

## СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАМАГНИЧИВАНИЯ ФЕРРОМАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ И ИХ АППРОКСИМАЦИЯ

**Е.И. Зарицкая**<sup>1</sup>, асп., **О.П. Никитин**<sup>2</sup>, канд. техн. наук, **А.М. Олейников**<sup>3</sup>, докт. техн. наук

<sup>1</sup> – Одесский нац. морской ун-т,

ул. Мечникова, 34, Одесса, 65029, Украина

<sup>2, 3</sup> – Севастопольский нац. техн. ун-т

ул. Университетская, 33, Севастополь, 99053, Украина

*Приведены экспоненциальные и гиперболические уравнения, реализованные для аппроксимации кривых намагничивания применяемых в электромашиностроении электротехнических сталей, чугуна, а также железомедных композиций с пониженной магнитной проницаемостью. Библ. 3, рис. 2, табл. 2.*

**Ключевые слова:** аппроксимация, кривая намагничивания, электротехническая сталь, магнитная цепь, индукция, напряженность, электрическая машина, экспонента, гипербола.

Аппроксимацией, в общем понимании, является аналитическое приближение некой кривой к характеристике, заданной эмпирически. Кривые намагничивания  $B = f(H)$  электромагнитных материалов или участков магнитных цепей определяются экспериментально и приводятся, как правило, в виде графиков или в табличной форме. В связи с тем, что при проектировании современных электрических машин и аппаратов широко применяются ПЭВМ, становится все более актуальным аналитическое представление этих кривых в широком диапазоне изменения напряженности  $H$  и с необходимой точностью приближающихся к заданным характеристикам.

В настоящее время известны различные способы аппроксимации, которые касаются как непосредственно кривых намагничивания ферромагнитных материалов, так и характеристик намагничивания электрических машин или отдельных элементов их магнитных цепей (ярма, зубцов и т. д.). Возможно, например, применение уравнения параболы [2]

$$B_m = kH_m^{1/n} \quad (n = \text{var}), \quad (1)$$

которое дает хорошее совпадение в области сильных полей и несколько хуже – в области слабых полей. Для области средних полей (на «колене» кривой) это простое уравнение оказывается неподходящим.

Характеристика холостого хода (характеристика магнитной цепи) электрической машины, выражаемая зависимостью  $E = f(I_e)$ , аппроксимируется рядом простых выражений [1], например,

$$E = a \cdot \arctg bI_e, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  – постоянные величины.

Эти формулы могут быть применены и для характеристики  $B = f(H)$  при замене  $E$  и  $I_e$  на  $B$  и  $H$  и подборе новых постоянных  $a'$  и  $b'$ , т.е.

$$B = a' \cdot \arctg b'H,$$

однако точность такой аппроксимации в целом ряде случаев может быть не вполне удовлетворительной.

В работе [3] приведено, по меньшей мере, с десяток уравнений для аппроксимации так называемой «нормальной» (усредненной) характеристики намагничивания электрических машин, дающих ту или иную степень приближения к исходной кривой.

Исследования показывают, что для целого ряда кривых, отличающихся как характером изменения  $B = f(H)$ , так и величиной индукции насыщения  $B_s$ , могут быть успешно применены и другие приемы, реализация которых с применением ПЭВМ дает высокую точность аппроксимации в широком диапазоне изменения  $B$  и  $H$  [2].

В работе [2] приведены два вида универсальных уравнений – экспоненциальное и гиперболическое, реализованные для аппроксимации кривых намагничивания наиболее широко применяемых в электромашиностроении ферромагнитных материалов – рулонных, литых или кованных электротехнических сталей, чугуна, а также литых и прессованных железомедных композиций с пониженной магнитной проницаемостью. При этом были использованы значения напряженностей и индукции, которые или приведены в специальных изданиях, или исследовались авторами (для специальных сплавов). Количество заданных точек укладывалось в пределы 20...30.

Для примера показаны снятые экспериментально различные по характеру кривые намагничивания электротехнической стали марки 2411 (рис. 1) и железомедного сплава СМ-20 (20 % меди) на рис. 2 (по результатам решения в среде Mathcad).

Следует сразу отметить, что кривые намагничивания чугуна, сплавов СМ и подобных им материалов с пониженной магнитной проницаемостью могут быть аппроксимированы и более простой экспоненциальной зависимостью вида

$$B = c(1 - e^{-sH}). \quad (3)$$

Например, для упомянутого сплава СМ-20 при значениях коэффициентов  $c = 1,3$  и  $s = 1,08$  погрешность расчета не превышает 2,5 %.

