Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 10-34

Н. Г. Коновенко

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса
E-mail: `Konovenko@ukr.net`

Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на проективній прямій

В статті описуються одномірні однорідні розшарування на проективній прямій і знаходяться алгебри їхніх диференціальних інваріантів. Ми знаходимо нормальні форми локальної sl_2-дії, класифікуємо одномірні проективні величини, застосовуємо ці результати до інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, що мають sl_2-симетрії й знаходимо нові класи диференціальних рівнянь, що інтегруються у квадратурах.

В этой статье мы описываем одномерные однородные расслоения на проективной прямой и находим алгебры их дифференциальных инвариантов. Мы находим нормальные формы локального sl_2-действия и классифицируем одномерные проективные величины. Мы применяем эти результаты к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих sl_2-симметрии и находим новые классы дифференциальных уравнений интегрируемых в квадратурах.

In this paper we describe 1-dimensional homogeneous bundles of the projective line and find algebras of their differential invariants. We find normal forms of local sl_2-actions and classify 1-dimensional projective quantities. We apply these results to integration of ordinary differential equations equipped with sl_2-symmetry and find new classes of differential equations integrable in quadratures.

Ключові слова: *проективні структури, геометричні величини, диференціальні інваріанти, інваріантне диференціювання.*

1. Вступ

Згідно Ерлангенської програми Ф. Клейна [3] проективна геометрія прямої складається у вивченні інваріантів проективної (дробно-лінійної) дії групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$. Ми конкретизуємо це положення й вивчаємо диференціальні інваріанти цієї дії. Із цією метою ми розглядаємо однорідні розшарування над проективною прямою. На перерізах цих розшарувань, які ми називаємо геометричними проективними величинами [1], [2], природно діє група $SL_2(\mathbb{R})$.

В цій роботі ми даємо повний опис одномірних однорідних розшарувань і алгебр їхніх диференціальних інваріантів (Теореми 1,2,3,4). Маючи на увазі застосування до звичайних диференціальних рівнянь, ми розглядаємо задачу класифікації проективних геометричних величин локально.

В якості групи, що класифікується ми розглядаємо локальні точкові дифеоморфізми, що зберігають структуру розшарування геометричних величин. У цьому випадку проективні геометричні величини розпадаються на три класи, які ми позначаємо через R, S, T. Більш детальна класифікація усередині цих класів наведена в теоремі 5. Вона містить 8 підкласів.

Зауважимо, що знайдені Софусом Лі дії $sl_2(\mathbb{R})$ на площині містяться усередині цієї класифікації, але не збігаються з нею, тому що класифікаційна група для геометричних величин строго менше групи всіх локальних дифеоморфізмів площини. У теоремі 1 дано детальний опис цих класів і відповідних дій алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$.

У теоремах 2, 3, 4 дається повний опис диференціальних інваріантів для даних sl_2-дій у термінах базисних диференціальних інваріантів і їхніх інваріантних похідних. Цей опис використається потім для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, що мають sl_2 алгебру точкових симетрій. А саме, кожне таке рівняння, якщо записати у диференціальних інваріантах може бути інтегроване "по-кроково". Спочатку ми інтегруємо рівняння для базового диференціального інваріанта, а потім отримані розв'язки розглядаємо як звичайні диференціальні рівняння порядку, що є $\leqslant 3$ та володіють sl_2-симетрією. Ми описуємо випадки, коли ці рівняння, у свою чергу,можуть бути проінтегровані у квадратурах. Відзначимо, що конструктивне інтегрування рівнянь для базового диференціального інваріанта може бути проведене при наявності симетрій, які, у термінах споконвічного диференціального рівняння, є нелокальними симетріями типу Беклунда. Відзначимо також, що застосування цього методу до звичайних диференціальних рівнянь, що володіють 2-мірною розв'язною алгеброю симетрій "$ax + b$", а також зв'язаною з нею афінною геометрією, можна знайти в [5].

2. Розшарування проективних геометричних величин

Геометрія проективної прямої $\mathbb{R}P^1$, або проективна геометрія,
визначається структурною групою $SL_2(\mathbb{R})$ і її дією дробнолінійними перетвореннями на $\mathbb{R}P^1$:

$$\lambda_A : [x : y] \longmapsto \frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{21}x + a_{22}y},$$

де $A = \|a_{ij}\| \in SL_2(\mathbb{R})$. Відповідно, в афінній карті $[x : 1]$, цій дії групи Лі, відповідає дія, або зображення алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ у векторних полях на $\mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} h & a \\ b & -h \end{bmatrix} \in sl_2(\mathbb{R}) \longmapsto (a + 2hx - bx^2)\partial_x \in D(\mathbb{R}).$$

Проективні геометричні величини суть перетину однорідних розшарувань $\pi : E \to \mathbb{R}P^1$ над проективною прямою [1], [2], [3]. У цій роботі ми вивчаємо локальну структуру таких розшарувань. Тому замість проективної прямої $\mathbb{R}P^1$ ми обмежимося деякою областю афінної карти $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}P^1$. Більше того, ми вивчаємо одномірні проективні величини. Для них розшарування

