

ЕНЕРГЕТИЧНІ СИСТЕМИ ТА КОМПЛЕКСИ

УДК 621.3.01

А.А. Щерба, Л.Ю. Спінул

ТОЧНІСТЬ ТА ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ НАПРУЖЕНОСТІ ЕЛЕКТРИЧНОГО ПОЛЯ В ДІЕЛЕКТРИЧНІЙ ІЗОЛЯЦІЇ З ПРОВІДНИМИ МІКРОВКЛЮЧЕННЯМИ

Досліджено збіжність і точність чисельного розрахунку напруженості електричного поля у діелектричному середовищі з провідним мікровключенням залежно від параметрів кінцево-елементної сітки та методу рішення системи лінійних рівнянь.

Вступ. Розв'язання задач теоретичної електротехніки з розрахунку неоднорідного електричного поля (ЕП) в діелектричному середовищі з гетерогенними мікровключеннями різної форми має важливе практичне застосування для оцінки якості ізоляції. Розвинуті країни Європи, Америки та Азії в кабельно-провідникових виробках використовують зшити поліетиленову (ЗПЕ) ізоляцію [4, 5, 8–10,12], перевагами якої є висока електрична міцність та температурна стабільність, малі тангенс кута діелектричних втрат, діелектрична проникність та ємність, висока екологічність. У роботах [4, 5, 8] показано, що у разі перевищення напруженості ЕП допустимого значення біля провідних включень, розміри яких більше 50 мкм, погіршуються властивості ЗПЕ ізоляції, що призводить до її передчасного старіння.

Задача розподілу потенціалів та напруженості ЕП у діелектричному середовищі з сферичним або еліпсоїдним провідним включенням – точний аналітичний розв'язок [3]. Але застосовувати його для розрахунку ЕП в ізоляції із значною кількістю мікродефектів різної форми практично неможливо.

Для розрахунку неоднорідних ЕП на сьогодні застосовують пакет прикладних програм Comsol Multiphysics [13], в якому диференціальні рівняння Максвелла в частинних похідних розв'язуються методом скінченних елементів. Коефіцієнтами рівнянь є такі фізичні властивості, як густина струму, питома провідність, електрична та магнітна сталі та ін. Для моделювання в програмному середовищі Comsol Multiphysics необхідно виділяти елементарний об'єм зручної конфігурації. Можливості пакета дозволяють встановлювати вид скінченних елементів (це елементи Лагранжа від першого до п'ятого ступеня), змінювати параметри скінченно-елементної сітки відповідно до конфігурації включень або меж розділення середовищ, а саме змінювати розміри елементарних вічок сітки; нерівномірно наносити сітку на область, що досліджується; скупчувати сітку в певній області; використовувати різну форму скінченних елементів. За такого підходу точність чисельного моделювання залежить від точності апроксимації вихідних диференціальних рівнянь, від параметрів розрахункової сітки та від ступеня скінченних елементів.

Метою статті є визначення параметрів скінченно-елементної сітки та виду скінченних елементів, що задаються в програмному середовищі Comsol, та оцінка їх впливу на точність та збіжність чисельного розрахунку розподілу напруженості електричного поля в діелектричному середовищі, яке містить сферичне провідне мікровключення.

Хід дослідження. Досвід практичного застосування пакета Comsol засвідчив, що точ-

ність чисельного розрахунку в ньому залежить від заданих виду скінченних елементів та параметрів сітки. У пакеті Comsol встановлено вид скінченних елементів. Це елементи Лагранжа, ступінь яких можна змінювати від одного до п'яти. Програмний пакет дає можливість змінювати такі параметри скінченно-елементної сітки, як максимальний розмір елемента; коефіцієнт масштабування розміру елемента; темп росту елемента; коефіцієнт кривизни сітки; роздільна здатність вузьких областей. За умовчанням максимальний розмір елемента становить 1/15 максимальної сторони розрахункової області. Коефіцієнт масштабування дозволяє зменшувати розмір елемента стосовно максимального. Темп зростання елемента задає ступінь скупчення сітки. Чим ближче значення цього коефіцієнта до одиниці, тим більш рівномірною буде сітка. Коефіцієнт кривизни дозволяє більш точно відобразити межу розподілу середовищ. За великих значень цього параметра крива відображається ламаною. Роздільна здатність вузьких областей визначає мінімальну кількість елементів уздовж найкоротшої сторони. Зміна цього параметра автоматично призводить до скупчення сітки біля межі розподілу середовищ і зменшення розміру елемента уздовж неї. Довільне завдання параметрів сітки в окремих випадках призводить до отримання неточного і відповідно недостовірного результату. Так, наприклад, при розрахунку електричного поля в поліетиленовій ізоляції з водним сферичним включенням напруженість поля на межі включення виявлялася різною і не завжди перевищувала в 3 рази (рис. 1) напруженість поля за відсутності включення, на відміну від теоретичного результату, відповідно до якого напруженість на межі включення та середовища однакова та перевищує в 3 рази напруженість поля за відсутності включення [2]. Аналогічно відбувається під час розрахунку напруженості ЕП в поліетиленовій ізоляції з двома водними включеннями однакового розміру, у випадку коли відстань між ними більша діаметра включення (рис. 2). З рис. 2 видно, що у випадку, якщо параметри сітки задані довільно, то значення напруженості з різних боків кожного з включень різні і, крім цього, різні для кожного з включень. Оскільки значення напруженості ЕП поблизу включення різняться, їх не можна порівнювати з допустимими. Тому про отримані під час такого розрахунку результати не можна казати як про достовірні і, таким чином, їх не можна використовувати для подальшого аналізу.

