Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 256-263

А. М. Шелехов

Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: shelekhov@duma.gov.ru

О достаточном условии боловости многомерной три-ткани

Дано новое простое доказательство теоремы В. И. Федоровой: частичная кососимметричность тензора кривизны многомерной три-ткани достаточна для того, чтобы эта ткань была тканью Бола.

Ключевые слова: *ткань Бола, связность Черна, автотопия*

1. Введение

В [1] было впервые доказано, что тензор кривизны ткани Бола кососимметричен по двум нижним индексам. В [2] была доказана достаточность этого условия для того, чтобы ткань была боловой. Приведенное в [2] красивое, но весьма сложное геометрическое доказательство опирается на геодезические свойства канонической связности Черна, присоединенной к три-ткани.

В настоящей работе приводится более простое доказательство, идею которого мы использовали в работе [3] для описания тканей Бола, образованных слоениями разных размерностей. Но, указав в [3] тензорные условия боловости, их достаточность мы не доказали. Здесь приведено подробное доказательство для "классических"тканей Бола, то есть тканей, образованных слоениями одинаковой размерности.

Напомним, что теорема формулируется следующим образом [1].

Теорема 1. *Пусть W — три-ткань, образованная тремя слоениями размерности r на гладком многообразии M размерности $2r$. Если тензор кривизны ткани W удовлетворяет условию*

$$b^i_{j(k\ell)} = 0, \tag{1}$$

то ткань W является средней тканью Бола.

1. Согласно [4], корепер $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ $(i, j, k = 1, 2, \dots, r)$ на многообразии M можно выбрать так, что слоения ткани будут задаваться уравнениями $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$, $\underset{3}{\omega}^i = 0$ причем формы нормированы условием

$$\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i + \underset{3}{\omega}^i = 0. \tag{2}$$

Формы $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ удовлетворяют уравнениям структуры [4]:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \; d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{3}$$

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell. \tag{4}$$

Здесь величины a^i_{jk} кососимметричны по нижним индексам и образуют тензор кручения ткани W. Величины $b^i_{jk\ell}$ образуют тензор кривизны ткани W. Эти тензоры связаны рядом соотношений, которые мы не приводим. Согласно [4], тензорные поля кручения и кривизны однозначно определяют три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$.

Пусть для некоторой ткани W выполняется условие (1). Рассмотрим на ткани W две области U и $\bar{U}$, и пусть дифференциальные формы в области U обозначены, как и выше, через $\underset{\alpha}{\omega}^i$ и ω^i_j, а в области $\bar{U}$ — через $\underset{\alpha}{\bar{\omega}}^i$ и $\bar{\omega}^i_j$. Естественно, формы с чертой удовлетворяют тем же структурным уравнениям (3) и (4).

С помощью уравнений (3), (4) и условия (1) непосредственно проверяется, что верно

Предложение 1. *Система уравнений*

$$\underset{1}{\omega}^i = -\underset{2}{\bar{\omega}}^i, \quad \underset{2}{\omega}^i = -\underset{1}{\bar{\omega}}^i, \quad \omega^i_j = \bar{\omega}^i_j \tag{5}$$

вполне интегрируема на ткани W.

Система (5) определяет некоторое семейство отображений ткани W на себя. Пусть f – одно из них. Из уравнений (5) непосредственно вытекает

Предложение 2. *Отображение f переводит слои первого слоения ткани W в слои второго слоения и наоборот, а слои третьего слоения переводит в слои третьего слоения.*

Действительно, уравнения $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$ и $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$ влекут, соответственно, $\underset{2}{\bar{\omega}}^i = 0$, $\underset{1}{\bar{\omega}}^i = 0$ и $\underset{1}{\bar{\omega}}^i + \underset{2}{\bar{\omega}}^i = 0$.

Отображение f переводит ткань W в ткань W, но меняет местами слои первых двух слоений. Поэтому, как это принято в теории квазигрупп (см., например, [5]), такое преобразование ткани будем называть *главной автотопией*.

