Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 207-222

С. Е. Степанов

Финансовая Академия при правительстве Российской Федерации, Москва
E-mail: stepanov@vtsnet.ru

И. А. Гордеева

Владимирский государственный гуманитарный университет, Владимир
E-mail: igordeeva@list.ru

О существовании псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана

Приведена классификация многообразий Римана-Картана. изучены геометрические свойства некоторых из выделенных классов многообразий Римана-Картана. Получены условия, которые препятствуют существованию псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана некоторых классов.

Ключевые слова: *многообразия Римана-Картана, псевдокиллинговые и псевдогармонические векторные поля*

1. Введение

Метрически-аффинным пространством называется триплет $(M, g, \overline{\nabla})$, где M – дифференцируемое многообразие размерности $n > 1$ с метрикой g некоторой сигнатуры и линейной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S, которая, вообще говоря, не зависит от g. Именно эти пространства в последние полвека стали объектом интенсивного изучения в теоретической физике, свидетельством чему сотни опубликованных статей.

Напротив, в дифференциальной геометрии только частные виды метрически-аффинного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$ время от времени попадали в поле зрения ученых, о чем мы скажем ниже, но в целом геометрия $(M, g, \overline{\nabla})$ никогда не вызывала их активного интереса.

Начало теории метрически-аффинных пространств было положено Картаном (см. [1]), предложившим вместо связности Леви-Чивита ∇ в GRT (General Relativity Theory) рассматривать несимметричную линейную связность $\overline{\nabla}$, обладающую свойством метричности $\overline{\nabla} g = 0$.

В результате пространство-время получало в дополнение к кривизне еще и кручение. В последствие им было опубликовано еще две работы (см. [2], [3]) в развитие своей теории, которая получила название Einstein-Cartan Theory of Gravity или сокращенно ECT (см. [4]). Результаты Картана нашли отражение в известных монографиях по дифференциальной геометрии первой половины прошлого века (см. [5], [6]).

Вплоть до начала 60-х годов идея Картана не находила поддержки у физиков-теоретиков. Толчком к изучению ECT послужили работы Кибла (см. [7]) и Сциямы (см. [8]), которые независимо друг от друга установили связь между кручением S связности $\overline{\nabla}$ и спин тензором материи s (spin tensor of matter). В последствие были открыты и другие физические приложения ECT (см. [9], [10]).

В последствие теория Эйнштейна-Картана была обобщена за счет снятия требования метричности для линейной связности $\overline{\nabla}$. Новая теория получила название Metric-Affine Gauge Theory of Gravity или сокращенно MAG (см. [11], [12]). Число работ, опубликованных в рамках ECT исчисляется сотнями, а в рамках MAG уже десятками.

Опубликованные результаты имеют в большей степени прикладной физический характер. Все исходные формулы были позаимствованы физиками из работ Картана вместе с его методом, который сейчас так и называется "метод внешних форм Картана".

Также нетрудно проследить заимствования и из монографий по дифференциальной геометрии, например, из известной монографии Схоутена и Стройка (см. [6]). В этом контексте характерна работа Мак Креа (см. [13]), где были выведены неприводимые относительно действия псевдоортогональной группы разложения тензоров неметричности $Q = -\overline{\nabla} g$, кручения S и кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$, основные соотношения на которые были приведены еще в монографии Схоутена и Стройка.

В свою очередь, идею своей статьи Мак Креа также позаимствовал из дифференциальной геометрии, где уже давно и хорошо известны неприводимые разложения тензоров кривизны R риманова и келерова многообразий.

Воспользовавшись результатом Мак Креа, целый коллектив авторов (см. [14]) так же как это делалось не раз в римановой геометрии, но по другим поводам (см., например, [15]; [17], стр. 586–620), за счет последовательного по-парного обращения в нуль неприводимых компонент разложения тензора кручения S выделил 3 класса пространств $(M, g, \overline{\nabla})$.