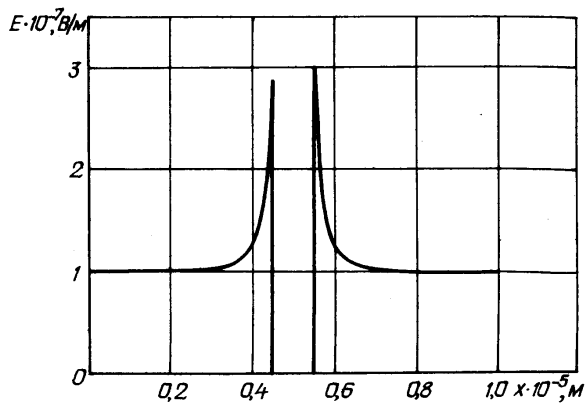


Рис. 1

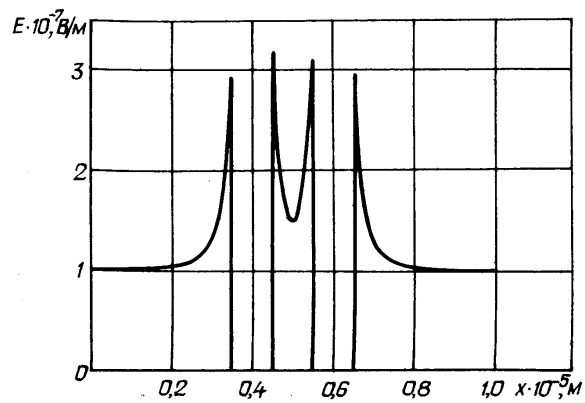


Рис. 2

Методику дослідження було побудовано на чисельному рішенні тестових задач для подальшого порівняння результатів з відомими аналітичними рішеннями.

Відповідно до [2, 7] значення напруженості ЕП в діелектричному середовищі на межі сферичного провідного мікровключення визначаються з таких рівнянь:

$$E_{2r} = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos \theta; \quad E_{2\theta} = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \sin \theta, \quad (1)$$

де E_0 – напруженість електричного поля за відсутності включення; E_{2r} та $E_{2\theta}$ – радіальна та кутова складові напруженості електричного поля в сферичній системі координат; $\varepsilon_1 = 80$ –

відносна діелектрична проникність води, а $\varepsilon_2 = 2,4$ – відносна діелектрична проникність поліетилену.

У відповідності з рівнянням (1) напруженість вертикального ЕП в ізоляції біля верхньої та нижньої меж включення однакова і більша в 3 рази значення напруженості ЕП за відсутності включення.

У разі використання пакета Comsol у випадку, коли параметри сітки задавалися довільно, траплялось, що напруженості біля верхньої та нижньої межі включення відрізнялися і в порівнянні зі значенням напруженості ЕП за відсутності включення збільшувалися не в 3 рази.

