УДК 621.314.25:621.3.021

В.А. Новский, Б.К. Жарский, В.В. Голубев

ГАРМОНИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ С ТОЧКОЙ РАЗРЫВА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Досліджено особливості гармонічного синтезу тригонометричних рядів Фур'є, які мають точку розриву, що є важливим для практичного застосування даного методу при аналізі процесів в імпульсних електричних колах.

Для анализа и синтеза нелинейных систем с преобразователями электромагнитной энергии применяются различные методы. Одним из наиболее эффективных из них является метод гармонического синтеза, практическое применение которого в ряде важных случаев требует дополнительных знаний в данной области. В связи с этим рассмотрим один из аспектов синтеза тригонометрических рядов Фурье с точкой разрыва. Известно, что функция (или ряд) терпит «разрыв» (имеет «точку разрыва»), если в знаменателе общего члена ряда, сходящегося к этой функции, при $n=a$ содержится множитель вида (n-a). Данное обстоятельство приобретает особое значение в случае перемножения тригонометрических рядов Фурье, при котором обязательной процедурой является “исключение” точки $a=n$ из искомого ряда Фурье, который соответствует произведению исходных рядов Фурье [1]. В свою очередь необходимость применения операции умножения тригонометрических рядов обусловлена решением задачи анализа электромагнитных процессов в импульсных электрических цепях с помощью методов гармонического синтеза и коммутационных функций [4…6].

В работах [2, 3] приведены выражения сумм в замкнутом виде для рядов и полиномов с точкой разрыва. Одно из них, например, имеет следующий вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}\cos(nx)=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi\cos[a(x-\pi)]}{2a\sin(a\pi)};\qquad \begin{bmatrix} a\neq n \\ 0\leq x\leq 2\pi \end{bmatrix}. \tag{1}$$

При рассмотрении этого выражения возникает вопрос относительно сути указанного неравенства $a\neq n$. На первый взгляд очевидно, что в (1) должна быть исключена точка $n = a$, поэтому перепишем его в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}'\,\frac{\cos(nx)}{n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\lim_{a\to n}\left\{\frac{\pi\cos[a(x-\pi)]}{2a\sin(a\pi)}+\frac{\cos(nx)}{n^2-a^2}\right\}. \tag{2}$$

Здесь обозначение суммы $\sum'$ представляет собой сумму всех членов при $n\neq a$ за исключением члена при $n = a$.

После некоторых преобразований выражение в фигурных скобках (2) приобретет вид

$$\lim_{a\to n}\left\{\frac{\pi\cos[a(x-\pi)]}{2a\sin(a\pi)}+\frac{\cos(nx)}{n^2-a^2}\right\}=\lim_{a\to n}\left[\frac{\pi\cos(ax)\cos(a\pi)}{2a\sin(a\pi)}+\frac{\pi\sin(ax)}{2a}+\frac{\cos(nx)}{n^2-a^2}\right], \tag{3}$$

откуда предельный переход определяется следующим образом:

$$\frac{\cos(ax)}{2a}\lim_{a\to n}\left[\frac{\pi\cos(a\pi)}{\sin(a\pi)}+\frac{1}{n\ -a}\right]=0, \tag{4}$$

или

$$\lim_{a\to n}\frac{\pi\cos(a\pi)}{\sin(a\pi)}=-\lim_{a\to n}\frac{1}{n\ -a}. \tag{5}$$

С учетом віражения (4) можно записать

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\cos(nx)}{n^2-a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi\sin(ax)}{2a}; \qquad [0 \le x \le 2\pi]\ . \tag{6}$$

Сравнивая выражения (1) и (6), приходим к выводу, что в выражении (1) вовсе не исключена точка $a = n$, т.е. запись в нем «$a \neq n$» вроде бы некорректна. Следовательно, можно высказать предположение, что выражение (1) неправильно описывает данный ряд. Однако исследования показали, что равенство (1) справедливо и выполняется даже в точке $a=n$ По мнению авторов, такая запись «$a \neq n$» выражает предостережение о том, что в точке $a=n$ функция (или ряд) терпит разрыв, а потому “указывает” на необходимость дополнительного исследования ее (его) поведения в точке $a=n$. В этой особой точке функция (ряд) может иметь разрыв первого или второго рода, т.е. бесконечный или конечный разрывы соответственно, а запись «$a \neq n$» можно считать справедливой.