В качестве основного метода для аппроксимации реализован метод наименьших квадратов, суть которого состоит в том, что находятся такие значения постоянных коэффициентов, чтобы средняя квадратичная ошибка  $\Delta z$  была минимальной, то есть находится минимум соотношения

$$\Delta z = \sqrt{\frac{\sum_i (f(H_i) - Y_i)^2}{n}},$$

где  $f(H_i)$  – аналитическое выражение аппроксимируемой кривой;  $Y$  – массив значений индукции;  $n$  – число выбранных точек. Этот метод гарантирует определение коэффициентов  $f(H)$  так, чтобы  $\Delta z$  было минимальным, но при этом на некоторых участках изменения напряженности  $H$ , ввиду достаточно сложного характера кривых, в отдельных ее участках, ошибка  $|\Delta z_i|$  могла оказаться больше, чем  $\Delta z$ .

В связи с этим возникла необходимость получить новые уравнения кривых, чтобы ошибки  $|\Delta z_i|$  на всей области изменения напряженности и для всех рассматриваемых материалов были меньше  $\Delta z$ . В данном случае для нахождения коэффициентов  $f(H)$ , как и в работе [2], использовался метод наименьших квадратов, а затем производилось уточнение некоторых из найденных коэффициентов таким образом, чтобы уменьшить ошибки  $|\Delta z_i|$ .

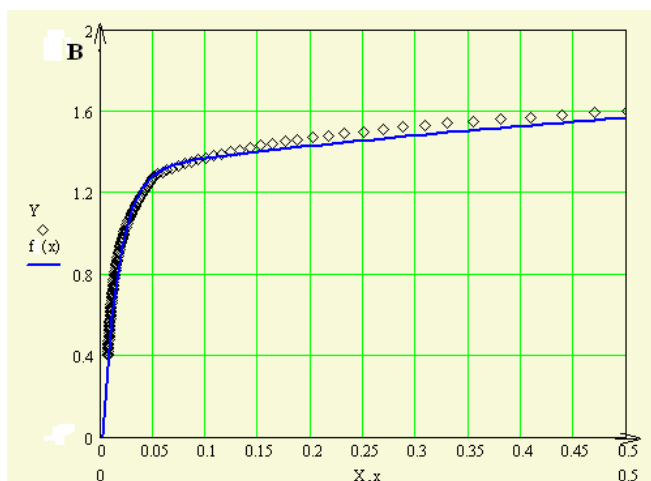


Рис. 1

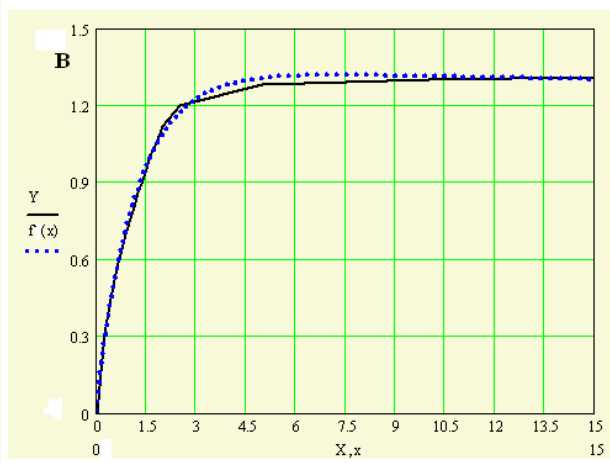


Рис. 2

При выборе аналитического выражения для функции  $B=f(H)$  использовались соображения физической интерпретации процесса намагничивания.

При описании характера изменения магнитной индукции ферромагнетика в процессе намагничивания следует учесть, что в случае увеличения напряженности поля выше области перегиба кривой (в зоне насыщения), индукция теоретически стремится к индукции насыщения  $B_s$ , при этом приращение индукции стремится к нулю. Индукция насыщения изменяется по линейному закону так, что подчиняется уравнению  $B_s = a \cdot H + b$ . В этом случае величина

$\frac{dB}{dH}$  (дифференциальная магнитная проницаемость) стремится к постоянной  $a$ , то есть  $\frac{dB}{dH} - a \rightarrow 0$  при  $H \rightarrow \infty$ . Величина  $(B_s - B)$  при  $H \rightarrow \infty$  также стремится к нулю. Поэтому можно

