УДК 621.314.25:621.3.021

В.А. Новский, Б.К. Жарский, В.В. Голубев

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ТРИГОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

Сформульовані пропозиції щодо представлення в узагальненій формі різних функцій за допомогою тригонометричних рядів. Наведені приклади, які підтверджують достовірність отриманих результатів.

Для исследования нелинейных систем достаточно часто используется математический аппарат коммутационных (переключающих) функций. Особенно эффективным является его применение для анализа электромагнитных процессов в электрических цепях с ключевыми (вентильными) элементами, которые характеризуются разнообразием вида коммутационной функции (КФ) и различным соотношением круговых частот коммутации «ключей» и питающего напряжения. В этом случае применение аппарата КФ позволяет заменить сложную электрическую цепь с ключами эквивалентной цепью без них и тем самым значительно упростить анализ процессов, поскольку математические операции при таком эквивалентировании осуществляются не над отдельной гармоникой, а над своеобразным «пакетом» гармоник, которым, по сути, и является КФ [9, 11, 14]. В связи с этим актуальной задачей является исследование важных особенностей разложения различных функций в тригонометрические ряды, в том числе ряды Фурье.

Известно, что периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right], \qquad (1)$$

если коэффициенты этого ряда определяются формулами Эйлера-Фурье:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx. \qquad (2)$$

Отметим, что эти условия, как правило, соблюдаются для функций, описывающих токи и напряжения в ключевых преобразователях, которые имеют корректно построенные силовую схему и систему управления.

Выражение (1) можно также записать в иной форме [5]:

$$f(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos(nx-\psi_n),$$

где $$C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\;; \qquad (3)$$

$$tg\psi_n=\frac{b_n}{a_n};$$

$$a_n=c_n\cdot\cos\psi_n;$$

$$b_n=c_n\cdot\sin\psi_n. \qquad (4)$$

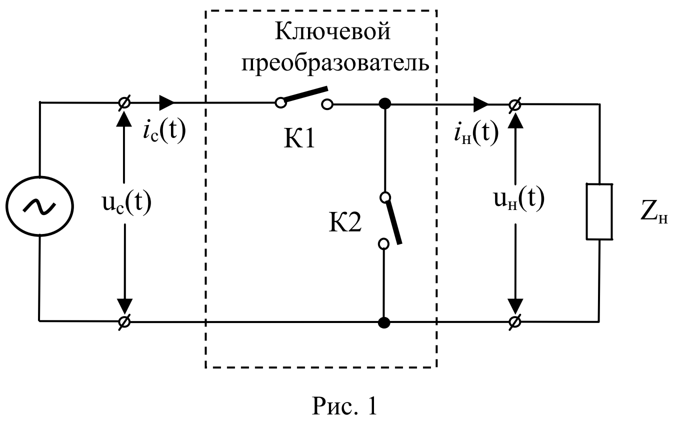

Рис. 1

Выражения (1)…(4) необходимы, в частности, для проведения последующего анализа процессов в нелинейной

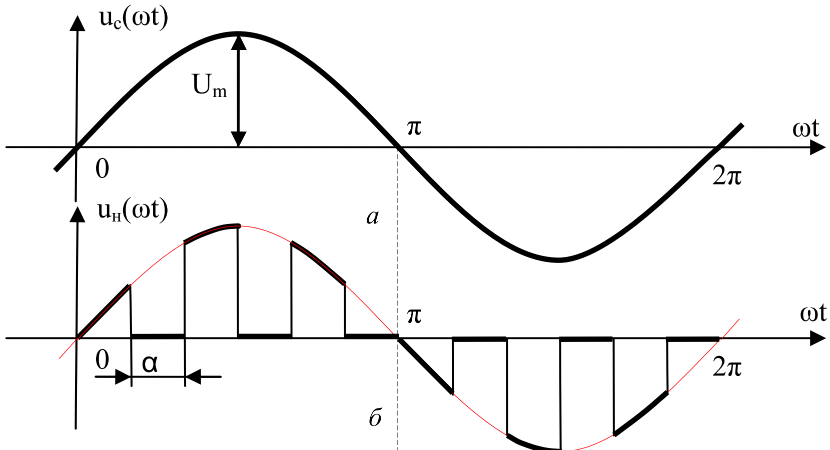

Рис. 2

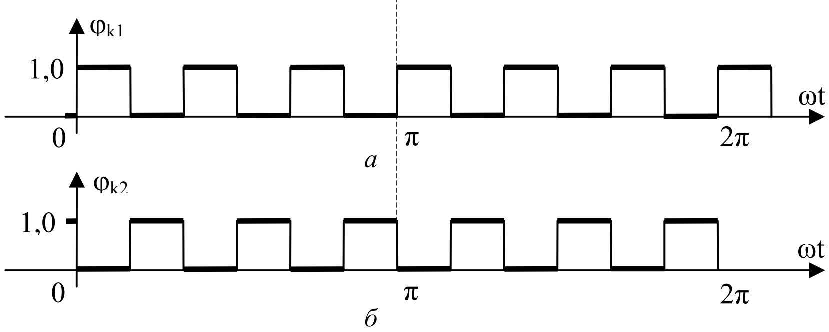

Рис. 3

электрической цепи (рис. 1), выбранной в качестве примера с целью установления соответствующих закономерностей в целом. На рис. 2 и 3 приведены соответствующие эпюры напряжений и КФ для такой двухключевой цепи.