В качестве примера приведем еще один тригонометрический ряд Фурье с точкой разрыва:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-a^2}\sin(nx) = -\frac{\pi\sin[a(x-\pi)]}{2\sin(a\pi)}; \ [0 < x < 2\pi], \tag{7}$$

в котором исключим точку разрыва $a=n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{n\sin(nx)}{n^2-a^2} = -\lim_{a\to n}\left[\frac{\pi\sin[a(x-\pi)]}{2\sin(a\pi)} + \frac{n\sin(nx)}{n^2-a^2}\right] = \frac{\pi\cos(ax)}{2} - \lim_{a\to n}\left\{\frac{\sin(ax)}{2}\left[\frac{\pi\cos(a\pi)}{\sin a\pi} - \frac{1}{n-a}\right]\right\}. \tag{8}$$

Поскольку выражение в фигурных скобках последней формулы с учетом (4) равно нулю, то для суммы $\sum{}'$ в этом случае имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{n\sin(nx)}{n^2-a^2} = \frac{\pi\cos(ax)}{2}. \tag{9}$$

Следовательно, исключение точки разрыва в тригонометрическом ряде осуществляется с помощью операции предельного перехода, т.е. путем определения значения функции в точке $a=n$. Для иллюстрации данных положений рассмотрим несколько характерных случаев.

Например, необходимо найти следующий предел:

$$\lim_{a\to n}\left[\frac{1}{2n^2(n-a)} + \frac{\pi\cos(a\pi)}{2a^2\sin(a\pi)}\right]. \tag{10}$$

Преобразуем второе слагаемое в (10) с учетом выражения (5):

$$\lim_{a\to n}\frac{\pi\cos(a\pi)}{2a^2\sin(a\pi)} = -\lim_{a\to n}\frac{1}{2a^2(n-a)},$$

т. е. при подстановке последнего выражения в (10) имеем

$$\lim_{a\to n}\left\{\frac{1}{2(n-a)}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{a^2}\right]\right\} = \lim_{a\to n}\left[\frac{(-1)}{2(n-a)}\cdot\frac{n^2-a^2}{(na)^2}\right].$$

Откуда после простых преобразований окончательно получаем

$$\lim_{a\to n}[\frac{1}{2n^2(n-a)} + \frac{\pi\cos(a\pi)}{2a^2\sin(a\pi)}] = -\frac{1}{a^3}.$$

Отметим, что такой же результат можно получить иным способом, а именно с помощью применения дважды правила Лопиталя для выражения (10), приведя его к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{a\to n}\left\{\frac{a^2\sin(a\pi) + a^2\pi(n-a)\cos(a\pi)}{2a^2n^2(n-a)\sin(a\pi)}\right\} = -\left[\frac{1}{n^3}\right]_{n=a} = -\frac{1}{a^3}.$$

Аналогичным образом можно найти другие пределы, которые характерны для различных синтезируемых рядов. В частности, для предела

$$\lim_{a\to n}\left[\frac{1}{n^2-a^2}+\frac{\pi\cos(a\pi)}{2a\sin(a\pi)}\right]$$

справедливо

$$\lim_{a\to n}\frac{\pi\cos(a\pi)}{2a\sin(a\pi)}=-\lim_{a\to n}\frac{1}{2a(n-a)},$$

и соответственно

$$\lim_{a\to n}\left[\frac{1}{n-a}\left(\frac{1}{a+n}-\frac{1}{2a}\right)\right]=-\lim_{a\to n}\left\{\frac{1}{n-a}\left[\frac{n-a}{2a(n-a)}\right]\right\}.$$

Откуда после некоторых преобразований имеем

$$\lim_{a\to n}\left[\frac{1}{n^2-a^2}+\frac{\pi\cos(a\pi)}{2a\sin(a\pi)}\right]=-\frac{1}{4a^2}.$$

Для следующего предела

$$\lim_{a\to n}\left[\frac{a}{n^2(n^2-a^2)}+\frac{\pi\cos(a\pi)}{2a^2\sin(a\pi)}\right]$$

с учетом (6) имеем

$$\lim_{a\to n}\left[\frac{a^2}{n^2(n^2-a^2)}-\frac{1}{2a^2(n-a)}\right]=\lim_{a\to n}\frac{1}{n-a}\cdot\left[\frac{(a-n)(n^2+an+a^2)+a(a-n)(a+n)}{2a^2n^2(n+a)}\right].$$