Опис методики. У відповідності з описаними в [10] дослідженнями спочатку було обрано розрахункову область у формі куба (рис. 3), розміри якого на два порядки більші, ніж розміри провідного включення (поз. 1). У розрахункову область введено додаткову (поз. 2), електрофізичні параметри якої такі ж, як і параметри ізоляції. Цю область введено з таких міркувань. По-перше, з теорії відомо, що напруженість електричного поля навколо провідного включення стрімко спадає. По-друге, у разі побудови сітки для двовимірної задачі зміна її параметрів призводила до зміни розмірів скінченних елементів як зовні включення, так і зсередини, на відміну від тривимірної задачі, коли розміри скінченних елементів змінювались лише зсередини включення. Тому наявність додаткової області дає змогу отримати більш точний розподіл напруженості електричного поля у разі вирішення тривимірної задачі. Потім задавалися електрофізичні параметри діелектричного середовища ε_1 і сферичного включення ε_2 . Вони були такими ж, як і у разі аналітичних розрахунків. Після цього визначалися граничні умови. Оскільки на поверхні розділу середовищ електричні заряди відсутні, то нормальна складова електричної індукції є безперервною, тобто однаковою з обох боків межі розподілу середовищ $D_{1n} = D_{2n}$. Внаслідок відсутності циркуляції в потенціальному ЕП тангенціальні складові напруженості ЕП також є безперервними: $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

Далі задавався вид скінченних елементів. Після цього в програмному пакеті визначалися параметри скінченно-елементної сітки: максимальний розмір елемента, коефіцієнт його масштабування та темп зростання, коефіцієнт кривизни сітки та розподільна здатність у таких областях, де розміри суттєво відрізняються від розмірів інших областей. Зміна таких параметрів для розрахунку електричних полів у середовищах з мікрровключеннями дозволяє найбільш повно заповнювати розрахункову область, геометрія якої визначається постановкою задачі, скінченними елементами і більш точно відображати досить складну конфігурацію як самої області, так і включень.

У результаті дослідження було встановлено, що на конфігурацію сітки найбільш впливають коефіцієнт кривизни (КК) сітки та розподільна здатність (РЗ) вказаних особливих областей. Із зміною цих параметрів під час розрахунку полів у середовищах з мікрровключеннями збільшується кількість елементів уздовж межі розподілу середовищ, збільшується кількість точок розрахунку, що дає можливість отримувати більш точний результат. Збільшення значення РЗ призводить до збільшення кількості елементів уздовж найкоротшої сторони межі розподілу середовищ, внаслідок чого зменшується розмір елемента і скупчується сітка уздовж межі розподілу середовищ.

Значення РЗ змінювалось від 1 (мінімально можливе для даного пакета) до значення, за якого процес розрахунку залишався збіжним. Було встановлено, що з подальшим зростанням РЗ швидкість збіжності стрімко зменшується.

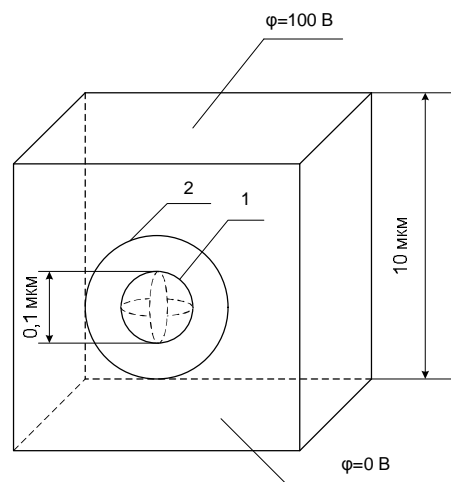


Рис. 3

Слід відзначити, що значення КК впливає на кількість елементів тільки уздовж межі розподілу середовищ. Чим менше його значення, тим більшим числом елементів представлено криволінійну межу, а якщо КК набуває великих значень, то кількість елементів зменшується і замість кривої може вийти ламана лінія (або замість криволінійної поверхні – пласка). Кількість елементів пропорційна числу π (якщо КК = 1, то число елементів дорівнює цілому від 3π , якщо КК = 0,1, то число елементів дорівнює цілому від 20π). Слід відзначити, що для одного й того ж коефіцієнта кривизни для включень різних діаметрів число елементів уздовж межі розподілу середовищ не змінюється, а змінюється прямо пропорційно діаметру лише розмір самого елемента. Тому в роботі КК змінювався від 1 (коли уздовж межі знаходяться 8 елементів) до мінімально можливого значення, коли процес розрахунку залишався збіжним. На рис. 4 показано фрагмент сітки розрахункової області біля включення для різних значень коефіцієнта кривизни – рис. 4 а відповідає значення 1, рис. 4 б – 0,3. У разі розв'язання тривимірної задачі завдяки наявності додаткової області зміна коефіцієнта кривизни призводить до скупчення сітки і зсередини, і зовні провідного включення (що видно з рисунків). Якщо додаткова область відсутня, то зміна коефіцієнта кривизни впливає тільки на розмір скінченних елементів зсередини включення.