Разложив КФ $\varphi_{к1}$ и $\varphi_{к2}$, определяющие алгоритм работы ключей К1 и К2, в ряд Фурье (с учетом того, что $\varphi_{к1}+\varphi_{к2}=1$), имеем выражения, в которых ω – угловая частота напряжения сети; α – угол, определяющий скважность, соответствует времени закрытого состояния ключа К1 (ключи К1 и К2 переключаются в противофазе); K – отношение круговых частот коммутационных функций Ω и напряжения сети (относительная частота коммутации $K=\Omega/\omega$):

$$\varphi_{к1}=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\alpha)}{n\pi}\cos(nK\omega t)+\frac{\cos(n\alpha)-1}{n\pi}\sin(nK\omega t)\right]; \tag{5}$$

$$\varphi_{к2}=\frac{\alpha}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\alpha)}{n\pi}\cos(nK\omega t)+\frac{\cos(n\alpha)-1}{n\pi}\sin(nK\omega t)\right], \tag{6}$$

С учетом выражений (3) и (4) можно также записать для определения приведенных выше КФ:

$$\varphi_{к1}=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)-2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\alpha/2)}{n\pi}\cos(nK\omega t-\psi_n)\right]; \tag{7}$$

$$\varphi_{к2}=\frac{\alpha}{2\pi}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\alpha/2)}{n\pi}\cos(nK\omega t-\psi_n)\right], \tag{8}$$

где $\sin\psi_n=-\sin(n\alpha/2)$ или $\psi_n=-(n\alpha/2)$ – угол сдвига n-й гармоники относительно начала координат.

Очевидно, что выражения (5)…(8) представляют собой тригонометрические ряды в известной вещественной форме записи, соответствующей (3).

Мгновенное значение выходного напряжения $u_н(\omega t)$ на нагрузке с учетом того, что

$$u_н(\omega t)=u_c(\omega t)\varphi_{к1}, \tag{9}$$

$$u_c(\omega t)=U_m\sin\omega t, \tag{10}$$

определяется следующим образом:

$$u_н(\omega t)=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)U_m\sin\omega t-U_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha/2)}{n\pi}\left\{\sin\left[(nK+1)\omega t+\frac{n\alpha}{2}\right]-\sin\left[(nK-1)\omega t+\frac{n\alpha}{2}\right]\right\}. \tag{11}$$

Отметим, что последнее выражение по внешнему виду не соответствует ряду Фурье. В некоторых источниках утверждается, что если ряд Фурье умножить на синусоидальную функцию, то при определенных условиях для новой функции можно выписать ряд Фурье [6, 7]. Конкретно эти условия требуют, чтобы число «*K*» было целым, а если оно является иррациональным, то задача не имеет решения.

Однако выражение (11) справедливо для любого «*K*», т. е. оно описывает функцию, которая разложена по гармоническим составляющим, что и подразумевает разложение исходной функции в ряд Фурье по ортогональной системе функций, к которой относится тригонометрическая система. Данное обстоятельство для своего объяснения требует последующих рассуждений и соответственно формулирования ряда положений.

Согласно теореме о единственности тригонометрического разложения функций последняя может быть разложена в ряд только одним способом [2, 3, 13]. Следовательно, как бы мы не разлагали функцию (11), результат тригонометрического разложения должен быть одинаковым, т. е. в спектре функции (11) не должно быть других гармоник.

В результате анализа функции (11) можно установить, что она состоит из двух рядов Фурье, аргументами тригонометрических функций разложения которых являются выражения $(nK+1)\omega t$ и $(nK-1)\omega t$. Рассмотрим более подробно эти ряды:

$$F_1 = U_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha/2)}{n\pi} \sin[(nK+1)\omega t + (n\alpha/2)]\ ; \tag{12}$$

$$F_2 = U_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha/2)}{n\pi} \sin[(nK-1)\omega t + (n\alpha/2)]\ . \tag{13}$$

Отметим, что эти выражения подобны известному выражению (3) и отличаются лишь структурой аргумента и отсутствием постоянной составляющей.

При разложении в ряд Фурье функций (12) и (13) с помощью формул Эйлера – Фурье получим

$$\begin{gathered} a_{NK+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_1 \cos[(NK+1)\omega t] d(\omega t) = \frac{U_m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha/2)}{n\pi}\times \\ \times\sin[(nK+1)\omega t + (n\alpha/2)]\cos[(NK+1)\omega t] d(\omega t) = \frac{U_m}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\alpha/2)}{n\pi}\times \\ \times\{\sin[(n+N)K\omega t + 2 + (n\alpha/2)] + \sin[(n-N)K\omega t + (n\alpha/2)]\} d(\omega t). \end{gathered} \tag{14}$$

В этом выражении с учетом того, что при выполнении условий Дирихле ряд можно интегрировать почленно, все интегралы равны нулю за исключением точки $n = N$, т. е. коэффициент разложения a_{NK+1} при косинусе определяется следующим образом:

$$a_{NK+1} = \frac{U_m}{2\pi}\left[\frac{\sin^2(N\alpha/2)}{N\pi}\right]\int_{-\pi}^{\pi} d(\omega t) = U_m\left[\frac{1-\cos(N\alpha)}{2N\pi}\right]. \tag{15}$$

Аналогично для коэффициента разложения b_{NK+1} при синусе

$$b_{NK+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_1 \sin[(NK+1)\omega t] d(\omega t) = U_m\left[\frac{\sin(N\alpha)}{2N\pi}\right]. \tag{16}$$

Следовательно, составленный с помощью коэффициентов (15) и (16) тригонометрический ряд F_1 имеет вид

$$F_1 = U_m \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi}\cos[(nK+1)\omega t] + \frac{\sin(n\alpha)}{2n\pi}\sin[(nK+1)\omega t]\right\}. \tag{17}$$

Данное выражение представляет собой ряд Фурье, в котором $a_0 = 0$. Однако аргумент функции разложения в этом случае не «nx» (как в «классическом» ряде Фурье), а находится в более сложной зависимости «$X(n)$».