Первый класс $\mathcal{A}$ характеризуется условием

$$S = (n-1)^{-1} trace\, S \wedge Id_{TM},$$

второй класс $\mathcal{B}$ — условием $S = Alt\, S$ и, наконец, третий класс $\mathcal{C}$ характеризуется следующим строением тензора кручения

$$^{\mathcal{C}}S = S -^{\mathcal{A}}S -^{\mathcal{B}}S$$

для произвольной $x \in M$.

Также в этой статье была проведена систематизация результатов, полученных в рамках ЕСТ для четырехмерного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$. Заметим, что в отличие от геометрической традиции (см., например, [17], стр. 585-620) наряду с классами $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ пространств к рассмотрению не были привлечены классы $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.

На контрасте со все увеличивающимся потоком работ физиков, геометры к настоящему времени почти потеряли интерес к теории, основы которой заложил еще в двадцатых годах прошлого века известный геометр Картан. Наиболее яркими и, к сожалению, последними результатами геометрической теории пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ являются результаты Ванхекке и Тричерри по геометрии "многообразий с однородной структурой".

В принятой современной физикой терминологии эта теория называется Riemann-Cartan Theory или сокращенно RCT. Геометрия Римана-Картана это геометрия метрически-аффинного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$, с положительно определенной (римановой) метрикой g и линейной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S такой, что $Q = 0, \overline{\nabla}R = 0$ и $\overline{\nabla}T = 0$.

Ванхекке и Тричерри ([16]) получили неприводимое относительно действия ортогональной группы разложение тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ и использовали его для классификации пространств $(M, g, \overline{\nabla})$, а затем в других работах ими была изучена геометрия пространств из выделенных 6 классов.

Из всех видов афинно-метрических пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ в геометрии последовательно в течение длительного времени изучались только "четверть-симметрические метрические пространства", и их частный вид "полусимметрические метрические пространства", (см. [18]-[22]).

Четверть-симметрические метрические пространства существуют в рамках RCT и ECT и выделяются дополнительным условием

$$T(X, Y) := U(X)p(Y) - V(Y)p(X) - g(U(X), Y)W,$$

где

$$g(U(X), Y) = (Sym\, F)(X, Y), g(V(X), Y) = (Alt\, F)(X, Y)$$

для некоторого ковариантного 2-тензора F и $p(X) := g(W, X)$.

Полусимметрические метрические пространства определяются, в свою очередь, условием

$$T(X, Y) := U(Y)X - U(X)Y$$

для любых векторных полей X и Y на M.

Геометрия "в целом", метрически-аффинных пространств застыла на результатах Яно, Бохнера и Гольдберга (см. [23]-[25]) середины прошлого века. В их работах в рамках RCT доказывались "теоремы исчезновения", (vanishing theorems) для псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров на компактных пространствах $(M, g, \overline{\nabla})$, выделяемых условием $trace\, S = 0$.

Даже не смотря на последующие попытки обобщения их результатов за счет введения в рассмотрение компактных метрически-аффинных пространств с границей (см. [26]) это, по-прежнему, было доказательство тех же теорем исчезновения для тех же векторных полей и тензоров.

При этом сформулированные в "теоремах исчезновения", (vanishing theorems) условия препятствия существованию псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров поражают своей громоздкостью, в отличие от теорем для киллинговых и гармонических векторных полей и тензоров на римановых многообразиях. При этом следует особо отметить, что геометрия таких векторов и тензоров ни до, ни после цитируемых нами работ никем не изучалась.

нам удалось наметить пути модернизации этой техники, при этом первые полученные результаты, анонсированные на Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2008" и на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в Суздале в 2008 году (см [27], [28]), имеют геометрически содержательный и компактный вид, что внушает уверенность в правильности выбранного направления исследований.

В настоящей статье будут изложены некоторые геометрические свойства некоторых классов пространств Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, которые до сих пор не попали в поле зрения геометров и условия, препятствующие их существованию.

Кроме того, нами были получены условия препятствия существования псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана отдельных классов.