Как видно из системы (5), ее решение зависит от $2r + \rho$ параметров, где ρ — ранг системы форм ω^i_j. Следовательно, *рассматриваемая три-ткань W допускает $2r + \rho$-параметрическое семейство главных автотопий.*

Эти автотопии, очевидно, сохраняют каноническую связность Черна три-ткани (определяемую структурными уравнениями (3) и (4)). В частности, они переводят геодезические подмногообразия в геодезические.

Поскольку множество автотопий рассматриваемой три-ткани W зависит от $2r + \rho$ параметров, то среди них имеются, вообще говоря, такие, которые обладают неподвижными точками. В неподвижной точке координаты образа и прообраза совпадают, следовательно, в такой точке $\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\bar{\omega}}^i$, $\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\bar{\omega}}^i$, так что две первые серии уравнений (5) отображения f совпадают и принимают вид $\underset{1}{\omega}^i = -\underset{2}{\omega}^i$. Но это уравнения третьего слоения ткани W. Проинтегрировав их, получим уравнение третьего слоения в некоторых локальных координатах:

$$z_0 = F(x, y), \tag{6}$$

где F — функция ткани, x, y, z_0 — параметры, соответственно, первого второго и третьего слоений ткани W, причем параметры x и y являются переменными, а z_0 фиксировано. Согласно определению функции ткани получаем, что соответствующие слои первых двух слоений отображения f, определяемого уравнением (6), пересекаются в точках слоя третьего слоения, определяемого уравнением $z = z_0$. Таким образом, отображение f является симметрией относительно этого слоя.

С другой стороны, x и y являются локальными координатами неподвижной точки. Итак, доказано

Предложение 3. *Существуют главные автотопии ткани W, которые являются симметриями относительно слоев третьего слоения, причем последние представляют собой многообразия неподвижных точек этих автотопий.*

Отсюда вытекает, во-первых, что множество главных автотопий ткани W, допускающих неподвижные точки, зависит от r параметров.

Во-вторых, из того факта, что отображение f, допускающее неподвижные точки, является симметрией относительно слоя третьего слоения и из предложения 2 вытекает, что на три-ткани W замыкаются средние фигуры Бола, что и доказывает теорему 1.

2. Рассмотрим, например, шестимерную три-ткань Бола [6], которая является также эластичной тканью (ткань E_1, см. [4], стр. 157):

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - (x^2 + y^2)x^3y^3, \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3 \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнения (7) получены в результате интегрирования структурных уравнений. В процессе интегрирования были найдены следующие формы, входящие в структурные уравнения (3) и (4) (не указанные формы равны нулю):

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\omega}^1 = -u dx^2 - (w + x^2y^3)dx^3 + x^2x^3dx^3 + dx^1,\\
&\underset{2}{\omega}^1 = -u dy^2 - (w + y^2x^3)dy^3 + y^2y^3dy^3 + dy^1,\\
&\underset{1}{\omega}^2 = \varphi(-v dx^3 + dx^2), \quad \underset{2}{\omega}^2 = \varphi(-v dy^3 + dy^2),\\
&\underset{1}{\omega}^3 = \varphi^{-\frac{1}{2}}dx^3, \quad \underset{2}{\omega}^3 = \varphi^{-\frac{1}{2}}dy^3,
\end{aligned} \tag{8}$$

и

$$\begin{aligned}
&\omega_2^1 = \varphi^{-1}du, \quad \omega_3^2 = \varphi^{\frac{3}{2}}dv,\\
&\omega_3^1 = \varphi^{\frac{1}{2}}(x^2dy^3 + y^2dx^3 + v du + dw),
\end{aligned} \tag{9}$$

где x^i, y^i и u, v, w — соответственно, главные и вторичные параметры, причём

$$x^3 - y^3 = 2\varphi^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Формы (8) и (9) удовлетворяют некоторой системе внешних квадратичных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. При этом все 9 форм (а, следовательно, и все 9 перечисленных параметров) являются независимыми.