Аналогичным образом составим тригонометрический ряд F_2:

$$F_2 = U_m \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi} \cos[(nK-1)\omega t] + \frac{\sin(n\alpha)}{2n\pi} \sin[(nK-1)\omega t] \right\}. \tag{18}$$

Отметим, что для определения коэффициентов Фурье a_{NK+1} и b_{NK+1} по формулам (15) и (16) следует воспользоваться выражением (11), но поскольку в последнем интегралы первого и третьего слагаемых равны нулю во всех точках, то в нем можно опустить эти слагаемые для аргумента $(nK+1)\omega t$. Аналогично можно опустить в выражении (11) первое и второе слагаемые для аргумента $(nK-1)\omega t$.

Воспользовавшись формулами (17) и (18), получим выражение для определения напряжения нагрузки:

$$\begin{aligned} u_н(\omega t) = U_m \Bigg[\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\sin\omega t - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi} \cos[(nK+1)\omega t] + \frac{\sin(n\alpha)}{2n\pi} \sin[(nK+1)\omega t] \right\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi} \cos[(nK-1)\omega t] + \frac{\sin(n\alpha)}{2n\pi} \sin[(nK-1)\omega t] \right\} \Bigg]. \end{aligned} \tag{19}$$

В этом выражении второй и третий члены – ряды Фурье по аргументам разложения $(nK+1)\omega t$ и $(nK-1)\omega t$, а по аргументу $n\omega t$ – «вырожденный» ряд Фурье, который состоит лишь из первого члена.

Если соотношение $K = \Omega / \omega$ является иррациональным числом [1], то произведение этих КФ представляет собой непериодическую функцию, которую можно разложить в ряд Фурье по формуле (1) лишь при определенных условиях [4, 13]. С учетом же сказанного выше такую функцию можно разложить в тригонометрические ряды Фурье с аргументами разложения $(nK+1)\omega t$ и $(nK-1)\omega t$ для любого действительного числа «*К*», в том числе и иррационального.

Если перемножить, например, коммутационные функции φ'_{K1} и φ'_{K2} (рис. 4), которые записываются следующим образом:

$$\varphi'_{K1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[1-(-1)^n\right] \sin(n\omega t), \tag{20}$$

$$\varphi'_{K2} = \left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\sin(m\alpha/2)}{m\pi} \cos(mK\omega t + m\alpha/2), \tag{21}$$

то для их произведения $\Phi'_K = \varphi'_{K1} \cdot \varphi'_{K2}$ очевидно

$$\begin{aligned} \Phi'_K = \left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[1-(-1)^n\right] \sin(n\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[1-(-1)^n\right] \sin(n\omega t) \times \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\sin(m\alpha/2)}{m\pi} \cos(mK\omega t + m\alpha/2) \; . \end{aligned} \tag{22}$$

В некоторых работах [3, 8, 10] показано, что существуют функции, для которых по формулам (2) и (4) находится и существует тригонометрический ряд типа (1) или (3), не являющийся сходящимся либо сходящийся к иной функции, а не к исходной, разлагаемой в ряд

Фурье. Следовательно, такое тригонометрическое разложение по существу можно считать недоопределенным, например, как в последнем случае. Это обусловлено тем, что не предполагая о наличии в выражении (22) гармоник, отличных от ряда по аргументу $n\omega t$, разложение функции Φ_K' в ряд Фурье проводилось бы лишь по этому аргументу, т. е. учитывалось бы только первое слагаемое в выражении (22). В связи с этим при осуществлении гармонического синтеза в данном случае исходная функция не может быть получена.

