УДК 621.372.542

І.А. БЕЗВЕРБНИЙ

ЧАСТОТНИЙ ДЕМОДУЛЯТОР З ВИКОРИСТАННЯМ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Використання тональних сигналів у сучасних системах зв'язку, телеметрії, гідролокації – явище поширене і перспективне. Тональними сигналами є звукові вібрації в повітрі, рідині та твердому тілі. Обробка тональних сигналів за допомогою цифрових методів відкриває широкі перспективи для розробників процесорних систем. Тому побудова таких методів відкриває нові можливості з огляду подальших розробок у цій галузі. У роботі пропонується метод демодуляції аналогового тонального сигналу засобами цифрової обробки, розглядається аналіз обчислювального процесу за допомогою чисельно-аналітичного методу, побудованого на основі ковзного спектрального аналізу. Описані результати експериментальної перевірки ефективності роботи демодулятора.

Відомо, що тональний сигнал є комбінацією синусоїдальних імпульсів, що є здебільшого частотно-маніпульовані [1]. Тобто носієм інформації в сигналі є випадковий набір конкретних частот. У сучасних телефонних лініях застосовується тастатурний набір у вигляді комбінації двох або трьох синусоїдальних (або косинусоїдальних) сигналів з можливих восьми. Визначення частот тонального сигналу в сучасних системах тонального зв'язку провадиться за допомогою методів цифрової множинної фільтрації з наступним декодуванням [1] що реалізуються на базі швидкісних сучасних процесорів.

Постановка проблеми. У детекторі тональних сигналів, побудованому на основі системи фільтрів, передбачається велика кількість обчислень, що висуває високі вимоги до приймальної апаратури. Тому обробка тональних сигналів вимагає вартісної спеціалізованої апаратури. Разом з тим існує інший підхід до проблеми – пошук таких математичних методів, що зменшують кількість обчислень і дозволяють реалізацію обробки сигналів на дешевих сигнальних процесорах. У такий спосіб вирішується проблема зниження вартості апаратури для реалізації сучасних вимог тастатурного аналізу, перш за все демодуляції і подальшої цифрової обробки отриманої інформації.

Ступінь розробки проблеми. Вирішення означеної проблеми можна шукати в кількох площинах. Першою і найбільш відомою з них можемо вважати вже згадувані методи множинної фільтрації [1] і кореляційні методи демодуляції, засновані на використанні апріорної інформації, а також ковзний спектральний аналіз [2].

Слід нагадати, що ідея ковзного спектрального аналізу полягає у тому, що коефіцієнти перетворення Фур'є можна отримати за допомогою гребінки з N фільтрів [2] з імпульсною характеристикою k -го фільтра:

$$h(n) = \exp\left(-j\frac{2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N}\right), \tag{1}$$

де $0 \le n \le N-1$.

Частотна характеристика такого фільтра є z -перетворенням $h(n)$:

$$H\left[\exp\left(j\omega\right)\right] = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot z^{-n}\ , \tag{2}$$

тоді як для одиничного кола z -перетворення $z_k = \exp\left(-j\left(\frac{2\cdot\pi\cdot k}{N}\right)\right)$. Розглядаючи (2) як геометричну прогресію, отримуємо

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \exp\left(-j\omega\left[\frac{N-1}{2}\right]\right)\cdot\exp\left(j\frac{\pi\cdot k}{N}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{N\cdot\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi\cdot k}{N}\right)}. \tag{3}$$

При цьому амплітуда спектральних компонент може бути визначена за формулою

$$A\left(\omega_i\right) = \left|H\left(j\omega_i\right)\right|\cdot\left|F\left(j\omega_i\right)\right|. \tag{4}$$

У роботі [3] розглянутий чисельно-аналітичний метод аналізу тональних сигналів, що передбачає визначення частоти сигналу за допомогою методів ковзного спектрального аналізу. Використовуючи такий шлях у роботі [4] запропоновано метод розробки цифрових фільтрів, що можуть бути використані з метою множинної фільтрації. Метод, запропонований у статті, значно спрощує шлях розв'язання задачі тонального аналізу і дозволяє за допомогою наближеної формули обчислювати частоту з високою точністю.

Мета і завдання дослідження. Мета роботи – розробка методу точного обчислення частоти тонального сигналу, що може бути реалізований за допомогою негроміздких обчислень на дешевих сигнальних процесорах, для роботи в реальному часі.

