + \alpha_{12}j) \operatorname{sh} \delta_n b}.$$

Таким образом, распределение температуры на нагруженного АТ является двухмерным.

Вычислим коэффициент полезного действия  $\eta$ . По определению,

$$\eta = \frac{Q_n - Q_0}{Q_n},$$

где  $Q_n$  — тепло, поступающее на верхнюю грань АТ —

$$Q_n = qac;$$

$c$  — размер АТ вдоль оси  $z$ ;

$Q_0$  — тепло, стекающее в термостат через блоки-токоподводы 1 и 2.

$$Q_0 = c \int_0^b q_1(x, y)|_{x=0} dy + c \int_0^b q_1(x, y)|_{x=a} dy,$$

где  $q_1(x, y)$  — компонента плотности потока тепла вдоль оси  $x$  —

$$q_1(x, y) = -\kappa \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \alpha_{11} j T(x, y);$$

$\alpha_{11}$  — продольная (вдоль оси  $x$ ) термоэдс.

Легко находим

$$Q_0 = \kappa c \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - (-1)^n \right] \left[ A_n \left( \exp(\delta_n b) - 1 \right) - B_n \left( \exp(-\delta_n b) - 1 \right) \right].$$

Окончательно получим:

$$\eta = 1 + \frac{\kappa}{qa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left( \alpha_{12} j \right)^2 \left( T_0 E_n - \frac{1}{2} \gamma C_n \right) \left( e^{\delta_n b} - 1 \right) \left( e^{-\delta_n b} - 1 \right)}{\left( \kappa \delta_n \right)^2 - \left( \alpha_{12} j \right)^2 \operatorname{sh} \delta_n b} + \frac{E_n q}{\operatorname{sh} \delta_n b} \frac{\kappa \delta_n \operatorname{sh} \delta_n b + \alpha_{12} j \left( \operatorname{ch} \delta_n b - 1 \right)}{\left( \kappa \delta_n \right)^2 - \left( \alpha_{12} j \right)^2} \left[ 1 - (-1)^n \right] - \frac{\rho b}{q} j^2. \quad (6)$$

Определим оптимальную плотность тока, при которой  $\eta$  максимально. Для этого положим

$$\frac{\partial \eta}{\partial j} = 0.$$

Последнее уравнение при условии  $\alpha_{11} j \ll \kappa \delta_n$  приводит к следующему выражению для оптимальной плотности тока:

$$j_{\text{opt}} = \frac{4q\alpha_{12}a}{\pi^3 \rho \kappa b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(n\pi b/a) - 1}{n^3 \operatorname{sh}(n\pi b/a)}. \quad (7)$$

При этом максимальный КПД представляется следующим выражением:

$$\eta_{\text{max}} = 48 \frac{q}{\rho b} \left( \frac{\alpha_{12} a}{\kappa \pi^3} \right)^2 \left( \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(n\pi b/a) - 1}{n^3 \operatorname{sh}(n\pi b/a)} \right)^2. \quad (8)$$

Внешнее сопротивление  $R_e$  цепи термоэлемента определим из равенства

$$j_{\text{opt}}^2 (bc)^2 R_e = \eta_{\text{max}} qac,$$

откуда

$$R_e = \frac{\eta_{\text{max}} q a}{j_{\text{opt}}^2 b^2 c}. \quad (9)$$

Таким образом, оптимальная плотность тока, а также КПД, определяются плотностью теплового потока  $q$ , величина которого, в свою очередь, ограничена условием  $\alpha_{12} j_{\text{opt}} \ll \kappa \pi a$ . Подставив значение  $j_{\text{opt}}$ , получим для  $q$ :

$$q \ll \frac{\pi^4 \rho \kappa^2 b}{4 \alpha_{12}^2 a^2} \left( \frac{\operatorname{ch}(n\pi b/a) - 1}{n^3 \operatorname{sh}(n\pi b/a)} \right)^{-1}. \quad (10)$$

При  $\alpha_{12} = 10^{-4}$  В/К,  $\rho = 10^{-3}$  Ом·см,  $\kappa = 10^{-2}$  Вт/(см·К),  $a = 1$  см,  $b = c = 0,1$  см  $q \ll 30$  Вт/см<sup>2</sup>.

Возьмем  $q = 3$  Вт/см<sup>2</sup>, тогда  $\eta_{\text{max}} \approx 0,8\%$ . Подсчет  $j_{\text{opt}}$  по формуле (7) дает  $7$  А/см<sup>2</sup>,  $R_e = 0,49$  Ом. Если условие  $\alpha_{12} j \ll \kappa \delta_n$  не выполняется, то для вычисления КПД необходимо использовать выражение (6).

Найденное числовое значение КПД АТ свидетельствует о его малости. Поэтому описанный АТ предлагается использовать, например, в качестве измерителя теплового потока или датчика радиационной температуры.

Если плотность тока  $j$  обусловлена внешним источником электроэнергии, то рассматриваемый АТ представляет собой холодильник, а величина  $qac$  является его холодопроизводительностью. Случай нулевой холодопроизводительности такого АТ исследовался в [7].

\*\*\*

Проведенное исследование процессов, протекающих в нагруженном анизотропном термоэлементе, т. е. в условиях реальной неоднородности температурного поля, позволило получить выражения для расчета оптимальной плотности тока и КПД в таких АТ.

#### ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Термоэлементы и термоэлектрические устройства: Справочник / Л. И. Анагычук. — К.: Наук. думка, 1979.
2. Самойлович А. Г., Слипченко В. Н. Теория анизотропного термоэлемента с не зависящими от температуры кинетическими коэффициентами // ФТП. — 1981. — Т. 15, № 5. — С. 965—967.
3. Самойлович А. Г., Шевчук О. Ю. Распределение температуры в анизотропном термоэлементе // ФТП. — 1982. — Т. 15, № 11. — С. 1951—1954.
4. Слипченко В. М. До питання про ККД анізотропного термоелемента // УФЖ. — 1976. — Т. 21, № 1. — С. 124—129.
5. Снарский А. А., Пальти А. М., Ащеулов А. А. Анизотропные термоэлементы // ФТП. — 1997. — Т. 31, № 11. — С. 1281—1298.
6. Охрем В. Г., Охрем Е. А. Стационарный эффект охлаждения анизотропного термоэлектрического холодильника // ИФЖ. — 2000. — Т. 73, № 3. — С. 650—653.
7. Охрем В. Г. Некоторые модели стационарных термоэлектрических холодильников // ИФЖ. — 2001. — Т. 74, № 5. — С. 127—130.