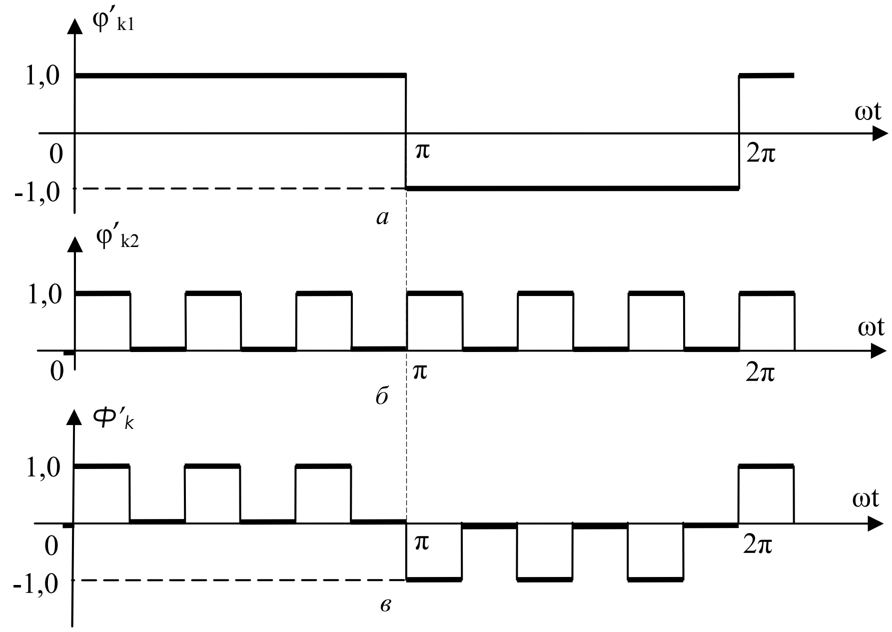

Рис. 4

Таким образом, можно сделать предположение о том, что существует большой класс функций, которые не могут быть представлены одним рядом Фурье, на основании чего сформулируем следующие ***предложения***, дополняющие фундаментальные вопросы единственности тригонометрического разложения функции:

Предложение 1. Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема и для нее существуют интегралы типа

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) {}^{\cos}_{\sin}\left[X(n)\right] d\left[X(n)\right],$$

то функция $f(x)$ может быть разложена в сумму рядов Фурье:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{q}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_{kn}\cos X_k(n) + B_{kn}\sin X_k(n)\right]\right\}, \tag{23}$$

где k – порядковый номер ряда Фурье (k=1, 2, 3, …q).

В этом случае тригонометрическое разложение возможно только единственным способом, а коэффициенты рядов (23) определяются по следующим формулам:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx; \tag{24}$$

$$A_{kn} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos X_k(n)dX_k(n); \tag{25}$$

$$B_{kn} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin X_k(n)dX_k(n). \tag{26}$$

Предложение 2. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и в ней имеется, кроме периодичности по «x», также периодичность по X(1), то функция $f(x)$ раскладывается в ряды Фурье по nx; $nX(1)$; $n[x - X(1)]$; $n[x + X(1)]$, а их коэффициенты определяются по формулам (24)…(26).

Предложение 3. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и содержит периодичности только по «*x*», то она разлагается в ряд Фурье по известным формулам (1) и (2), а также (3) и (4).

Единственность тригонометрического разложения функции в ряды Фурье по формулам (23)…(26) в соответствии с этими ***предложениями*** вытекает из следующих рассуждений. Функция, которая подлежит разложению в ряды Фурье, **объективно** существует и состоит из спектра гармоник независимо от того, подвергаем мы ее разложению или нет. Поэтому математические операции в соответствии с формулами (23)…(26) являются своеобразным «критерием однозначности», который в заданном наборе (спектре) гармоник позволяет выявить определенную гармоническую составляющую, а также определить ее качественные и количественные характеристики. Эти операции всегда будут давать однозначный ответ, и потому разложение функции в тригонометрические ряды Фурье всегда будет единственным.

На основе полученных результатов можно сделать важный вывод: «Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле и для нее существует разложение в тригонометрические ряды Фурье, то оно является единственным в главном смысле этого утверждения (в смысле спектрального состава), а его коэффициенты определяются формулами (24)…(26), которые всегда дают однозначное решение. По форме же тригонометрических рядов решения могут быть многозначными».

Таким образом, формулы (23)…(26) являются по существу обобщенной формой аналитического представления функций тригонометрическими рядами и необходимы для исследования различных нелинейных систем и, в первую очередь, анализа электромагнитных процессов в устройствах силовой электроники.

Рассмотрим конкретные примеры, поясняющие суть приведенных выше положений.

Пример 1. Предположим, что имеется два ряда, которые описывают напряжение (рис. 2 *б*) на выходе ключевого преобразователя:

$$u_H(\omega t) \sim a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t] + b_{nK+1}\sin[(nK+1)\omega t]\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_{nK-1}\cos[(nK-1)\omega t] + b_{nK-1}\sin[(nK-1)\omega t]\}, \qquad (27)$$

а КФ φ_{K1} и φ_{K2} соответствуют функциональной форме:

$$\varphi_{K1,K2} \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t) + \beta_m\sin(mK\omega t). \qquad (28)$$

При анализе процессов в электрических импульсных схемах зачастую необходимо перемножить функции, заданные рядами Фурье типа (27) и (28). Произведение последних имеет следующий вид:

$$\Phi = u_H\varphi_{K1} = \frac{a_1\alpha_0}{2}\cos\omega t + \frac{b_1\alpha_0}{2}\sin\omega t + \frac{\alpha_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t] + \frac{\alpha_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{nK+1}\sin[(nK+1)\omega t] + \\ + \frac{\alpha_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nK-1}\cos[(nK-1)\omega t] + \frac{\alpha_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{nK-1}\sin[(nK-1)\omega t] + a_1\cos\omega t\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t) + \\ + b_1\sin\omega t\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty}a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty}b_{nK+1}\sin[(nK+1)\omega t]\times \\ \times\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty}a_{nK-1}\cos[(nK-1)\omega t]\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty}b_{nK-1}\sin[(nK-1)\omega t]\times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m \cos(mK\omega t) + a_1 \cos\omega t \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t) + b_1 \sin\omega t \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t] \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1}\sin[(nK+1)\omega t]\cdot \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{nK-1}\cos[(nK-1)\omega t] \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nK-1}\sin[(nK-1)\omega t]\cdot \sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t). \quad (29)$$

Разложив это выражение в ряд Фурье, получим

$$\begin{aligned} \Phi = A_1 \cos\omega t + B_1 \sin\omega t + \sum_{N=1}^{\infty}\{A_{NK+1}\cos[(nK+1)\omega t] + B_{NK+1}\sin[(nK+1)\omega t]\} + \\ + \sum_{N=1}^{\infty}\{A_{NK-1}\cos[(nK-1)\omega t] + B_{NK-1}\sin[(nK-1)\omega t]\}. \end{aligned} \quad (30)$$

В выражении (30) отсутствует постоянная составляющая, поскольку мы рассматриваем области изменения числа «K», в которых $0<K<1$ и $3 \le K < \infty$, т.е. отсутствуют условия ее возникновения.