Откуда следует, что

$$\lim_{a\to n}\left[\frac{a}{n^2(n^2-a^2)}+\frac{\pi\cos(a\pi)}{2a^2\sin(a\pi)}\right]=-\frac{5}{4a^3}.$$

Следовательно, указанные в [2, 3] предостережения, которые выражены в форме неравенства «$a\neq n$», в таблицах сумм рядов и полиномов в замкнутом виде носят условный характер, поскольку эти формулы (замкнутые выражения сумм) описывают поведение функций также и в точке разрыва $a=n$. Это означает, что для получения правильного результата гармонического синтеза конкретного тригонометрического ряда Фурье с точкой разрыва обязательно следует исследовать поведение описывающей этот ряд функции в этой точке. Если при $a=n$ функция равна нулю, то наличие точки разрыва на результат синтеза тригонометрического ряда не влияет. Если же в точке разрыва описывающая функция имеет конечное значение, отличное от нулевого, то это значение необходимо исключить из результата гармонического синтеза. Следовательно, практическое применение метода гармонического синтеза для решения определенных задач в электротехнике и, в особенности, импульсной технике подразумевает достаточно «осторожное» использование известных формул из таблиц сумм рядов с точкой разрыва в замкнутом виде. В противном случае результаты гармонического синтеза могут быть недостоверными, а полученные результаты анализа электромагнитных процессов в импульсных электрических цепях будут ошибочными [1, 5].

В заключение приведем (без вывода) несколько полезных формул, которые необходимы для осуществления гармонического синтеза тригонометрических рядов Фурье с точками разрыва при анализе электромагнитных процессов в электрических цепях ключевых (вентильных) устройств силовой электроники:

1. $$\lim_{a\to n}\left[\frac{1}{n(n-a)}+\frac{\pi\cos(a\pi)}{a\sin(a\pi)}\right]=-\frac{1}{a^2};$$

2. $$\lim_{a\to n}\left[\frac{\pi}{\sin(a\pi)}+\frac{\cos(a\pi)}{n-a}\right]=0;$$

6. $$\lim_{a\to n}\left[\frac{\sin(a\pi)}{n-a}\right]=-(-1)^a\pi;$$

7. $$\lim_{a\to 1}\left[\frac{\sin(a\pi)}{a-1}\right]=\pi;$$

3. $\lim\limits_{a\to n}\left[\dfrac{1}{n-a}+\dfrac{\pi\cos(a\pi)}{\sin(a\pi)}\right]=0;$

4. $\lim\limits_{a\to n}\left[\dfrac{1}{a\sin^2(a\pi)}\right]=\dfrac{1}{3a^2};$

5. $\lim\limits_{a\to n}\left[\sin(a\pi)\cos(a\pi)\right]=-\lim\limits_{a\to n}\left[\pi(n-a)\right];$

8. $\lim\limits_{a\to 0}\left[\sin(a\pi)\right]=a\pi;$

9. $\lim\limits_{a\to 0}\left[\cos(a\pi)\right]=(-1)^a.$

Исследованы особенности гармонического синтеза тригонометрических рядов Фурье, имеющих точку разрыва, что является важным для практического применения данного метода при анализе процессов в импульсных электрических цепях

The features harmonic synthesis of trigonometrical lines. Fourier, having a point of break are investigated, that is important for practical application of the given method at the analysis of processes in pulse electrical circuits

1. *Жарський Б.К., Голубєв В.В., Новський В.О.* Модифіковане правило множення рядів Фур'є // Техн. електродинаміка. – 2008. – № 1. – С. 25–31.
2. *Заездный А.М.* Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М.–Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 536 с.
3. *Заездный А.М.* Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – Л.: Энергия, 1972. – 528 с.
4. *Карташов Р.П., Кулиш А.К., Чехет Э.М.* Тиристорные преобразователи частоты с искусственной коммутацией. – К.: Техніка, 1979. – 150 с.
5. *Новский В.А., Жарский Б.К., Голубев В.В.* Обобщенная форма представления функций тригонометрическими рядами для анализа процессов в импульсных системах // Пр. Ін-ту електродинаміки НАН України: Зб. наук. пр. – К.: ІЕД НАН України. – 2009. – Вип. 24. – С. 75–86.
6. *Шидловский А.К., Федий В.С.* Частотно-регулируемые источники реактивной мощности. – К.: Наук. думка, 1980. – 303 с.

Надійшла 4.10.2010