КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ, МЕРЕЖІ ТА СИСТЕМИ

A. Kalenchuk-Porkhanova,
T. Fesun

LINEAR INTERPOLATION OF FUNCTIONS OF MANY-VARIABLES

The issues of existence, uniqueness and construction of interpolation polynoms of functions of many-variables are considered in this article.

Розглядаються питання існування, єдиності і побудови інтерполяційних поліномів функції багатьох змінних.

Рассматриваются вопросы существования, единственности и построения интерполяционных полиномов функции многих переменных.

УДК 004.428.4:519.651

А.А. КАЛЕНЧУК-ПОРХАНОВА, Т.М. ФЕСУН

ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение. В работе рассматриваются вопросы существования, единственности и построения интерполяционных полиномов функции многих переменных.

Рассмотрим некоторое линейное множество *R* действительных функций, определённых на отрезке [*a*, *b*] и некоторую конечную или счётную совокупность достаточно простых функций этого множества $\varphi_i(x)$, и предположим, что любая конечная система функций $\varphi_i(x)$ линейно независима на [*a*, *b*]. На практике в качестве $\varphi_i(x)$, как правило, берутся последовательность степеней *x*: $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n$, последовательность тригонометрических функций: 1, sin *x*, cos *x*, sin 2*x*, cos 2*x*, … или последовательность показательных функций: $1, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots$, где $\{\alpha_i\}$ – некоторая числовая последовательность попарно различных действительных чисел и т. д.

Всевозможные линейные комбинации
$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$
с действительными коэффициентами a_i назовём обобщёнными многочленами по системе $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, которые образуют линейное подмножество $\overline{R_n}$ множества *R*. В зависимости от целей, которых мы хотим достичь, могут быть разные подходы к задаче приближения $f(x) \in R$ функциями $\varphi(x) \in \overline{R_n}$. В теории интерполирования эта задача решается таким образом, что на отрезке [*a*, *b*] выби-

рается некоторая фиксированная совокупность попарно различных точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и каждой конкретной функции $f(x) \in R$ ставится в соответствие обобщённый многочлен $\varphi(x) \in \overline{R_n}$, значения которого в выбранных точках совпадают со значениями функции $f(x)$. Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называют узлами интерполирования, а обобщённый многочлен, обладающий указанным свойством, называют обобщённым интерполяционным многочленом для $f(x)$ по заданной системе узлов. Если $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ – дифференцируемые функции, то иногда, кроме того, требуют совпадения производных $f(x)$ и $\varphi(x)$ в узлах до некоторых порядков [1].

В настоящей работе рассматривается задача линейной интерполяции функции n независимых переменных, приводятся формулы вычисления значения интерполирующего полинома в произвольной точке и формула остаточного члена.

Постановка задачи интерполирования. Пусть известны значения функции $f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right)$ в точках прямоугольной сетки E_N n-мерного пространства, и пусть задана некоторая точка $\xi\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}\right)$ в пределах сетки.

Требуется построить для прямоугольной сетки, содержащей данную точку ξ, линейную интерполяционную функцию $f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right) = p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}$, которая совпадает с исходной в узлах интерполирования, и найти её значение в точке ξ [2].

Для решения этой задачи будем пользоваться формулой, аналогичной формуле Ньютона линейной интерполяции функции одного переменного

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0; x_1) + R, \tag{1}$$

где R – остаточный член, $R = (x - x_0)(x - x_1) f(x; x_0; x_1)$, а $f(x_0; x_1)$ и $f(x; x_0; x_1)$ – разделённые разности, которые вычисляются по формулам

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1};$$

$$f(x_0; x_1; x_2) = \frac{f(x_0; x_1) - f(x_1; x_2)}{x_0 - x_2};$$

$$\ldots$$

$$f(x_0; x_1; \ldots; x_r) = \frac{f(x_0; x_1; \ldots; x_{r-1}) - f(x_1; x_2; \ldots; x_r)}{x_0 - x_r}.$$

Применяя n раз формулу (1) для функции n переменных, получаем:

$$f\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)=f\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\ldots,x_0^{(n)}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(i)}-x_0^{(i)}\right)f\left(x_0^{(1)};x_0^{(2)};\ldots;x_0^{(i-1)};x_0^{(i)};x_1^{(i)};x_0^{(i+1)};\ldots;x_0^{(n)}\right)+R_1^{(n)}+R_2^{(n)}, \qquad (2)$$