Определим коэффициенты полученных рядов Фурье, воспользовавшись формулами (24)…(26). Согласно формуле (24) для A_1 имеем

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi \cos\omega t d(\omega t), \quad (31)$$

откуда получаем 18 интегралов – по количеству слагаемых в выражении (29). Интеграл первого слагаемого равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha_0 a_1}{2}\cos^2\omega t d(\omega t) = \frac{\alpha_0 a_1}{2}. \quad (32)$$

Интегралы со второго по восьмое слагаемые равны нулю, а интеграл девятого слагаемого равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m \cos(mK\omega t)\right\}d(\omega t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nK+1}\alpha_n. \quad (33)$$

Интеграл десятого слагаемого равен нулю, а одиннадцатый интеграл равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{nK-1}\cos[(nK-1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m \cos(mK\omega t)\cos\omega t\right\}d(\omega t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nK-1}\alpha_n. \quad (34)$$

Интегралы слагаемых с двенадцатого по пятнадцатый равны нулю, а интеграл шестнадцатого слагаемого равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1}\sin[(nK+1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t)\cos\omega t\right\}d(\omega t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1}\beta_n. \quad (35)$$

Интеграл семнадцатого слагаемого равен нулю, а восемнадцатого –

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK-1}\sin[(nK-1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m \sin(mK\omega t)\cos\omega t\right\}d(\omega t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK-1}\beta_n. \quad (36)$$

Тогда после суммирования (32)…(36) с учетом (31) имеем

$$A_1 = \frac{\alpha_0 a_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n(a_{nK+1} + a_{nK-1}) + \beta_n(b_{nK+1} + b_{nK-1})]. \quad (37)$$

Аналогично определим коэффициент B_1, который в окончательном виде (без промежуточных выкладок) равен

$$B_1 = \frac{\alpha_0 b_1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n(b_{nK+1} - b_{nK-1}) - \beta_n(a_{nK+1} - a_{nK-1})]\ . \quad (38)$$

Определим коэффициенты A_{NK+1} по формуле (25) с учетом модифицированного правила умножения рядов Фурье [5]:

$$A_{NK+1} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi \cos\left[(NK+1)\omega t\right] d(\omega t). \tag{39}$$

После подстановки (29) в (39) получим 18 интегралов, из которых первые два равны нулю, а третий –

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\alpha_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t]\cdot\cos[(nK+1)\omega t]\right\}d(\omega t) = \frac{\alpha_0 a_{nK+1}}{2}. \tag{40}$$

Интеграл слагаемых с четвертого по шестой равны нулю, а седьмой интеграл равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{a_1\cos\omega t\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t)\cos[(NK+1)\omega t]\right\}d(\omega t) = \frac{\alpha_n a_1}{2}. \tag{41}$$

Восьмой интеграл равен нулю, а девятый определится так:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t)\cos[(NK+1)\omega t]\right\}d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{nK+1}\alpha_{n-N}) - \frac{1}{2}\lim_{n\to N}(a_{nK+1}\alpha_{n-N}).\end{aligned} \tag{42}$$

В последнем выражении необходимо вычесть точку $n = N$, так как при этом $m = 0$, что противоречит исходным условиям [5, 12].

Интеграл десятого слагаемого в выражении, полученном из (39), равен нулю, а одиннадцатый интеграл равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_{nK-1}\cos[(NK-1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t)\cos[(NK+1)\omega t]\right\}d(\omega t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{nK-1}\alpha_{n+N}). \tag{43}$$

Двенадцатый и тринадцатый интегралы равны нулю, а четырнадцатый –

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_1\sin\omega t\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin(mK\omega t)\cos[(NK+1)\omega t]\right\}d(\omega t) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_1\beta_N. \tag{44}$$

Пятнадцатый и семнадцатый интегралы равны нулю, а шестнадцатый равен

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1}\sin[(nK+1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin(mK\omega t)\cos[(NK+1)\omega t]\right\}d(\omega t) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK+1}\beta_{n-N} - \frac{1}{2}\lim_{n\to N}(b_{nK+1}\beta_{n-N}).\end{aligned} \tag{45}$$

Интеграл восемнадцатого слагаемого равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK-1}\sin[(nK-1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin(mK\omega t)\cos[(NK+1)\omega t]\right\}d(\omega t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_{nK-1}\beta_{n+N}. \tag{46}$$

Просуммировав (40)…(46), с учетом (39) получим

$$\begin{aligned}A_{NK+1} &= \frac{\alpha_0 a_{NK+1}}{2} + \frac{a_1\alpha_N - b_1\beta_N}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{nK+1}\alpha_{n-N} + a_{nK-1}\alpha_{n+N} + \\ &+ b_{nK+1}\beta_{n-N} + b_{nK-1}\beta_{n+N}) - \frac{1}{2}\lim_{n\to N}(a_{nK+1}\alpha_{n-N}) - \frac{1}{2}\lim_{n\to N}(b_{nK+1}\beta_{n-N}).\end{aligned} \tag{47}$$