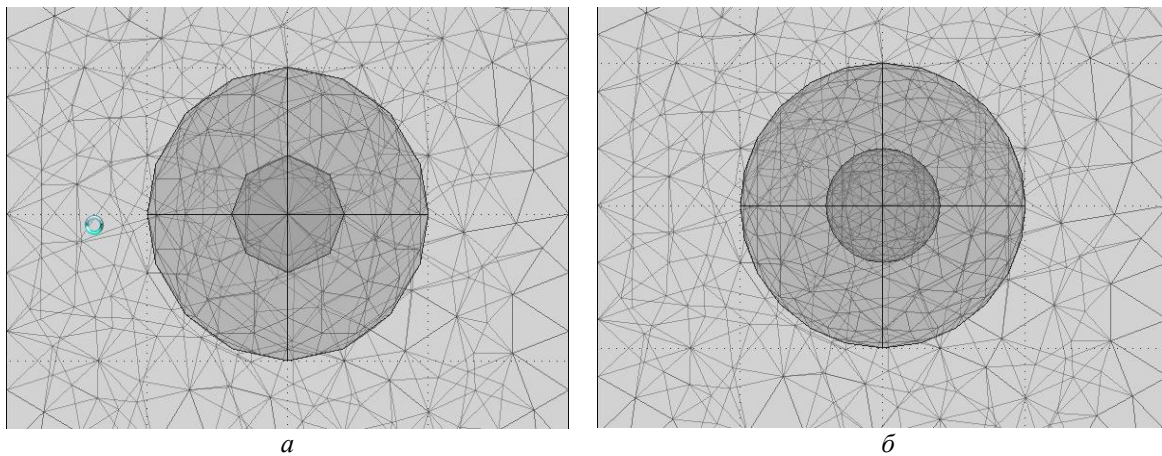


Рис. 4

Раніше відзначалося, що зі збільшенням РЗ та зменшенням КК стрімко зменшується швидкість збіжності.

У роботі [6] показано, що збіжність розрахункової схеми залежить від вибору сітки, тобто серед будь-якого набору сіток завжди знайдеться такий, на якому рішення різничевої схеми не збігається до рішення вихідного диференціального рівняння в частинних похідних. У пакеті Comsol процес обчислень збігається та завершується, коли поточна похибка стає меншою заданої $\varepsilon_{\text{пот}} < \varepsilon_{\text{задан}}$. Інакше процес буде розбіжним. У даній роботі похибка обчислень, задана в блоці рішень, складала 10^{-6} .

Мірою оцінки точності було обрано коефіцієнт симетрії J , який враховує відносні похибки, розраховані для верхньої та нижньої меж включення:

$$J = \sum_{i=1}^2 \Delta_i E, \quad (2)$$

де $i=1,2$ відповідає верхній та нижній межах включення; $\Delta_i E$ – відносна похибка,

$\Delta_i E = \frac{|E - E_0|}{E_0} \cdot 100\%$, E – розраховане значення напруженості електричного поля, E_0 – теоретичне (точне) значення напруженості електричного поля за наявності провідного включення.

Найбільш точними є розрахунки, для яких коефіцієнт симетрії є мінімальним або дорівнює нулю в ідеальному випадку.

На рис. 5 показано залежність коефіцієнта симетрії від розподільної здатності сітки, а на рис. 6 – від коефіцієнта кривизни. Криву 1 на обох графіках побудовано для випадку, коли скінченними є квадратичні елементи Лагранжа, а криву 2 – для кубічних елементів. З графіків видно, що найбільшу точність мають розрахунки, коли скінченними елементами є кубічні елементи. Крім цього, незалежно від ступеня скінченних елементів найкращими значеннями РЗ та КК сітки є ті, за яких коефіцієнт симетрії є нульовим або мінімально можливим. Це означає, що збільшення ступеня скінченних елементів, збільшення РЗ та зменшення КК підвищують точність розрахунків. Слід зауважити, що збільшення ступеня скінченних елементів впливає на час і не впливає на збіжність розрахунків, у той час, коли збільшення кількості вузлів, спричинене збільшенням розподільної здатності та коефіцієнта кривизни, призводить до розбіжності процесу розрахунку. З графіків можна побачити, що діапазон зміни коефіцієнта симетрії у разі використання кубічних елементів набагато менший, ніж у разі використання квадратичних. Тому можна запропонувати наступну методику підвищення точності розрахунків у пакеті Comsol. На першому етапі слід збільшити на порядок ступінь елементів Лагранжа за умови незмінності параметрів скінченно-елементної сітки, а на другому – змінювати параметри сітки – розподільну здатність та коефіцієнт кривизни.