1. Проблема подолання труднощів, пов'язаних з ефектом розмиття спектра. Можна розглядати тональний сигнал як суму частотно-маніпульованих косинусоїдальних сигналів. Але оскільки дослідження сигналів, побудованих на частотній і фазовій модуляціях, є складним з математичної точки зору, щоб бути послідовним спершу розглянемо найпростіший з тональних сигналів частотно-маніпульований косинусоїдальний сигнал, так званий однотональний сигнал. Основним параметром такого сигналу є наявність або відсутність конкретної частоти. Отже, нехай генерується сигнал у вигляді косинусоїди

$$u(t) = \cos(\omega \cdot t), \tag{5}$$

де $\omega = 2\pi \cdot f$ – колова частота, константа на протязі періоду аналізу сигналу T, оскільки параметр часу розглядається як $t = n / N$, де n – ціле число, $0 \le n < +\infty$, а N – кількість вибірок на період дискретизації, отримуємо масив N вибірок, необхідних для проведення спектрального аналізу сигналу. Тоді внаслідок роботи процесора дискретного перетворення Фур'є (ДПФ) на приймальному приладі буде отримано ряд чисел, що подано згідно з формулою

$$\left| F(j\omega) \right| = \left| \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \cdot \exp\left[-j\left(\frac{2\pi f nT}{N} \right) \right] \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi f nT}{N} \right] \cdot \exp\left[-j\left(\frac{2\pi f nT}{N} \right) \right] \right|, \tag{6}$$

де T – період дискретизації сигналу на приймальному пристрої; $0 < f < N$ – ціле число.

Проаналізувавши на максимальне значення ряд ДПФ, що складається з N чисел, отримаємо максимальне за амплітудою значення гармоніки, номер якої збігається з цілочисловим наближенням значення вхідної частоти. Одержаний ряд складається з коефіцієнтів ряду Фур'є [5]. Значення отриманих коефіцієнтів є наслідком розмиття амплітудного спектра [3]. Тому, якщо f – ціле число, то всі бокові гармоніки дорівнюватимуть нулям. Скажімо, якщо f = =2 кГц, то ряд коефіцієнтів Фур'є складатиметься цілком з нулів за винятком другого і $(N-2)$-го членів (рис. 1).

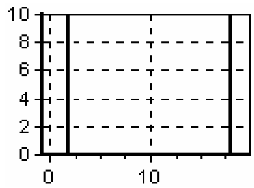

РИС. 1

Якщо є можливість розмістити в частотній області тональні сигнали цілочислового значення частоти, можна побудувати абсолютно точний частотний детектор використовуючи виключно алгоритми ДПФ. Проблема полягає у тому, що для багатьох спеціальних систем, призначених для передачі результатів вимірювань фізичних величин, що провадиться з бортової апаратури аерокосмічних систем, вимагається велика кількість комбінацій частот [3]. Їх розміщення в частотній області, напевне, не буде збігатися з цілочисловою частотною шкалою. При цьому ряд із N членів, отриманий внаслідок перетворення Фур'є функції $f(t)$ за умови, скажімо, $f = 2{,}3$ кГц, матиме вигляд, представлений на рис. 2.

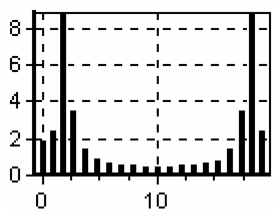

РИС. 2

Звідси видно, що максимальною гармонікою є друга, однак це не означає, що частота отриманого сигналу дорівнює 2 кГц. Значення частоти першої максимальної за значенням амплітуди гармоніки будемо називати грубо визначеною частотою.

Виходом з такої ситуації може бути метод розпізнавання частоти f функції $u(t)$, відмінної від цілочислового значення. Отже, нехай вхідний сигнал має вигляд $u(t)$, оскільки внаслідок ДПФ з N коефіцієнтів грубо визначена частота f відома, залишається визначити приріст Δf. Тоді дійсна частота сигналу дорівнює $f+\Delta f$, а функція вхідного сигналу апроксимується у вигляді

$$u_1(nT) = \cos\left[2\pi\left(f+\Delta f\right)nT\right], \tag{7}$$

де f - грубо визначена частота , а $0 \le \Delta f < 1$.

Тоді модуль ДПФ знаходимо у вигляді

$$\left|F_1(j\omega)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[\frac{2\pi\left(f+\Delta f\right)nT}{N}\right]\cdot\exp\left[-j\left(\frac{2\pi f\, nT}{N}\right)\right]\right|, \tag{8}$$

де $\omega = 2\pi f$, а f – ціле число в межах фізичної реалізації.