где

$$R_1^{(n)}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(x^{(i)}-x_0^{(i)}\right)\left(x^{(j)}-x_0^{(j)}\right)f\left(x_0^{(1)};x_0^{(2)};\ldots;x_0^{(i-1)};x_0^{(i)};x_1^{(i)};x_0^{(i+1)};\ldots;x_0^{(j-1)};\right.$$
$$\left.x_0^{(j)};x_1^{(j)};x_0^{(j+1)};\ldots;x_0^{(n)}\right)+\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\left(x^{(i)}-x_0^{(i)}\right)\left(x^{(j)}-x_0^{(j)}\right)\left(x^{k}-x_0^{(k)}\right)f\left(x_0^{(1)};x_0^{(2)};\ldots;\right.$$
$$\left.x_0^{(i-1)};x_0^{(i)};x_1^{(i)};x_0^{(i+1)};\ldots;x_0^{(j-1)};x_0^{(j)};x_1^{(j)};x_0^{(j+1)};\ldots;x_0^{(k-1)};x_0^{(k)};x_1^{(k)};x_0^{(k+1)};\ldots;x_0^{(n)}\right)+\ldots+$$
$$+\prod_{i=1}^{n}\left(x^{(i)}-x_0^{(i)}\right)f\left(x_0^{(1)};x_1^{(1)};x_0^{(2)};x_1^{(2)};\ldots;x_0^{(n)};x_1^{(n)}\right);$$

$$R_2^{(n)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(i)}-x_0^{(i)}\right)\left(x^{(i)}-x_1^{(i)}\right)D^2_{x^{(i)}}-$$
$$-\frac{1}{2^2}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(j)}-x_0^{(j)}\right)\left(x^{(j)}-x_1^{(j)}\right)\left(x^{(i)}-x_0^{(i)}\right)\left(x^{(i)}-x_1^{(i)}\right)D^2_{x^{(j)}}D^2_{x^{(i)}}+\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}\left(x^{(i)}-x_0^{(i)}\right)\left(x^{(i)}-x_1^{(i)}\right)D^2_{x^{(i)}};$$

$$f\left(x_0^{(1)};x_0^{(2)};\ldots;x_0^{(i-1)};x_0^{(i)};x_1^{(i)};x_0^{(i+1)};\ldots;x_0^{(n)}\right)=$$
$$=\frac{f\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\ldots,x_0^{(i-1)},x_1^{(i)},x_0^{(i+1)},\ldots,x_0^{(n)}\right)-f\left(x_0^{(1)},x_0^{(2)},\ldots,x_0^{(n)}\right)}{x_1^{(i)}-x_0^{(i)}};$$

$$D^2_{x^{(i)}}=\frac{\partial^2 f\left(\xi_*^{(i)}\right)}{\partial x^{(i)2}},\ x_0^{(i)}\le\xi_*^{(i)}\le x_1^{(i)}.$$

Если задать сетку E_N точек x_{j_i}, такую что $x^{(i)}=x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_{m_i}^{(i)},i=\overline{1,n},$ $j_i=\overline{1,m_i}$, то в каждом n-мерном прямоугольнике $\Pi=\left\{x_{j_i}^{(i)}\le\xi^{(i)}\le x_{j_i+1}^{(i)}\right\}$ для функции $f\left(x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}\right)$ будет 2^n интерполяционных формул вида (1) [3].

Для однозначности решения поставленной задачи на число узлов интерполирования и на функции $\varphi_i(x)$ накладываются такие условия, чтобы каждой функции $f(x)\in R$ можно было поставить в соответствие один и только один обобщённый многочлен по системе функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)$, являющийся интерполяционным многочленом для функций $f(x)$ по данной системе узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$ при $i \neq j$).

Назовём систему функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ системой Чебышева на отрезке [a, b], если любой обобщённый многочлен по этой системе, у которого хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля, имеет на [a, b] не более n нулей. Очевидно, требование линейной независимости системы является необходимым для того, чтобы система была системой Чебышева на [a, b].

Теорема. Для того, чтобы для любой функции $f(x)$, определённой на отрезке [a, b] и для любого набора $n + 1$ узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in [a,b], x_i \neq x_j$ при $i \neq j$) существовал обобщённый интерполяционный многочлен $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы система функций $[\varphi_i(x)]$ являлась системой Чебышева на [a, b]. При этом интерполяционный многочлен будет единственным [4].