π, (локально) має вигляд

$$\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \pi : (x, u) \longmapsto x,$$

а однорідність цього розшарування означає, що стандартна дія алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ на прямій піднята в розшарування π. Іншими словами, векторні поля

$$X = \partial_x, \quad Y = x^2 \partial_x, \quad H = x\partial_x,$$

які утворюють базис в $sl_2(\mathbb{R})$ і задовольняють наступні комутаційні співвідношення

$$[X, H] = X, \qquad [Y, H] = -Y, \qquad [X, Y] = 2H,$$

підняті до векторних полів в $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \partial_x + a(x, u)\partial_u, \\ \overline{Y} &= x^2\partial_x + b(x, u)\partial_u, \\ \overline{H} &= x\partial_x + h(x, u)\partial_u, \end{aligned} \tag{1}$$

так щоб вони задовольняли комутаційним співвідношенням алгебри $sl_2(\mathbb{R})$, тобто

$$\begin{aligned} [\overline{X}, \overline{H}] &= \overline{X}, \\ [\overline{Y}, \overline{H}] &= -\overline{Y}, \\ [\overline{X}, \overline{Y}] &= 2\overline{H}. \end{aligned} \tag{2}$$

Ці співвідношення у свою чергу еквівалентні диференціальним рівнянням на функції $a(x, u)$, $b(x, u)$, $h(x, u)$

$$\begin{aligned} -a - xa_x - ha_u + h_x + ah_u &= 0, \\ b - xb_x - hb_u + x^2 h_x + bh_u &= 0, \\ -2h - x^2 a_x - ba_u + b_x + ab_u &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Для рішення цієї системи диференціальних рівнянь введемо допоміжні функції A, B, H, так щоб

$$\begin{array}{rcl} a & = & A, \\ h & = & H + xA, \\ b & = & B + 2xH + x^2 A. \end{array}$$

Тоді система (3), як система диференціальних рівнянь щодо допоміжних функцій A, B, H має вигляд:

$$\begin{aligned} H_x + AH_u - HA_u = 0, \\ B - HB_u + BH_u = 0, \\ B_x + AB_u - BA_u = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Відзначимо, що у випадку, коли $H = 0$, $B = 0$, довільна гладка функція A задовольняє систему рівнянь (4).

Подання, що відповідають випадку, коли $H = 0$, $B = 0$ і $A(x, u)$ — будь-яка функція, ми відносимо до класу, який позначаємо через T.

Нехай тепер $H \neq 0$. Перепишемо перше рівняння системи (4) у вигляді:

$$\left(\frac{1}{H}\right)_x + \left(\frac{A}{H}\right)_u = 0. \tag{5}$$

Тоді, існує функція $\varphi(x, u)$, така що

$$H = \frac{1}{\varphi_u}, \quad A = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}. \tag{6}$$

Якщо ж $B = 0$, то

$$A = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u}, \quad H = \frac{1}{\varphi_u} \tag{7}$$

є розв'язком системи (4).

Якщо ж $B \neq 0$, то третє рівняння системи (4) можна записати у вигляді:

$$\left(\frac{1}{B}\right)_x + \left(\frac{A}{B}\right)_u = 0. \tag{8}$$

Отже, існує функція $\psi(x,u)$, така що

$$B = \frac{1}{\psi_u}, \quad A = -\frac{\psi_x}{\psi_u}. \tag{9}$$

У цьому випадку друге рівняння (4) системи набуде вигляду:

$$\frac{1}{B} + \left(\frac{H}{B}\right)_u = 0.$$

Тому, $\left(\psi + \frac{H}{B}\right)_u = 0$, або $\frac{H}{B} + \psi = \alpha(x)$. Підставляючи значення (6) і (9) у це рівняння, одержуємо:

$$\frac{\psi_u}{\varphi_u} = \alpha(x) - \psi \quad \text{або} \quad \frac{\psi_u}{\alpha - \psi} = \varphi_u.$$

Звідси

$$-\ln(\alpha - \psi) = \varphi + \widetilde{\beta(x)} \quad \text{або} \quad \alpha - \psi = e^{-\varphi} \cdot \beta(x),$$

і остаточно

$$\psi = \alpha(x) + \beta(x) e^{-\varphi}.$$

Крім того, зі співвідношень (6) і (9), матимемо

$$A = -\frac{\varphi_x}{\varphi_u} = -\frac{\psi_x}{\psi_u},$$

або

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_u} = \frac{\alpha' + \beta' e^{-\varphi} - \beta \varphi_x e^{-\varphi}}{-\beta \varphi_u e^{-\varphi}}.$$

Звідки

$$\alpha' \varphi_u + \beta' e^{-\varphi} \varphi_u - \beta \varphi_x \varphi_u e^{-\varphi} = -\beta \varphi_x \varphi_u e^{-\varphi},$$

або $(\alpha' + \beta' e^{-\varphi})\varphi_u = 0$. Але, оскільки $\varphi_u \neq 0$, тоді $\alpha' + \beta' e^{-\varphi} = 0$, й отже,

$$\alpha, \beta = const.$$

Отже, ми маємо три типи розв'язків системи рівнянь (3):

1) $a = a(x,u)$, $b = x^2 a(x,u)$, $h = x a(x,u)$, де $a(x,u)$ — довільна, гладка функція.