Аналогичным образом определим, не приводя промежуточных выкладок, коэффициенты B_{NK+1}, которые вычисляются с помощью следующего выражения:

$$B_{NK+1}=\frac{\alpha_0 b_{NK+1}}{2}+\frac{\alpha_N b_1+a_1\beta_N}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(b_{nK+1}\alpha_{n-N}-b_{nK-1}\alpha_{n+N}-a_{nK+1}\beta_{n-N}+$$
$$+a_{nK-1}\beta_{n+N})-\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(b_{nK+1}\alpha_{n-N})+\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(a_{nK+1}\beta_{n-N}) \quad . \tag{48}$$

С учетом формулы (25) для определения коэффициентов A_{NK-1} имеем

$$A_{NK-1}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\cos[(NK-1)\omega t]d(\omega t), \tag{49}$$

откуда после подстановки в (49) значения Φ согласно (29) получим также 18 интегралов, причем одиннадцать из них (с первого по четвертый, шестой, восьмой, десятый, двенадцатый и тринадцатый, пятнадцатый и семнадцатый) равны нулю.

Интеграл от пятого слагаемого в (49) равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha_0}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_{nK-1}\cos[(nK-1)\omega t]\cdot\cos[(NK-1)\omega t]\cdot\right\}d(\omega t)=\frac{\alpha_0 a_{NK-1}}{2}. \tag{50}$$

Интеграл от седьмого слагаемого

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{a_1\cos\omega t\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t)\cos[(NK-1)\omega t]\right\}d(\omega t)=\frac{\alpha_N a_1}{2}. \tag{51}$$

Интеграл от девятого слагаемого равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_{nK+1}\cos[(nK+1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t)\cos[(NK-1)\omega t]\right\}d(\omega t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nK+1}\alpha_{n+N}. \tag{52}$$

Одиннадцатый интеграл равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_{nK-1}\cos[(nK-1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m\cos(mK\omega t)\cos[(NK-1)\omega t]\right\}d(\omega t)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_{nK-1}\alpha_{n-N}-\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(a_{nK-1}\alpha_{n-N}). \tag{53}$$

Четырнадцатый интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b_1\sin\omega t\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin(mK\omega t)\cos[(NK-1)\omega t]\right\}d(\omega t)=\frac{b_1\beta_N}{2}. \tag{54}$$

Шестнадцатый интеграл равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b_{nK+1}\sin[(nK+1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin(mK\omega t)\cos[(NK-1)\omega t]\right\}d(\omega t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{nK+1}\beta_{n+N}. \tag{55}$$

Восемнадцатый интеграл равен

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}b_{nK-1}\sin[(nK-1)\omega t]\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\beta_m\sin(mK\omega t)\cos[(NK-1)\omega t]\right\}d(\omega t)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{nK-1}\beta_{n-N}-\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(b_{nK-1}\beta_{n-N}). \tag{56}$$

Следовательно, суммируя (50)…(56) с учетом (49), имеем

$$A_{NK-1}=\frac{\alpha_0 a_{NK-1}}{2}+\frac{a_1\alpha_N+b_1\beta_N}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{nK+1}\alpha_{n+N}+a_{nK-1}\alpha_{n-N}+$$
$$+b_{nK+1}\beta_{n+N}+b_{nK-1}\beta_{n-N})-\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(a_{nK-1}\alpha_{n-N})-\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(b_{nK-1}\beta_{n-N}). \tag{57}$$

Аналогично получено выражение для определения B_{NK-1}:

$$B_{NK-1}=\frac{\alpha_0 b_{NK-1}}{2}+\frac{a_1\beta_N-\alpha_N b_1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{nK+1}\beta_{n+N}-a_{nK-1}\beta_{n-N}-b_{nK+1}\alpha_{n+N}+b_{nK-1}\alpha_{n-N})+ \\ +\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(a_{nK-1}\beta_{n-N})-\frac{1}{2}\lim_{n\to N}(b_{nK-1}\alpha_{n-N}). \quad (58)$$

Достоверность полученных результатов подтверждается следующей проверкой формул (37) и (38), (47) и (48), (57) и (58). Для этого перемножим функции $u_H(\omega t)$ и φ_{K1} (рис. 2 *б* и 3 *а*), которые заданы соответствующими рядами Фурье (19) и (5). Из выражения (19) очевидно (для упрощения постоянный множитель U_m опущен):

$$a_1=0;\; b_1=(1-\frac{\alpha}{2\pi});\quad a_{nK+1}=-\frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi};\quad b_{nK+1}=-\frac{\sin(n\alpha))}{2n\pi}; \\ a_{nK-1}=\frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi};\quad b_{nK-1}=\frac{\sin(n\alpha))}{2n\pi}, \quad (59)$$

а из выражения (5) следует

$$\frac{\alpha_0}{2}=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right);\quad \alpha_n=-\frac{\sin(n\alpha)}{n\pi};\qquad \beta_n=\frac{1-\cos(n\alpha)}{n\pi}. \quad (60)$$