Предлагаемый алгоритм [5] реализует формулу (2) в виде

$$f\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right) \approx \overline{f}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right) = f\left(x^{(1)}_{j_1+\theta_1}, x^{(2)}_{j_2+\theta_2}, \ldots, x^{(n)}_{j_n+\theta_n}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(x^{(i)} - x^{(i)}_{j_i+\theta_i}\right) \times f\left(x^{(1)}_{j_1+\theta_1}; x^{(2)}_{j_2+\theta_2}; \ldots; x^{(i-1)}_{j_{i-1}+\theta_{i-1}}; x^{(i)}_{j_i+\theta_i}; x^{(i)}_{j_i+1-\theta_i}; x^{(i+1)}_{j_{i+1}+\theta_{i+1}}; \ldots; x^{(n)}_{j_n+\theta_n}\right) =$$

$$= p_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)},$$

где $p_i = f\left(x^{(1)}_{j_1+\theta_1}; \ldots; x^{(i-1)}_{j_{i-1}+\theta_{i-1}}; x^{(i)}_{j_i+\theta_i}; x^{(i)}_{j_i+1-\theta_i}; x^{(i+1)}_{j_{i+1}+\theta_{i+1}}; \ldots; x^{(n)}_{j_n+\theta_n}\right)$;

$$p_0 = f\left(x^{(1)}_{j_1+\theta_1}; \ldots; x^{(n)}_{j_n+\theta_n}\right) - \sum_{i=1}^{n} x^{(i)}_{j_i+\theta_i} p_i \ ;$$

$$\theta_i = \begin{cases} 0, \text{если } x^{(i)}_{j_i} \le \xi^{(i)} < \dfrac{x^{(i)}_{j_i+1} + x^{(i)}_{j_i}}{2}, \\ 1, \text{если } \dfrac{x^{(i)}_{j_i+1} + x^{(i)}_{j_i}}{2} \le \xi^{(i)} < x^{(i)}_{j_i+1} \end{cases} \qquad (3)$$

где $x^{(i)}_{j_i} \le \xi^{(i)} < x^{(i)}_{j_i+1}$

(без подсчёта остаточных членов $R_1^{(n)}$ и $R_2^{(n)}$).

Погрешность приближения при условии ограниченности второй производной вычисляется по формуле

$$R \le \frac{1}{2^n} nCH(1 + H),$$

где $C = \max f''_{x^{(i)}}\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}\right), \left(x_1^{(i)} \le x^{(i)} \le x^{(i)}_{m_i}\right)$, $H = \max\limits_{i=1,n} \max\limits_{j=1,m_1-1} \left|x^{(i)}_{j_1+1} - x^{(i)}_{j_1}\right|$.

Способ расшифровки информации. Пусть каждая переменная $x^{(i)}\left(i=\overline{1,n}\right)$ пробегает значения $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{m_i}^{(i)}$. В таком случае сетка будет состоять из N точек, в которых заданы значения функции $f\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right), j_i=\overline{1,m_i}$;

$$N = m_1 + \sum_{j=2}^{n}\left(m_j - 1\right)\prod_{i=1}^{j-1} m_i . \qquad (4)$$

Данные по сетке можно расположить следующим образом:

1) точки сетки задать таблицей:

$x^{(i)}$	Значения
$x^{(1)}$	$x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad x_3^{(1)} \quad \cdots \quad x_{m_1}^{(1)}$
$x^{(2)}$	$x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)} \quad x_3^{(2)} \quad \cdots \quad x_{m_2}^{(2)}$
$x^{(3)}$	$x_1^{(3)} \quad x_2^{(3)} \quad x_3^{(3)} \quad \cdots \quad x_{m_3}^{(3)}$
$\vdots$	…………………………………
$x^{(n)}$	$x_1^{(n)} \quad x_2^{(n)} \quad x_3^{(n)} \quad \cdots \quad x_{m_n}^{(n)}$

2) значения функции в точках сетки задать n строками, причём первая строка будет состоять из m_1 элементов и иметь вид

$$f\left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), f\left(x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), \ldots, f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$

а любая l-я последующая строка будет состоять из $\prod_{i=1}^{l-1} m_i\left(m_l - 1\right)$ элементов и иметь вид

$$f\left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), f\left(x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$
$$f\left(x_3^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), \ldots, f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$
$$f\left(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), f\left(x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$
$$f\left(x_3^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), \ldots, f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_2^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$
$$f\left(x_1^{(1)}, x_3^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), f\left(x_2^{(1)}, x_3^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$
$$f\left(x_3^{(1)}, x_3^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right), \ldots, f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_3^{(2)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$

………………………………………………………………………………………

$$f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_{m_2}^{(2)}, x_1^{(3)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$

…………………………………………………………………………………………

$$f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_{m_2}^{(2)}, x_{m_3}^{(3)}, x_1^{(4)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$

…………………………………………………………………………………………

$$f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_{m_2}^{(2)}, x_{m_3}^{(3)}, x_{m_4}^{(4)}, x_1^{(5)}, \ldots, x_2^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right),$$

…………………………………………………………………………………………

$$f\left(x_{m_1}^{(1)}, x_{m_2}^{(2)}, x_{m_3}^{(3)}, x_{m_4}^{(4)}, \ldots, x_{m_l}^{(l)}, x_1^{(l+1)}, \ldots, x_1^{(n)}\right).$$

Если считать, что

1) элементы массива F значений функции в точках сетки расположены таким образом по строкам, а строки – в порядке возрастания их номеров;

2) $f\left(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(n)}\right)$ – первый элемент массива, то $f\left(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right)$ будет являться N_i-м элементом массива F

$$N_i = j_1 + \sum_{i=2}^{n} (j_i - 1) \prod_{k=1}^{i-1} m_k. \tag{5}$$

Пусть $\xi\left(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(n)}\right)$ – точка, в которой нужно найти значение функции.