Слід зауважити, що для вхідної функції масив ДПФ із N членів відомий. Оскільки $0 \le \Delta f < 1$, Δf може бути поданим у вигляді $\Delta f = \dfrac{k}{M}$, де $0 \le k \le M$, а M – ціле число. Тоді максимальний член вказаного масиву може чисельно дорівнювати одному з членів ряду, що представлений формулою

$$\left|F_1(j\omega)\right| = \left|Y(f,k)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N-1} \cos\left[2\pi\left(\frac{f}{N}+\frac{k}{MN}\right)n\right]\cdot\exp\left[-j\left(\frac{2\pi f\, n}{N}\right)\right]\right|. \tag{9}$$

Внаслідок елементарних перетворень (9) отримуємо

$$\begin{aligned}\left|Y(f,k)\right| &= \frac{1}{2}\left|\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[2\pi\left(\frac{f}{N}+\frac{k}{MN}\right)nT\right]\cdot\exp\left[j\left(\frac{2\pi f\, nT}{N}\right)\right]\right| + \\ &+\frac{1}{2}\left|\sum_{n=0}^{N-1} \exp\left[2\pi\left(\frac{f}{N}+\frac{k}{MN}\right)nT\right]\cdot\exp\left[-j\left(\frac{2\pi f\, nT}{N}\right)\right]\right| = \\ &= \left|\frac{\sin\left(\dfrac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi k}{MN}\right)} + \frac{\sin\left(\dfrac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi k}{MN}+\dfrac{2\pi f}{N}\right)}\right|.\end{aligned} \tag{10}$$

Таким чином перед нами ряд Y_k з M членів, один з яких збігається з максимальною гармонікою ряду ДПФ (рис.3). Нульовий член масиву відповідає значенню f-ї гармоніки якби вхідна функція мала вигляд $u_1(nT) = \cos(2\cdot\pi\cdot f\cdot n\cdot T)$. Тобто початок координат знаходиться в точці, котра відповідає частоті вхідної функції f. Тоді частота $u(t)$ визначатиметься як

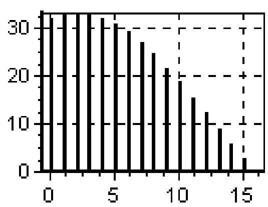

РИС. 3

$$g = f + \frac{k}{M}. \tag{11}$$

2. Аналіз отриманого сигналу за допомогою ковзного перетворення Фур'є. Із вищезазначеного випливає, що спектральний аналіз може бути виконаний за допомогою гребінки з N фільтрів [2] з імпульсною характеристикою k -го фільтра

$$h(n) = \exp\left(-j\frac{2\cdot\pi\cdot k\cdot n}{N} \right), \tag{12}$$

де $0 \le n \le N-1$.

Нехай сигнал фільтрується лише двома сусідніми фільтрами гребінки фільтрів. Відоме з [3] відношення

$$K(\omega) = \frac{A(\omega_i)}{A(\omega_{i+1})} = \frac{|H_i(j\omega)|\cdot|F(j\omega)|}{|H_{i+1}(j\omega)|\cdot|F(j\omega)|} = \frac{|H_i(j\omega)|}{|H_{i+1}(j\omega)|} \tag{13}$$

показує, що відношення двох сусідніх гармонік спектра не залежать від значення, а є функцією відношення модулів частотних характеристик сусідніх фільтрів гребінки. Таким чином, для визначення відношення (13) стосовно наведеного випадку необхідно розглянути лише дві сусідні гармоніки ряду ДПФ. Оскільки $F_1(j\omega) = A(\omega_i) = |H_i(j\omega)|\cdot|F(j\omega)|$, а $F(j\omega) = 1$, з (10) отримуємо

$$|H_i(j\omega)| = |Y(k)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi k}{MN}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi k}{MN} + \frac{2\pi f}{N}\right)} \right| \tag{14}$$

і відповідно $|H_{i+1}(j\omega)| = |Y(f+1, k+M\cdot k)| =$

$$= \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi k}{MN} - \frac{\pi}{N}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi k}{MN} + \frac{2\pi f}{N} + \frac{\pi}{N}\right)} \right|. \tag{15}$$

Тоді отримане відношення можемо розглядати як рівняння, невідомим у якому є параметр k. Але розв'язання такого рівняння має складний шлях, крім того експеримент показує, що точність, отримана внаслідок обчислень за наближеними формулами, є нижчою за точність, отриману внаслідок роботи наведеного далі спрощеного методу. Спрощення методу і, як наслідок, зменшення обчислень полягає у тому, що другий терм (14) і (15) для k, $0 \le k \le M$, дають набагато менші значення порівняно з першим термом відповідних рівнянь. Тому для конкретного випадку цілком можливо розглянути вирази (14) і (15) як відповідно

$$\left| H_i(j\omega) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi k}{MN}\right)} \right|, \quad \left| H_{i+1}(j\omega) \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{M}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi k}{MN} - \frac{\pi}{N}\right)} \right|. \tag{16}$$

Тоді $K(\omega)$ набуває вигляду

$$K(\omega) = \frac{\left| H_i(j\omega) \right|}{\left| H_{i+1}(j\omega) \right|} = \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot k}{MN} - \frac{\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi \cdot k}{MN}\right)}, \tag{17}$$

$$\left| k \right| = \left| \frac{MN}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)}{K(\omega) - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)} \right] \right| \tag{18}$$

і відповідно

$$\left| g \right| = \left| f \right| + \left| \frac{k}{M} \right| = \left| f \right| + \left| \frac{N}{\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left(\sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \Big/ \left[K(\omega) - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \right] \right) \right|. \tag{19}$$

Отже, можна зробити висновок, що значення обчисленої частоти g не залежить від щільності підбору відповідної функції, вона може бути обчислена безпосередньо за формулою (19), що повністю збігається з [3].