Воспользовавшись выражениями (37) и (38), а также (59) и (60), получим

$$A_1=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{\sin(n\alpha)}{n\pi}\left[-\frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi}+\frac{1-\cos(n\alpha)}{2n\pi}\right]-\frac{\cos(n\alpha)-1}{n\pi}\times\left[-\frac{\sin(n\alpha)}{2n\pi}+\frac{\sin(n\alpha)}{2n\pi}\right]\right\}=0; \quad (61)$$

$$B_1=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin^2(n\alpha)}{n^2\pi^2}+\frac{[1-\cos(n\alpha)]^2}{n^2\pi^2}\right\}=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right). \quad (62)$$

Воспользовавшись формулой (37), а также (59) и (60), получим

$$A_{NK+1}=-(1-\frac{\alpha}{2\pi})\cdot\frac{1-\cos(N\alpha)}{N\pi}+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\cos(n\alpha)}{n}\left[\frac{\sin[(n-N)\alpha]}{n-N}-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{\sin[(n+N)\alpha]}{n+N}\right]-\frac{\sin(n\alpha)}{n}\cdot\left[\frac{1-\cos[(n-N)\alpha]}{n-N}-\frac{1-\cos[(n+N)\alpha]}{n+N}\right]\right\}-\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1-\cos(N\alpha)}{2N\pi}, \quad (63)$$

где синтезированные суммы [6, 7] имеют вид

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\cos(n\alpha)}{n}\left[\frac{\sin[(n-N)\alpha]}{n-N}-\frac{1-\cos[(n+N)\alpha]}{n+N}\right]\right\}=\frac{1-\cos(N\alpha)}{4N\pi}; \quad (64)$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n\alpha)}{n}\left[\frac{1-\cos[(n-N)\alpha]}{n-N}-\frac{1-\cos[(n+N)\alpha]}{n+N}\right]\right\}=-(1-\frac{\alpha}{\pi})\cdot\frac{1-\cos(N\alpha)}{4N\pi}. \quad (65)$$

Подставив выражения (64) и (65) в формулу (63), получим

$$A_{NK+1}=-\frac{1-\cos(N\alpha)}{2N\pi}. \quad (66)$$

Воспользовавшись формулой (48), а также выражениями (59) и (60), имеем для коэффициентов B_{NK+1}:

$$B_{NK+1}=-(1-\frac{\alpha}{2\pi})\cdot\frac{\sin(n\alpha)}{N\pi}+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n\alpha)}{n}\left[\frac{\sin[(n+N)\alpha]}{n+N}+\frac{\sin[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]+\right. \\ \left.+\frac{1-\cos(n\alpha)}{n}\cdot\left[\frac{1-\cos[(n+N)\alpha]}{n+N}+\frac{1-\cos[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]\right\}-\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\sin(N\alpha)}{2N\pi}, \quad (67)$$

где суммы равны

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n\alpha)}{n}\left[\frac{\sin[(n+N)\alpha]}{n+N}+\frac{\sin[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]\right\}=(1-\frac{\alpha}{\pi})\cdot\frac{\sin(N\alpha)}{4N\pi}; \tag{68}$$

$$\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\cos(n\alpha)}{n}\left[\frac{1-\cos[(n+N)\alpha]}{n+N}+\frac{1-\cos[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]\right\}=\frac{\sin(N\alpha)}{4N\pi}. \tag{69}$$

Подставив последние выражения в (67), получим

$$B_{NK+1}=-\frac{\sin(N\alpha)}{2N\pi}. \tag{70}$$

Аналогично определим коэффициенты A_{NK-1} и B_{NK-1} с учетом формул (49) и (58), (59) и (60), а также после синтеза соответствующих сумм:

$$A_{NK-1}=(1-\frac{\alpha}{2\pi})\cdot\frac{1-\cos(N\alpha)}{N\pi}+\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\cos(n\alpha)}{n}\left[\frac{\sin[(n+N)\alpha]}{n+N}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sin[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]-\frac{\sin(n\alpha)}{n}\cdot\left[\frac{1-\cos[(n+N)\alpha]}{n+N}-\frac{1-\cos[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]\right\}+\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1-\cos(N\alpha)}{2N\pi}$$

или с учетом (64) и (65) получим

$$A_{NK-1}=\frac{1-\cos(N\alpha)}{2N\pi}. \tag{71}$$

Для коэффициентов B_{NK-1} соответственно имеем

$$B_{NK-1}=(1-\frac{\alpha}{2\pi})\cdot\frac{\sin(N\alpha)}{N\pi}-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-\cos(n\alpha)}{n}\left[\frac{1-\cos[(n+N)\alpha]}{n+N}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-\cos[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]+\frac{\sin(n\alpha)}{n}\left[\frac{\sin[(n+N)\alpha]}{n+N}+\frac{\sin[(n-N)\alpha]}{n-N}\right]\right\}+\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{\sin(N\alpha)}{2N\pi}$$

или с учетом (68) и (69) справедливо

$$B_{NK-1}=\frac{\sin(N\alpha)}{2N\pi}. \tag{72}$$

Сравнив выражения (61) и (62), (66) и (70), (71) и (72) с (59) и соответственно с (19), можно убедиться в правильности полученных формул.

Отметим, что после перемножения функций $u_H(\omega t)$ и φ_{K1}, получим функцию $u_H(\omega t)$, что следует из рис. 2 *б* и 3 *а* при умножении соответствующих ординат функций $u_H(\omega t)$ и φ_{K1}, в результате чего получим коэффициенты, тождественные (59) и (61).