Система (5) для этой ткани принимает вид:

$$\begin{aligned}
&- u dx^2 - (w + x^2y^3)dx^3 + x^2x^3dx^3 + dx^1 =\\
&= \bar{u}d\bar{y}^2 + (\bar{w} + \bar{y}^2\bar{x}^3)d\bar{y}^3 - \bar{y}^2\bar{y}^3d\bar{y}^3 - d\bar{y}^1),\\
&- u dy^2 - (w + y^2x^3)dy^3 + y^2y^3dy^3 + dy^1 =\\
&= \bar{u}d\bar{x}^2 + (\bar{w} + \bar{x}^2\bar{y}^3)d\bar{x}^3 - \bar{x}^2\bar{x}^3d\bar{x}^3 - d\bar{x}^1),\\
&\varphi(-v dx^3 + dx^2) = -\bar{\varphi}(-\bar{v}d\bar{y}^3 + d\bar{y}^2),\\
&\varphi(-v dy^3 + dy^2) = -\bar{\varphi}(-\bar{v}d\bar{x}^3 + d\bar{x}^2),\\
&\varphi^{-\frac{1}{2}}dx^3 = -\bar{\varphi}^{-\frac{1}{2}}d\bar{y}^3,\\
&\bar{\varphi}^{-\frac{1}{2}}d\bar{x}^3 = -\varphi^{-\frac{1}{2}}dy^3
\end{aligned} \tag{11}$$

и

$$\begin{aligned}&\varphi^{-1}du=\bar{\varphi}^{-1}d\bar{u},\quad \varphi^{\frac{3}{2}}dv=\\&=\bar{\varphi}^{\frac{3}{2}}d\bar{v},\\&\varphi^{\frac{1}{2}}(x^2dy^3+y^2dx^3+vdu+dw)=\\&=\bar{\varphi}^{\frac{1}{2}}(\bar{x}^2d\bar{y}^3+\bar{y}^2d\bar{x}^3+\bar{v}d\bar{u}+d\bar{w}).\end{aligned}\tag{12}$$

Здесь, как и выше,

$$\bar{x}^3-\bar{y}^3=2\bar{\varphi}^{\frac{1}{2}}.\tag{13}$$

Последовательно интегрируя эту систему, найдем конечные уравнения преобразования:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}=&k\varphi,\ \bar{u}=ku+p,\ \bar{v}=k^{-\frac{3}{2}}v+q,\\\bar{x}^2=&-k^{-1}y^2-k^{\frac{1}{2}}qy^3+\bar{x}_0^2,\ \bar{y}^2=-k^{-1}x^2-k^{\frac{1}{2}}qx^3+\bar{y}_0^2,\\\bar{x}^3=&-k^{\frac{1}{2}}y^3+\bar{x}_0^3,\ \bar{y}^3=-k^{\frac{1}{2}}x^3+\bar{y}_0^3,\\\bar{x}^1=&-y^1-pk^{-1}y^2-k^{\frac{1}{2}}pqy^3-k^{\frac{1}{2}}\bar{w}_0y^3-\\&\frac{1}{2}k(\bar{x}_0^2+\bar{y}_0^2)(y^3)^2+\frac{1}{3}k^{\frac{3}{2}}(y^3)^3+\bar{x}_0^1,\\\bar{y}^1=&-x^1-pk^{-1}x^2-k^{\frac{1}{2}}pqx^3-k^{\frac{1}{2}}\bar{w}_0x^3-\\&\frac{1}{2}k(\bar{x}_0^2+\bar{y}_0^2)(x^3)^2+\frac{1}{3}k^{\frac{3}{2}}(x^3)^3+\bar{y}_0^1,\\\bar{w}=&k^{-\frac{1}{2}}w-kqx^3y^3-kqu+k^{\frac{1}{2}}\bar{x}_0^2x^3+k^{\frac{1}{2}}\bar{y}_0^2y^3+\bar{w}_0.\end{aligned}\tag{14}$$