Реалізація. Реалізація даного методу, таким чином, полягає у послідовному виконанні наступних дій:

1. Згідно з теоремою Котельникова з урахуванням відповідної апаратури вибирається частота сигналу такою, щоб частота дискретизації була не менше, ніж у два рази більша максимальної частоти сигналу, що надходить на приймач. Відповідно визначається розмір масиву ДПФ. Реалізується приймання і відцифрування (дискретизація і квантування) сигналу.

2. За допомогою швидких алгоритмів перетворення отримуємо масив вибіркового ковзного перетворення Фур'є розмірністю N і визначаємо цілочислове значення частоти вхідного сигналу.

3. Визначається напрямок зміщення спектральної лінії тону, що обумовлене ефектом розмиття дискретного спектра. Напрямок зміщення визначається з наступних міркувань. На рис. 4 зображений графік дійсної складової дискретного комплексного спектра. Зрозуміло, що саме між двома додатними гармоніками знаходиться істинна частота вхідного сигналу. Отже, зміщення спектральної лі-

нії тону відбуватиметься в той бік, де міститиметься додатна складова комплексного значення сусідньої від максимальної за амплітудою гармоніки спектра.

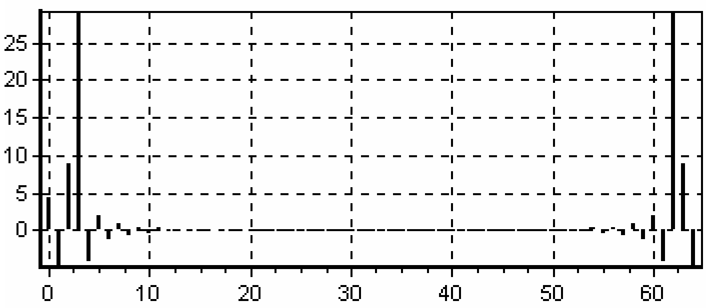

РИС. 4

4. Визначається значення відношення сусідніх гармонік. В залежності від напрямку зміщення спектральної лінії $K(\omega) = A(\omega_i)/A(\omega_{i+1})$ або $K(\omega) = A(\omega_i)/A(\omega_{i-1})$.

5. У випадку зміщення спектральної лінії сигналу вправо визначається частота з використанням формули (19), вліво – формула визначення частоти набуде вигляду

$$|g| = |f| - \left|\frac{k}{M}\right| = |f| - \left|\frac{N}{\pi}\cdot \operatorname{arctg}\left(\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\Big/\left[K(\omega) - \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)\right]\right)\right|. \qquad (20)$$

Означений метод випробуваний програмно на операційній системі Windows 98 за допомогою інтерфейсу управління мультимедійними пристроями MCI і дозволяє з достатньою точністю (менше 1%) визначати частоту вхідної функції частотно-маніпульованого сигналу без урахування фази в режимі реального часу. З урахуванням несуттєвого зростання помилки метод може використовуватися для детектування сигналу, що містить в собі кілька тонів (наприклад, два або три з восьми можливих) і може бути застосованим у телефонному тональному зв'язку з використанням дешевих сигнальних процесорів.

Висновок. Враховуючи те, що отримана в роботі формула (19) не залежить від кроку, з яким підібрана частота g, значно спрощуються методи, запропоновані в [3, 4], що дає серйозний виграш в часі. Тому результат реалізації даного методу на дешевій сигнальній апаратурі дозволятиме провадити тастатурний аналіз згідно з сучасними вимогами сигнальної обробки.

1. *Применение* цифровой обработки сигналов // Под ред. Э. Оппенгейма. – М.: Мир, 1980.– 552 с.
2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.
3. *Семотюк М.В.* Численно-аналитический метод спектрального анализа тональных сигналов // УСиМ. – 2001. – № 1. – С. 36 – 42.
4. *Безвербний І.А.* Удосконалення чисельно-аналітичного методу спектрального аналізу тональних сигналів // Засоби комп'ютерної техніки з віртуальними функціями і нові інформаційні технології. – К.: Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2002. – 1. – С. 105–109.
5. *Белецкий А.Я., Бабак В.П.* Детерминированные сигналы и спектры. –К.: КИТ, 2002. –501с.

Отримано 15.01.2004