2. Многообразие Римана-Картана

2.1. Многообразие Римана-Картана определяется (см. [12]) как триплет $(M, g, \overline{\nabla})$, где M - n-мерное ($n \geq 2$) многообразие с положительно определенным метрическим тензором g_{ij} и линейной несимметрической связностью $\overline{\nabla}$ с коэффициентами $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ такой, что

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - g_{lj}\overline{\Gamma}^l_{ik} - g_{il}\overline{\Gamma}^l_{jk} = 0, \tag{2.1}$$

где $\partial_k = \partial/\partial x^k$, в локальной системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ на M. Поскольку связность $\overline{\nabla}$ не предполагается симметричной, то для нее определен тензор кручения связности S с компонентами $S_{ij}{}^k = 2^{-1}(\overline{\Gamma}^k_{ij} - \overline{\Gamma}^k_{ji})$.

Коэффициенты связности $\overline{\nabla}$ выражаются через символы Кристоффеля Γ^i_{jk} связности Леви-Чивита ∇ посредством равенства (см. [25], стр. 78)

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + S_{ij}{}^k - S^k_{ij} - S^k_{ji}. \tag{2.2}$$

Наряду с тензором кручения S связности $\overline{\nabla}$ определяется тензор деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ связности ∇ в связность $\overline{\nabla}$, чьи компоненты $T_{ij}{}^k = \overline{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$ имеют связь с компонентами тензора кручения S, выражающуюся равенствами (2.2) и $S_{ij}{}^k = 2^{-1}(T_{ij}{}^k - T_{ji}{}^k)$. Из них, в частности, последует, что

$$T_{il}{}^l = 2S_{il}{}^l. \tag{2.3}$$

Одновременно из (2.1) выводим, что

$$T_{ikj} + T_{jki} = 0. \tag{2.4}$$

Известны также уравнения, связывающие компоненты тензоров кривизны $\overline{R}$ и R , Риччи $\overline{Ric}$ и Ric и скалярные кривизны $\overline{Scal}$ и $Scal$ связностей $\overline{\nabla}$ и ∇, вида (см. [14]; [25], стр. 80)

$$\overline{R}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} + \nabla_i T_{kj}{}^{l} - \nabla_j T_{ki}{}^{l} + T_{mi}{}^{l} T_{kj}{}^{m} - T_{mj}{}^{l} T_{ki}{}^{m}, \tag{2.5}$$

$$\overline{R}_{jk} = R_{jk} + \nabla_l T_{kj}{}^{l} - \nabla_j T_k - T_m T_{kj}{}^{m} - T_{mj}{}^{l} T_{kl}{}^{m}, \tag{2.6}$$

$$\overline{Scal} = Scal - 2\nabla_j T^j - T_{ijk} T^{kij} - T_j T^j, \tag{2.7}$$

где $T^j = g^{kl} T_{jkl}$.

2.2. Если предположить, что многообразие M – компактное и ориентированное с элементом объема

$$dv = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

тогда будет справедливой теорема Грина (см. [25], стр. 30)

$$\int\limits_M (div\ \xi) dv = 0.$$

Здесь на основании (2.3) имеем

$$div\ \xi = \overline{\nabla}_i \xi^i = \nabla_i \xi^i + 2\xi^k S^i_{kj},$$

а потому на многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$ и только на них справедливы равенства

$$div\ \xi = trace\ \overline{\nabla}\xi = trace \nabla\ \xi$$

для любого векторного поля ξ.