принять, что  $\frac{dB}{dH} - a$  и  $(B_s - B)$  связаны между собой зависимостью вида

$$\frac{dB}{dH} - a = k(a \cdot H + b - B)^r. \quad (4)$$

Разделяя в выражении (4) переменные, получаем

$$\frac{d(B - aH - b)}{(aH + b - B)^r} = kdH. \quad (5)$$

Уравнение (5) проанализируем для значений  $r \neq 1$  и  $r = 1$ . Интегрируя его при  $r \neq 1$ , получаем

$$-\frac{(aH + b - B)^{1-r}}{1-r} = k_1 H + c_1, \quad (6)$$

откуда

$$(aH + b - B)^{1-r} = (r-1)(k_1 H + c_1). \quad (7)$$

Уравнение (7) отражает физические процессы намагничивания только при  $r > 1$ , так как в противном случае его правая часть отрицательна. После преобразований (7) имеем

$$B = aH + b + (r-1)^{\frac{1}{1-r}} (k_1 H + c_1)^{\frac{1}{1-r}}. \quad (8)$$

Вводя в уравнение (8) обозначения

$$[k_1(r-1)]^{\frac{1}{1-r}} = k; \quad \frac{1}{1-r} = -s; \quad \frac{c_1}{k_1} = c,$$

получаем

$$B = aH + b + k(H + c)^{-s}, \quad (9)$$

или в окончательном виде

$$B(H) = a \cdot H + b + \frac{k}{(H + c)^s}. \quad (10)$$

Интегрируя выражение (5) при  $r = 1$ , получаем

$$B = aH + b - ce^{-aH}. \quad (11)$$

Выражения (10) и (11), как и определено выше, отражают общие закономерности процессов намагничивания. Однако применяемые в технике стали и сплавы, как известно, не являются однородными, а их структура, в значительной степени влияющая на процессы намагничивания, зависит от многих факторов, в том числе от наличия примесей, вида прокатки и термообработки. Поэтому вместо уравнений (10), (11) в статье рассмотрены уравнения более общего вида:

$$B(H^*) = a + bH^* + ke^{-cH^*} + de^{-sH^*} \quad (12)$$

и

$$B(H^*) = a + bH^* + \frac{k}{(H^* + c)^s}, \quad (13)$$

где  $H^* = H \cdot 10^{-4}$ , а размерности физических величин подставляются в системе SI.

Результаты аппроксимации основных кривых намагничивания различных материалов и участков магнитной цепи экспоненциальными функциями приведены в табл. 1, а основных кривых намагничивания различных материалов и участков магнитной цепи гиперболическими функциями представлены в табл. 2, где обозначения постоянных коэффициентов для большего удобства применения изменены на последовательные значения  $a_n$ .

Как видно, уравнения (12) и (13) обеспечивают достаточно высокую и практически одинаковую точность аппроксимации; относительная погрешность не превышает 3...5 % для основных марок электротехнической стали и 1...2,2 % для массивных поковок и участков магнитной цепи. Анализируя таблицы, замечаем также, что величина коэффициента  $a_0$  для всех материалов изменяется в узких пределах (в основном 1...2,6), что подчеркивает общность представления процесса намагничивания.

Таким образом, полученные результаты дополняют существующие методы аналитического представления кривых намагничивания, и уравнения (12) и (13) могут быть использованы в приведенном здесь виде при расчетах на ПЭВМ в соответствии с данными таблицы, а при необходимости решены в среде Mathcad и для других магнитных материалов или композиций и участков магнитной цепи.

Таблица 1

Марка материала	$B(H^*) = a_0 + a_1H^* + a_2e^{a_3H^*} + a_4e^{a_5H^*}$						$\delta_{\max}$
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	
2013	2,0	0,014	-2,48	-1,54	0,568	-1,33	<4%
спинка	1,8	0,28	-1,33	-58,2	-0,42	-8,8	<5%
зубцы	1,79	0,3	-1,32	-59	-0,42	-8,7	<5%
2411	1,92	0,012	-1,3 H>76 -1,38 H<77	-64,3	-0,61	-1,06	<5% <5%
зубцы	1,85	0,075	-1,79	-151,2	-0,58	-5,5	<5%
спинка	2	0,072	-1,72 H<84 -1,79 H>83	-74,7	-0,56	-2,84	<5% <sub>6</sub> <5%
2211, 2312	2	0,015	-1,17	-48	-0,6	-0,88	<5% <sub>5</sub>
спинка	1,86	0,17	-1,38	-47,5	-0,57	-4,97	<3%
зубцы	1,96	0,134	-1,35	-32,4	-0,74	-4,6	<3%
1211, 1212, 1311	2	0,013	-1,24 H>175 -1,3 H<176	-23,6	-0,66	-0,89	<4%
1411, 1412, 1413	1,86	0,0135	-1,47 H>66 -1,53 H<67	-87,7	-0,63	-1,42	<5%
1511, 1512, 1513	1,89	0,013	-1,14 H>105 -1,2 H<106	-29	-0,57	-0,79	<4%
3411 поковки	1,9	0,022	-0,91	-34,8	-0,4	-3,3	<2%
3413	1,97	0,021	-1,67	-50,5	-0,29	-3,5	<5%
Ст-3 полюса поковки	1,53 3,42 0	0,15 0,17 12,5	-1,65 -1,56 0	-28 -10,5 0	-0,25 -1,9 0	-5 -0,06 0	<5,5% <sub>6</sub> <5% , H>104 <1% , H<105
Чугун	1,48	0,022	-0,76	-4,22	-0,77	0,434	<4% <sub>8</sub>
СМ-20	1,34	0,0025	-0,06	-13	1,275	0,825	<5%