Если $x_{j_i}^{(i)} \le \xi^{(i)} < x_{j_i+1}^{(i)}, i = \overline{1, n}$, то для интерполяции необходимо знать значения переменных $x_{j_i}^{(i)}, x_{j_i+1}^{(i)}, j_i, \theta_i \left(i = \overline{1, n}\right)$ и значения функции

$$f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)}, x_{j_2+\theta_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right),$$

$$f\left(x_{j_1+1-\theta_1}^{(1)}, x_{j_2+\theta_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right),$$

$$f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)}, x_{j_2+1-\theta_2}^{(2)}, x_{j_3+\theta_3}^{(3)}, \ldots, x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right),$$

$$f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)}, x_{j_2+\theta_2}^{(2)}, x_{j_3+1-\theta_3}^{(3)}, x_{j_4+\theta_4}^{(4)}, \ldots, x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right),$$

…………………………………………………………………………………………

$$f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)}, x_{j_2+\theta_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n-1}+1-\theta_{n-1}}^{(n-1)}, x_{j_n+\theta_n}^{(n)}\right),$$

$$f\left(x_{j_1+\theta_1}^{(1)}, x_{j_2+\theta_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_{n-1}+\theta_{n-1}}^{(n-1)}, x_{j_n+1-\theta_n}^{(n)}\right). \tag{6}$$

Заключение. Исследование погрешности интерполяционных формул для функций многих независимых переменных связано с рядом трудностей при оценке остаточного члена.

Во-первых, оценить остаточный член интерполяционной формулы функции многих переменных по аналогии с оценкой остаточного члена для функции одного переменного невозможно, так как теорема Роля для случая многих независимых переменных действовать не будет.

Во-вторых, формулы остаточного члена при интерполировании функции многих переменных очень громоздки и трудно подобрать алгоритм, вычисляющий остаточный член с большой степенью точности.

Для нашей задачи линейной интерполяции функции многих переменных формула остаточного члена будет ещё более громоздкая за счёт того, что в неё войдут члены интерполяционной формулы, включающие разделённые разности, начиная со 2-го порядка и выше.

Формула остаточного члена разбита на две части и имеет вид

$$R^{(n)} = R_1^{(n)} + R_2^{(n)}.$$

Для оценки $R_2^{(n)}$ необходимо вычислять разделённые разности

$$f\left(x^{(1)}; x^{(2)}; \ldots; x^{(i)}; x_0^{(i)}; x_1^{(i)}; x^{(i+1)}; \ldots; x^{(n)}\right).$$

Это возможно только тогда, когда известно аналитическое выражение функции. Так как в нашей задаче функция задана в виде таблицы, то можно было бы вычислять разделённые разности путём численного дифференцирования, но этот приближенный метод привёл бы к ещё большему увеличению погрешности. Поэтому имеет смысл ограничиться вычислением только $R_1^{(n)}$, учитывая при этом, что полученное значение $R_1^{(n)}$ будет нижней границей точности полученного решения.

Алгоритм линейной интерполяции функции многих переменных реализован на языке Алгол-60, а также на языке С++ для суперкомпьютера с кластерной архитектурой. Алгоритм может быть применен для расчетов, когда требуется вычислять значения в заданных точках n-мерных пространств, в частности в картографии.

1. *Стефенсен Н.Ф.* Теория интерполяции. – ОНТИ, М-1, 1935. – 236 с.
2. *Микеладзе Ш.Е.* Численные методы математического анализа. – ГТТИ, 1953. – 527 с.
3. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования функций: 12-е изд. – ГТТИ, 1954. – 327 с.
4. *Соболев С.Л.* О задаче интерполирования функции n переменных // Докл. АН СССР. – 1961. – 137, № 4. – С. 126 –154.
5. *Порханова А.А., Фесун Т.М.* Линейное интерполирование функций многих переменных // Материалы IV республ. науч. конф. молодых исследователей по системотехнике. – Киев, 1970. – III. – С. 68 –78.

Получено 12.10.2009