Можно определить также полные скалярные кривизны

$$Scal(M) = \int\limits_M Scal\ dv$$

и

$$\overline{Scal}(M) = \int\limits_M \overline{Scal}\ dv$$

многообразия $(M, g, \overline{\nabla})$. При этом на основании теоремы Грина из равенств (2.7) выводится уравнение связи

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - \int\limits_M (T_{ijk}T^{kij} + 4\|trace\ S\|^2)dv. \qquad (2.8)$$

Для многообразий Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ условия связи (2.7) принимают следующий вид:

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - 4\nabla_j S^j - 3S_{ijk}S^{ijk} - 2(2n-5)(n-1)^{-1}S_j S^j.$$

Данное равенство на основании теоремы Грина приводится к виду

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - \int\limits_M (3\|S\|^2 + 2(2n-5)(n-1)^{-1}\|trace\ S\|^2)dv.$$

А потому при $n \geq 3$ существует препятствие для задания несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ на римановом многообразии (M, g) в виде условия на полные скалярные кривизны $\overline{Scal}(M) \geq Scal(M)$ связностей $\overline{\nabla}$ и ∇, причем равенство выполняется только в случае их совпадения: $\overline{\nabla} = \nabla$.

Также заметим, что из (2.7) для многообразий $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B}$ имеет место равенство $\overline{Scal} = Scal - \|T\|^2$. А потому существует ограничение для задания несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\mathcal{B}$ на римановом многообразии (M, g) в виде условия на скалярные кривизны $\overline{Scal} \geq Scal$ связностей $\overline{\nabla}$ и ∇, причем равенство выполняется только в случае их совпадения: $\overline{\nabla} = \nabla$.

Для многообразий Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{A}$ из (2.7) имеем

$$\overline{Scal} = Scal - 4(\nabla_j S^j + n(n-1)^{-1}S_j S^j).$$

В этом случае для компактного многообразия M уравнения связи (2.8) принимают следующий вид:

$$\overline{Scal}(M) = Scal(M) - 4n(n-1)^{-1} \int\limits_M \|trace\ S\|^2 dv.$$

А потому существует препятствие для задания несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\mathcal{A}$ на римановом многообразии (M, g) в виде условия на полные скалярные кривизны $\overline{Scal}(M) \geq Scal(M)$ связностей $\overline{\nabla}$ и ∇, причем равенство выполняется только в случае их совпадения: $\overline{\nabla} = \nabla$.

3. Псевдокиллинговое векторное поле

3.1. Векторное поле Киллинга ξ определяется на римановом многообразии (M, g) условием $L_\xi g = 0$ для производной Ли L_ξ по отношению к векторному полю ξ. Используя правило вычисления производной Ли (см. [25], стр. 40)

$$L_\xi g_{ij} = \xi^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i \xi^k + g_{ik} \partial_j \xi^k, \tag{3.1}$$

находим выражение производной Ли в связности ∇ (см. там же)

$$L_\xi g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i, \tag{3.2}$$

и в несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$

$$L_\xi g_{ij} = \overline{\nabla}_i \xi_j + \overline{\nabla}_j \xi_i - 2(S_{kij} + S_{kji})\xi^k. \tag{3.3}$$

Векторное поле ξ на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ называется *псевдокиллинговым* (см. [25], стр. 86), если оно удовлетворяет уравнениям

$$\overline{\nabla}_i \xi_j + \overline{\nabla}_j \xi_i = 0. \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (3.3) выводим, что для $S_{kij} + S_{kji} = 0$ уравнения киллинговых и псевдокиллинговых векторных полей совпадают, а потому на многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B}$ каждое векторное поле Киллинга является псевдокиллинговым, верно и обратное.

Опираясь на установленный факт заключаем, что условием препятствия для существования псевдокиллинговых векторных полей на компактном многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B}$ будет хорошо известное условие отрицательной определенности тензора Риччи Ric связности Леви-Чивита ∇ (см. [25], стр. 36).

3.2. В монографии [25] были найдены условия препятствия существованию псевдокиллинговых векторных полей на компактных многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$. Условия эти, в чем нетрудно убедиться, носят довольно громоздкий характер. В качестве обобщения полученных результатов (так по тексту) была доказана (см. [25], стр. 91-92) следующая теорема:

Если на компактном многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$ с тензором кручения S, удовлетворяющим уравнениям вида $S_{ijk} - S_{ikj} + g_{ij}A_k - g_{ik}A_j = 0$, квадратичная форма $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является неположительно определенной, то каждое псевдокиллиновое векторное поле ξ должно иметь равные нулю ковариантные производные относительно связности $\overline{\nabla}$. Если же форма $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является отрицательно определенной, то не существует псевдокиллингова векторного поля, отличного от нуля.