Таблиця 2

Сталь	$B(H^*) = a_0 + a_1 H^* + \frac{a_2}{(H^* + a_3)^{a_4}}$					$\delta_{\max}$
	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	
2013	2,15	0,0109	-0,29	-0,0043	0,27	<5%
для спинки	1,751	0,439	-0,0047	0,028	1,66	<4%
для зубцов	1,78	0,36	-0,00493	0,0271	1,639	<3,5%
2411	2,45	0,0079	-0,72	-0,0045	0,173	<5%
для спинки	2,15	0,055	-0,327	-0,003	0,27	<5%
для зубцов	2,24	0,045	-0,3	-0,0033	0,33	<5% H>50
2211, 2312	2,645	0,0084	-0,869	-0,0041	-0,16	<5% H>103
для спинки	1,89	0,135	-0,07	0,012	0,79	<3%
для зубцов	2,14	0,09	-0,16	0,018	0,695	<2,2%
1211, 1212, 1311	2,37	0,009	-0,587	-0,0012	0,2795	<4%
1411, 1412, 1413	2,14 0,196	0,011 90	-0,42 0	-0,0022 0	0,26 0	<5% H>74 <1% H<75
1511, 1512, 1513	2,31	0,01	-0,61	-0,015	0,237	<5%
3411 поковки	2,025	0,012	-0,14	0,0033	0,51	1,5%
3413	1,891	0,0386	-0,0016	0,0368	2,166	<5%
Ст-3 полюса	1,62	0,12	-0,017	0,08	1,85	<5% H>210
Ст-3 поковки	2,27 0	-0,729 12,5	-0,166 0	0,193 0	1,61 0	<5% H>112 <1% H<113
Чугун	-0,954	-0,04	1,98	-0,038	-0,18	<4%
СМ-20	1,44	-0,0099	-80,6	3,535	3,196	<5%

1. Копылов И.П., Горяинов Ф.А., Клоков Б.К. и др. Проектирование электрических машин: Учеб. пособ. для вузов / Под ред. И.П. Копылова. – М.: Энергия, 1980. – 490 с.
2. Никитин О.П., Олейников А.М. Об аппроксимации кривых намагничивания // Электротехника. – 1986. – № 6. – С. 33–35.
3. Туровский Я. Техн. электродинамика: Пер. с польск. – М.: Энергия, 1974. – 488 с.

УДК 621.318.1

**О.І. Зарицька<sup>1</sup>**, асп., **О.П. Нікітін<sup>2</sup>**, канд. техн. наук, **О.М. Олейников<sup>3</sup>**, докт. техн. наук

1 – Одеський нац. морський ун-т,  
вул. Мечникова, 34, Одеса, 65029, Україна

2, 3 – Севастопольський нац. техн. ун-т,  
вул. Університетська, 33, Севастополь, 99053, Україна

#### Статичні характеристики намагнічування ферромагнітних матеріалів та їх апроксимація

Наведено експонентні й гіперболічні рівняння, реалізовані для апроксимації кривих намагнічування застосовуваних у електромашинобудуванні електротехнічних сталей, чавуну, а також залізомідних композицій зі зниженою магнітною проникністю. Бібл. 3, рис. 2, табл. 2.

**Ключові слова:** апроксимація, крива намагнічування, електротехнічна сталь, магнітний ланцюг, індукція, напруженість, електрична машина, експонента, гіпербола.

**O.I. Zarytsca<sup>1</sup>**, **O.P. Nikitin<sup>2</sup>**, **O.M. Oleynikov<sup>3</sup>**

1 – Odesa National Maritime University,  
Mechnikov st., 34, Odessa, 65029, Ukraine

2, 3 – Sevastopol National technical university,  
University st., 33, Sevastopol, 99053, Ukraine

#### Static characteristics of the ferromagnetic material magnetizing and their approximate

The exponential and hyperbolic equations are realized for the approximation of the magnetizing curves used in electromechanical engineering of technical steels, cast iron and also iron-cooper composition with lower magnetic permeability. References 3, figures 2, tables 2.

**Key words:** approximation, magnetizing curve, electrical steel, magnetic circuit, induction, strength, electrical machine, exponent, hyperbola.

Надійшла 22.02.2012

Received 22.02.2012