Пример 2. Для функции φ_{K1}, приведенной на рис. 5, можно записать ряд Фурье:

$$\varphi_{K1}=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos(n\omega t)+\beta_n\sin(n\omega t)\right],$$

коэффициенты которого имеют аналогично выражению (5) следующий вид:

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{K1}d(\omega t)=2\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right);$$

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{K1}\cos(n\omega t)d(\omega t)=-\frac{\sin(n\alpha)}{n\pi}; \tag{73}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{K1}\sin(n\omega t)d(\omega t) = \frac{1-\cos(n\alpha)}{n\pi}.$$

Изменим данную функцию φ_{K1} путем увеличения ее ординат на постоянную величину (например, **0,5**). Тогда для «новой» функции φ_{K2} (рис. 6) имеем

$$\alpha_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{K2}d(\omega t) = 2\left(1{,}5 - \frac{\alpha}{2\pi}\right);$$

$$\alpha_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{K2}\cos(n\omega t)d(\omega t) = -\frac{\sin(n\alpha)}{n\pi}; \qquad (74)$$

$$\beta_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_{K2}\sin(n\omega t)d(\omega t) = \frac{1-\cos(n\alpha)}{n\pi}.$$

Сравнивая приведенные выражения (73) и (74), можно сделать вывод о том, что при добавлении (или вычете) к любой функции постоянной величины в ряде Фурье исходной функции изменяется лишь нулевой член α_0 разложения на значение этой добавки (вычета), а коэффициенты α_n и β_n в таком случае остаются неизменными.

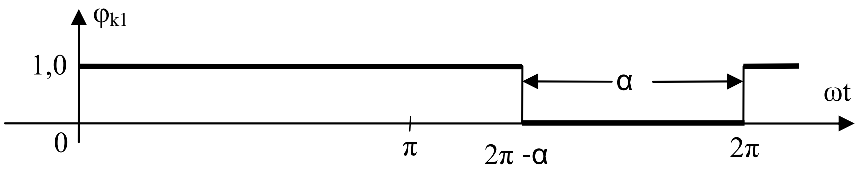

Рис. 5

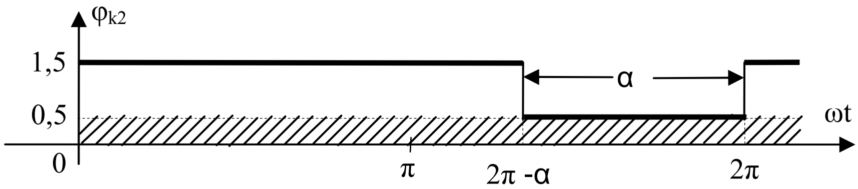

Рис. 6

Следовательно, для заданной величины коэффициента α_n имеет место бесконечное количество нулевых членов α_0, что соответствует изменению величины постоянной добавки (вычета) к исходной функции. Поэтому из формулы (73) для определения коэффициента α_n невозможно однозначно определить величину нулевого члена α_0 при подстановке в выражение для определения α_n значения $n = 0$, т.е. α_0 определяется с помощью отдельной формулы [4]. Данное обстоятельство является подтверждением общего принципа, доказанного Г. Кантором: «Если для функции *f(x)* на интервале (-*π*, *π*) вообще возможно разложение в ряд Фурье, то такое разложение является единственным» [8, 13]. Разумеется, в противном случае имело бы место бесконечное количество рядов при одном и том же значении коэффициента разложения α_n.

Таким образом, полученные результаты дают возможность, например, проводить анализ электромагнитных процессов в импульсных электрических цепях, который включает всю частотную область, кроме точек К=1 и К=2, которые отвечают двум случаям, соответственно, регулирования напряжения в пределах периода и его выпрямления и описываются известными формулами [11].

Сформулированы предложения по представлению о обобщенной форме различных функций тригонометрическими рядами. Приведены примеры, которые подтверждают достоверность полученных результатов.

Suggestions that presented different functions by the trigonometric rows of Fourier in generalized forms are outspoken. Examples that confirm trustworthiness of founded results are given.

1. *Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я.* Энциклопедия элементарной математики. Книга первая. Арифметика. – М. – Л.: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1951. – 448 с.
2. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 372 с.
3. *Воробъев Н.Н.* Теория рядов. – М.: Наука, 1979. – 408 с.
4. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1961. – 783 с.
5. *Жарський Б.К., Голубєв В.В., Новський В.О.* Модифіковане правило множення рядів Фур'є // Техн. електродинаміка. – 2008. – №1. – С.25–31.
6. *Заездный А.М.* Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – М. – Л.: Госэнергоиздат, 1961. – 536 с.
7. *Заездный А.М.* Гармонический синтез в радиотехнике и электросвязи. – Л.: Энергия, 1972. – 528 с.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.: Мир, 1965. – 538 с.
9. *Карташов Р.П., Кулиш А.К., Чехет Э.М.* Тиристорные преобразователи частоты с искусственной коммутацией. – К.: Техніка, 1979. – 150 с.
10. *Романовский П.И.* Ряды Фурье, аналитические и специальные функции, преобразование Лапласа. – М.: Физматгиз, 1959. – 303 с.
11. *Руденко В.С., Сенько В.И., Чиженко И.М.* Основы преобразовательной техники. – М.: Высш. шк., 1980. – 423 с.
12. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. 3-е изд. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. – М.: Наука, 1966. – 656 с.
14. *Шидловский А.К., Федий В.С.* Частотно-регулируемые источники реактивной мощности. – К.: Наук. думка, 1980. – 303 с.

Надійшла 21.05.2009