Можно доказать, что данная теорема справедлива только для полусимметрических связностей. Проведем анализ, приведенного в теореме уравнения. Предположим, что тензор кручения S связности $\overline{\nabla}$ удовлетворяет условию

$$S_{ijk} - S_{ikj} + g_{ij}A_k - g_{ik}A_j = 0. \qquad (3.5)$$

Перепишем условия (3.5) дважды:

$$S_{ijk} - S_{ikj} + g_{ij}A_k - g_{ik}A_j = 0. \qquad (3.5a),$$

$$S_{jik} - S_{jki} + g_{ij}A_k - g_{jk}A_i = 0. \qquad (3.5b).$$

Сложим оба уравнения, получим:

$$-S_{ikj} - S_{jki} = S_{kij} + S_{kji} = -2g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}A_i.$$

В итоге имеем:

$$S_{kij} + S_{kji} = -2g_{ij}A_k + g_{ik}A_j + g_{jk}A_i. \tag{3.6}$$

Рассмотрим это уравнение совместно с уравнением (3.5)

$$S_{kij} - S_{kji} + g_{ik}A_j - g_{kj}A_i = 0. \tag{3.5c}$$

Вычитая (3.5с) из (3.6), получаем:

$$2S_{kji} = 2(-g_{ij}A_k + g_{ki}A_j)$$

или

$$S_{kji} = g_{ki}A_j - g_{ij}A_k.$$

Откуда сверткой с метрическим тензором g^{ij} находим

$$S_{kl}{}^{l} = S_{kji}g^{ij} = (1-n)A_k,$$

т.е.

$$A_k = -(n-1)^{-1}S_k,$$

где $S_k = S_{kl}{}^{l}$. Поэтому

$$S_{kji} = (n-1)^{-1}(g_{ij}S_k - g_{ki}S_j)$$

или

$$S_{kj}{}^{i} = (n-1)^{-1}(\delta^i_j S_k - \delta^i_k S_j),$$

что соответствует условиям полусимметрической связности.

В итоге заключаем, что в приведенной выше теореме К. Яно речь идет о многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{A}$ и только о них. А потому об обобщении, которое было заявлено, говорить не совсем корректно.

Справедлива

Теорема 1. *Если в компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{A}$ квадратичная форма $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ является неположительно определенной, то каждое псевдокиллинговое векторное поле ξ должно иметь равные нулю ковариантные* *производные относительно коэффициентов аффинной связности многообразия. Если форма* $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ *является отрицательно определенной, то не существует псевдокиллингова векторного поля, отличного от нуля.*

4. Псевдогармоническое векторное поле

Векторное поле ξ называется *псевдогармоническим* (см. [25], стр. 84), если

$$\overline{\nabla}_i\xi_j - \overline{\nabla}_j\xi_i = 0, \quad \overline{\nabla}_i\xi^i = 0. \tag{4.1}$$

Притом, что с учетом равенств

$$\overline{\Gamma}^k_{ij} = T_{ij}{}^k + \Gamma^k_{ij},$$

$$S_{ij}{}^k = 2^{-1}(T_{ij}{}^k - T_{ji}{}^k)$$

и (2.3) уравнениям (4.1) можно придать следующий вид

$$\nabla_i\xi_j - \nabla_j\xi_i + 2\xi_k S_{ij}{}^k = 0, \quad \nabla_i\xi^i + 2\xi^k S_{ki}{}^i = 0. \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) непосредственно вытекает, что совпадение псевдогармонических и гармонических векторных полей можно ожидать только на многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}$.