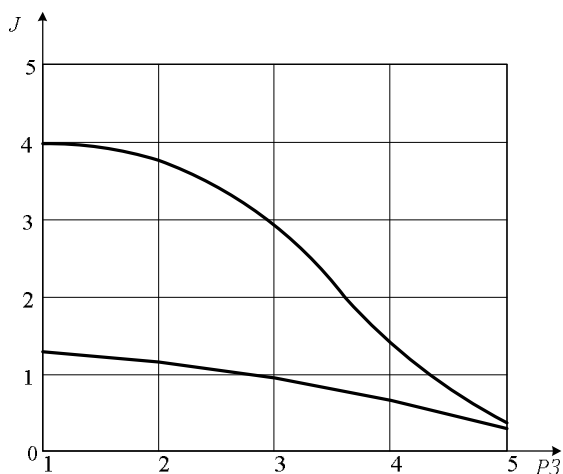


Рис. 5

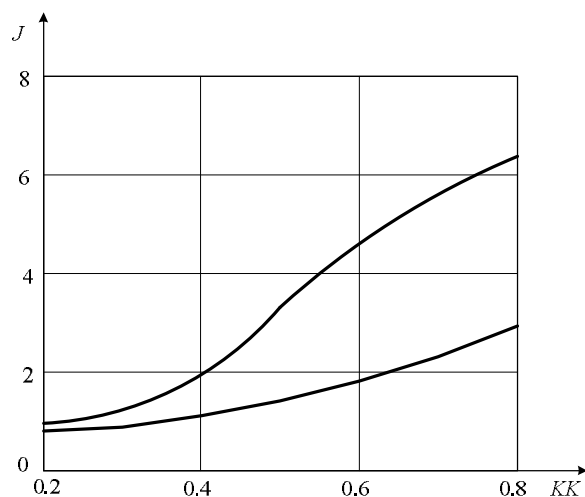


Рис. 6

Раніше відзначалося, що для певних значень РЗ та КК розрахунковий процес є розбіжним. Це спостерігається на останньому етапі обчислень, коли розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). У пакеті Comsol запропоновано декілька методів розрахунку СЛАР. Їх можна поділити на дві групи – прямі та ітеративні. До методів першої групи відносяться: 1. UMFPACK – розріджений матричний вирішувач; 2. PARDISO – паралельний розріджений лінійний вирішувач. До методів другої групи відносяться: 3. GMRES – метод мінімальних нев'язок; 4. FGMRES – гнучкий метод мінімальних нев'язок; 5. CG – метод спряжених градієнтів; 6. BiCGSTAB – стабілізований метод біспряжених градієнтів; 7. GEOMETRIC MULTIGRID – геометрична мультисітка. Методами 1...4 розв'язуються несиметричні задачі, методами 5, 6 – симетричні позитивно визначені задачі, метод 7 застосовують для розрахунку еліптичних та параболічних задач.

За умовчанням для розрахунку квазістатичних задач електромагнетизму в пакеті Comsol використовується вирішувач GMRES. Але в процесі розрахунків було встановлено наступне. Якщо з метою підвищення точності скупчувати сітку біля провідних включень, то це призводить до збільшення кількості розрахункових вузлів, зростання розмірності матриці та до втрати збіжності розрахункового процесу. Тому для визначення найкращого за точністю та часом розрахунку вирішувача для наперед визначеної кількості елементів сітки N було апробовано декілька вирішувачів, а саме 3, 4, 6, для яких оцінювалися коефіцієнт симетрії J та швидкість збіжності або час розрахунку t . Результати наведено в таблиці.

Тип вирішувача	Ступінь елементів Лагранжа	Сітка			Час
		Груба (N=5841)	Нормальна (N=17819)	Покращена (N=34810)	
GMRES	2	4,03	Розбіжність розрахунків	Розбіжність розрахунків	t, c
		5,13			J
	3	Розбіжність розрахунків	“_”	“_”	t, c
		J			
FGMRES	2	4,0	“_”	“_”	t, c
		5,13			J
	3	Розбіжність розрахунків	“_”	“_”	t, c
		J			
BiCGSTAB	2	4,36	17,62	41,81	t, c
		5,13	2,47	1,33	J
	3	38,25	150,37	338,7	t, c
		1,67	1,47	0	J

Таким чином, найкращим вирішувачем для розв’язання задачі розподілу напруженості електричного поля в діелектричному середовищі з провідним мікровключенням є BiCGSTAB, оскільки із зростанням кількості скінченних елементів сітки він забезпечує найбільшу точність.