Здесь $k,p,q,\bar{x}_0^1,\bar{y}_0^1,\ldots,\bar{w}_0$ — постоянные интегрирования. Из этих уравнений находим, в частности, что $\bar{x}^3-\bar{y}^3=k^{\frac{1}{2}}(x^3-y^3)+\bar{x}_0^3-\bar{y}_0^3=0$. Отсюда в силу равенств (10) и (13) получаем

$$\bar{x}_0^3=\bar{y}_0^3.\tag{15}$$

Непосредственно проверяется, что при преобразованиях (14) слои третьего слоения рассматриваемой ткани E_1 переходят также в слои третьего слоения.

Неподвижные точки преобразования (12) определятся из условия $x^i = \bar{x^i}$, $y^i = \bar{y^i}$, в силу которого из (10) и (13) находим, что $\varphi = \bar{\varphi}$, и из (12) следует $k = 1$. В результате уравнения (14) дают:

$$
\begin{aligned}
& x^3 + y^3 = \bar{x}^3_0, \\
& x^2 + y^2 = -qy^3 + \bar{x}^2_0 = -qx^3 + \bar{y}^2_0, \\
& x^1 + y^1 = -py^2 - pqy^3 - \bar{w}_0 y^3 - \frac{1}{2}(\bar{x}^2_0 + \bar{y}^2_0)(y^3)^2 + \\
& + \frac{1}{3}(y^3)^3 + \bar{x}^1_0 = \\
& = -px^2 - pqx^3 - \bar{w}_0 x^3 - \frac{1}{2}(\bar{x}^2_0 + \bar{y}^2_0)(x^3)^2 + \frac{1}{3}(x^3)^3 + \bar{y}^1_0, \\
& \bar{u} = u + p, \ \bar{v} = v + q, \\
& \bar{w} = w - qx^3 y^3 - qu + \bar{x}^2_0 x^3 + \bar{y}^2_0 y^3 + \bar{w}_0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Уравнений (16) содержат 5 соотношений на локальные координаты x^i и y^i. Таким образом, получается следующий вывод: *преобразование (14) ткани E_1 содержит неподвижные точки при условии $k = 1$, причем множество неподвижных точек является, вообще говоря, одномерным.*

Как видно из уравнений (16), максимальная размерность многообразия неподвижных точек может быть 3, причем, как легко проверить, это достигается при условии, что во второй и третьей сериях уравнений (16) остается по одному независимому уравнению. Простое вычисление показывает, что *преобразование (14) ткани E_1 содержит трехмерное многообразие неподвижных точек при условии $k = 1, p = q = 0, \bar{x}^1_0 = \bar{x}^2_0 = 0, \bar{y}^1_0 = \bar{y}^2_0 = 0, \bar{w}_0 = -\bar{x}^2_0 \bar{x}^3_0$. Таких преобразований трехпараметрическое семейство, и их неподвижные точки являются слоями третьего слоения ткани E_1.*

Список литературы

[1] Акивис М.А.; Шелехов А.М. О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани. Сиб.мат.ж., 1971, т.12, 5, с. 953–960.

[2] Федорова, В.И. Об условии, определяющем многомерные три-ткани Бола. Сиб.мат.ж., 1978, т.19, 4, с. 922–928.

[3] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей. Изв. Вузов. Математика.- 2005.- № 5 (516). - с. 56-62.

[4] Акивис М.А., Шелехов А.М. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-webs. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, 375 pp.

[5] Белоусов, В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., Наука, 1967, 223 с.

[6] Федорова, В.И. Шестимерные три-ткани Бола с симметричным тензором a^{ij}. В сб. "Ткани и квазигруппы Калинин, Калининский госуниверситет, 1981, с. 110–123.