В монографии [25] были найдены, условия препятствия существованию псевдогармонических векторных полей на компактных многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{B}\oplus\mathcal{C}$. Условия эти, как и в случае псевдокиллинговых векторных полей, носили зачастую довольно громоздкий характер. Нами будет доказана следующая

Теорема 2. *Если на компактном многообразии Римана-Картана* $(M, g, \overline{\nabla})$ *класса* $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ *квадратичная форма* $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ *является неотрицательно определенной, то каждое псевдогармоническое векторное поле* ξ *должно иметь равные нулю ковариантные производные относительно связности* $\overline{\nabla}$. *Если же форма* $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ *является положительно определенной, то не* *существует псевдогармонического векторного поля, отличного от нуля.*

В начале доказательства сошлемся на теорему 7.20 монографии [25], в которой утверждается, что на компактном многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$ не может выполняться неравенство

$$(\overline{R}_{ij} + \overline{R}_{ji})\xi^i\xi^j - 2(S_{ijk} + S_{ikj} - g_{ij}B_k - g_{ik}B_j)\xi^i\overline{\nabla}^k\xi^j + \\ + (g_{jl}g_{km} + g_{jm}g_{kl})\overline{\nabla}^k\xi^j\overline{\nabla}^m\xi^l \geq 0$$

для любого векторного поля B_k и псевдогармонического векторного поля ξ, если только не имеет места соответствующее равенство. В частном случае, когда тензор кручения удовлетворяет уравнению вида

$$S_{ijk} + S_{ikj} = g_{ik}B_j + g_{ij}B_k + g_{jk}A_i, \tag{4.3}$$

приведенное выше условие запишется так

$$(\overline{R}_{ij} + \overline{R}_{ji})\xi^i\xi^j + (g_{jl}g_{km} + g_{jm}g_{kl})\overline{\nabla}^k\xi^j\overline{\nabla}^m\xi^l \geq 0 \tag{4.4}$$

и, следовательно, для неотрицательно определенной квадратичной формы $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ из (4.4) последует, что каждое псевдогармоническое векторное поле ξ должно иметь равные нулю ковариантные производные относительно связности $\overline{\nabla}$.

С другой стороны, для положительно определенной квадратичной формы $\overline{R}_{ij}\xi^i\xi^j$ условие (4.4) выполняется автоматически и, следовательно, псевдогармонических векторных полей ξ на таком многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует.

Проведем анализ уравнений (4.3). Для этого найдем A_i и B_i, свернув (4.3) последовательно с g^{jk}, а затем с g^{ij}. Учитывая, что $S_{ijk} + S_{jik} = 0$, получим:

$$\begin{cases} 2S_i = 2B_i + nA_i \\ -S_k = (1+n)B_k + A_k \end{cases},$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} B_i =& - (n-1)S_i, \\ A_i =& 2(n-1)S_i. \end{aligned}$$

В итоге получаем равенства

$$S_{ijk} + S_{ikj} = (n-1)^{-1}(2g_{jk}S_i - g_{ik}S_j - g_{ij}S_k),$$

которые являются определяющими для многообразий Римана-Картана класса $\overline{\nabla} \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

Доказанная теорема является обобщением теоремы 7.10 (см. [25], стр. 85) на случай несимметрической метрической связности класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

В заключение сделаем одно замечание. Поскольку многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ включают в себя в качестве частных видов многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, то доказанная теорема имеет место и для этих классов многообразий.

Список литературы

[1] *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part I. // Ann. Éc. Norm. – 1923. – **40**. – Pp. 325–412.

[2] *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part I. // Ann. Éc. Norm. – 1924. – **41**. – Pp. 1–25.

[3] *Cartan E.* Sur les variétés *à* connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part II. // Ann. Éc. Norm. – 1925. – **42**. – Pp. 17–88.

[4] *Arkuszewski W., Kopczynski W., Ponomariev V.N.* Matching Conditions in the Einstein-Cartan Theory of Gravitation // Commun. math. Phys. – 1975.–**45**. – Pp. 183-—190.

[5] *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия, –М.: ИЛ, 1948

[6] *Схоутен И.А., Стройк Д.Дж.* Введение в новые методы дифференциальной геометрии, Т.1.: Пер. с нем. – М.: ИЛ, 1939. – 181 с.