Висновки. 1. Під час розв’язання задачі чисельного розрахунку електричного поля в діелектричному середовищі з провідними мікровключеннями з використанням програмного пакета Comsol для забезпечення високої точності розрахунку поля розподільну здатність сітки слід обирати максимально можливою, а коефіцієнт кривизни – мінімально можливим. Це дозволяє за рахунок зменшення розмірів скінченних елементів у всій розрахунковій області впливати на їх скупченість і тим самим більш точно відображати конфігурацію межі розподілу середовищ.

За такого підходу кількість скінченних елементів уздовж межі розподілу середовищ збільшується за рахунок зменшення їх розміру, а опукла межа розподілу представляється великою кількістю площин, які апроксимують її форму з високою точністю.

З метою підвищення точності розрахунків ступінь елементів Лагранжа має бути максимально можливим за умови незмінності інших параметрів розрахункового процесу. Ступінь елементів у загальному випадку обмежується ресурсами обчислювального засобу.

2. Оскільки у разі використання програмного пакета Comsol ступінь елементів Лагранжа, розподільна здатність сітки та коефіцієнт її кривизни впливають на точність розрахунку розподілу електричного поля в ізоляції біля включень досить простої форми, то слід очікувати, що аналогічний вплив буде і під час розрахунку напруженості поля в ізоляції з включеннями більш складної конфігурації.

3. Для забезпечення збіжності розрахункового процесу під час розв’язання задачі розподілу напруженості електричного поля в діелектричному середовищі з провідним мікровключенням слід використовувати вирішувач BiCGSTAB, оскільки він забезпечує найбільшу точність розрахунку.

Исследованы сходимость и точность численного расчета напряженности электрического поля в диэлектрической среде с проводящим микровключением в зависимости от параметров конечно-элементной сетки и метода решения системы линейных уравнений.

The convergence and accuracy of the numerical calculation of the electric field in a dielectric environment with a conductive micro-inclusions, depending on the parameters of the finite-element mesh and of the method for solving systems of linear equations are considered.

1. Еришов С.Е., Щерба М.А., Перетятко Ю.В., Чибелис В.И., Супруновская Н.И. Влияние на неоднородность электрического поля в полимерной изоляции формы и количества проводящих микровключений, расположенных вдоль силовых линий // Техн. электродинамика. Темат. вып. “Силовая электроника та енергоефективність”. – 2009. – Ч. 4. – С. 65–68.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука. – 1973. – 904 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука. – 1980. – 560 с.
4. Мендельсон А., Артс М.У. Мировой опыт применения изоляции из триингостойкого сшитого полиэтилена // Кабели и провода. – 2005. – № 5 (294). – С. 23–29.
5. Мещанов Г.И., Шувалов М.Ю., Каменский М.К. и др. Кабели на напряжение 10-500 кВ: состояние и перспективы развития // Кабели и провода. – 2008. – № 5 (312). – С. 32–38.

6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1989. – 432 с.
7. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука. – 1989. – 504 с.
8. Техніка і електрофізика високих напруг / За ред. В.О. Бржезицького та В.М. Михайлова – Харків: НТУ “ХПІ” – Торнадо. – 2005. – 930 с.
9. Шидловский А.К., Щерба А.А., Золотарев В.М., Перетятко Ю.В. Анализ микронеоднородности электрического поля, как фактора повышения интенсивности электрофизических процессов в полимерной изоляции высоковольтных кабелей и самонесущих изолированных проводов // Техн. електродинаміка. – 2008. – №4. – С. 3–12.
10. Щерба А.А., Перетятко Ю.В., Золотарев В.В. Самонесущие изолированные и высоковольтные защищенные провода. – К.: Изд. ИЭД НАНУ. – 2008. – 288 с.
11. Щерба А.А., Подольцев А.Д., Кучерявая И.Н. и др. Моделирование и анализ электрических полей в диэлектрических средах, содержащих включения сложной формы // Техн. електродинаміка. – 1998. – № 1. – С. 3–6.
12. Щерба А.А., Резинкина М.М. Моделирование и анализ электрических полей энергетических объектов. – К.: Наук. думка. – 2008. – 246 с.
13. Comsol Multiphysics 3.3. Comsol, Inc. – www.comsol.com

Надійшла 9.09.2010