[7] *Kibble T.W.B.* Lorenz invariance and the gravitational field // J. Math. Phys. – 1961. – **2**. – Pp. 212–221.

[8] *Sciama D.W.* On the analogy between change and spin in general relativity // Recent developments in General Relativity. – Oxford: Pergamon Press & Warszawa: PWN. – 1962. – Pp. 415–439.

[9] *Ruggiero M.L. and Tartaglia A.* Einstein–Cartan theory as a theory of defects in space-time. // Amer. J. Phys. – 2003. – **71**. – Pp. 1303–1313.

[10] *Penrose R.* Spinors and torsion in general relativity. // Found. of Phys., – 1983. – **13**. – Pp. 325-339.

[11] *Hehl F.W., McCrea J.D., Mielke E.W., Ne'eman Y.* Metric-Affine Gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilation Invariance. // Phys. Rep. – 1995. – **258**.

[12] *Trautman A.* The Einstein–Cartan theory // Encyclopedia of Mathematical Physics // Oxford: Elsevier. – 2006. – **2**. – Pp. 189–195.

[13] *McCrea J. D.*, Irreducible decompositions of non-metricity, torsion, curvature and Bianchi identities in metric affine space-times. // Class.Quant.Grav.–1992. – **9**. – Pp. 553-568.

[14] *Capozziello S., Lambiase G., Stornaiolo C.* Geometric classification of the torsion tensor in space-time. // Annalen Phys. – 2001. – **10**. – Pp. 713–727.

[15] *Gray A. and Hervella L. M.* The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants. // Ann. Mat. Pura e Appl. – 1980. – **123**. – Pp.35–58.

[16] *Tricerri F. and Vanhecke L.* Homogeneous structures on Riemannian manifolds. // London Math. Soc. Lecture Notes Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge. – 1983., **83**.

[17] *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна: В 2-х т. Т. II. Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 384 с.

[18] *Yano K.* On semi-symmetric metric connection. // Revue Romanie math. pur. appl. – 1970. – **15**. – Pp. 1579-1586.

[19] *De U.C., Sengupta J.* On a type of semi-symmetric metric connection on an almost contact metric manifold. // Filomat. – 2000. – **14**. – Pp. 33–42.

[20] *Prasad B., Verma R.K.* On a type of semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold // Bull. Calcutta Math. Soc. – 2004. – **96**. №6. – Pp.483–488.

[21] *Uysal S.A., Laleoğlu R.Ö.* On weakly symmetric spaces with semi-symmetric metric connection // Publ. Math. – 2005. – **67**. №1–2. – Pp. 145–154.

[22] *Yaşar E., Cöken A.C., Yücesan A.* Totally umbilical lightlike hypersurfaces in semi–Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Int. J. Pure Appl. Math. – 2005. – **23**. №3. – Pp. 379–391.

[23] *Bochner S., Yano K.* Tensor-fields in non-symmetric connections. // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1952. – **56**. №3. – Pp. 504–519.

[24] *Goldberg S.I.* On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector in metric manifolds with torsion. // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1956. – **64**. №2. – Pp. 364–373.

[25] *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти.: Пер. с англ. – М.: ИЛ., 1957. – 152 с.

[26] *Kubo Y.* Vector fields in a metric manifold with torsion and boundary. // Kodai Math. Sem. Rep. – 1972. – **24**. – Pp. 383–395.

[27] *Гордеева И.А.* Псевдокиллинговые векторные поля на многообразиях Римана-Картана. – Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Одессе" (Одесса, 19-24 мая 2008 г.), Фонд "Наука", Одесса, – 2008. 73–75 с.

[28] *Гордеева И.А., Степанов С.Е.* Теорема исчезновения для псевдогармонических векторных полей на многообразии Римана-Картана. Тезисы докладов Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 27 июня-2 июля 2008 г.), ВлГУ, Владимир, – 2008, 71–73 с.