2) $a=-\frac{\varphi_x}{\varphi_u}$; $b=\frac{2x-x^2\varphi_x}{\varphi_u}$; $h=\frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u}$, де $\varphi(x,u)$– довільна, гладка функція.
3) $a=-\frac{\varphi_x}{\varphi_u}$, $b=\frac{2x\beta-x^2\beta\varphi_x-e^{\varphi}}{\beta\varphi_u}$, $h=\frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u}$, де $\varphi(x,u)$ — довільна, гладка функція, а $\beta\in\mathbb{R}\setminus 0$.

Отже, ми отримали наступний результат.

Теорема 1. *Локально всі одномірні проективні величини розпадаються на 3 класи, що відповідають наступним поданням алгебри Лі* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$*:*

T

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \partial_x-\frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u,\\ \overline{H} &= x\partial_x-\frac{x\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u,\\ \overline{Y} &= x^2\partial_x-\frac{x^2\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u.\end{aligned}$$

S

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \partial_x-\frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u,\\ \overline{H} &= x\partial_x+\frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u,\\ \overline{Y} &= x^2\partial_x+\frac{2x-x^2\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u.\end{aligned}$$

R

$$\begin{aligned}\overline{X} &= \partial_x-\frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u,\\ \overline{H} &= x\partial_x+\frac{1-x\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u,\\ \overline{Y} &= x^2\partial_x+\frac{2x\beta-x^2\beta\varphi_x-e^{\varphi}}{\beta\varphi_u}\partial_u,\end{aligned}$$

де $\varphi=\varphi(x,u)$ *— гладка функція,* $\varphi_u\neq 0$*, а* $\beta\in\mathbb{R}\setminus 0$ *— константа.*

Зауваження 1. *k-тензори, як коваріантні так і контраваріантні, відповідають проективним величинам класу* (S) *коли* $\varphi=-\frac{1}{k}\ln|u|$*, для коваріантних k-тензорів, і* $\varphi=\frac{1}{k}\ln|u|$*, для контраваріантних k-тензорів.*

Зауваження 2. *Проективні величини класу* (T) *відповідають перерізам одномірного розшарування* π*, в якому задана (нелінійна) зв'язність. Підняття дії алгебри Лі* $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ *відповідає горизонтальному ліфту векторних полів.*

Теорема 1 справедлива в області, де $\varphi(x,u)$ — гладка функція й $\varphi_u \neq 0$. Дійсно, як буде показано нижче, ці подання в багатьох випадках допускають продовження в ті точки, де $\varphi_u = 0$, або φ, не визначена, або не диференційовна. Детальне дослідження нормальних форм sl_2-подань буде дане в п. 4.

Якщо ж $\varphi_u \neq 0$, то пошарове відображення

$$(x,u) \mapsto (x, \varphi(x,u))$$

є локальним дифеоморфізмом і переводить зазначені подання T, R і S в ті ж подання, що відповідають функції $\varphi = u$, або будь-якій функції $\varphi = f(u)$, де $f' \neq 0$.

Якщо взяти $\varphi = \ln|u|$, ми одержимо наступні реалізації, які ми позначимо через $T_\circ$, $S_\circ$, $R_\circ$:

$T_\circ$

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x^2\partial_x, \quad \overline{H} = x\partial_x,$$

$S_\circ$

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x^2\partial_x + 2ux\partial_u, \quad \overline{H} = x\partial_x + u\partial_u,$$

$R_\circ$

$$\overline{X} = \partial_x, \quad \overline{Y} = x^2\partial_x + (2ux - \alpha x^2)\partial_u, \quad \overline{H} = x\partial_x + u\partial_u,$$

де $\alpha = \beta^{-1}$.

Відзначимо так само, що подання $T_\circ$, $S_\circ$, $R_\circ$ суть подання алгебри Лі $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ на площині знайдені С. Лі [11].

Відповідні дії sl_2-дії інтегруються й ми приходимо до наступних модельних дій групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$:

$T_\circ$

$$\overline{\lambda_A} : (x,u) \longmapsto \left(\frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, u\right),$$

$S_\circ$

$$\overline{\lambda_A} : (x,u) \longmapsto \left(\frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, \frac{u}{a_{21}x + a_{22}}\right),$$

$R_\circ$

$$\overline{\lambda_A} : (x,u) \longmapsto \left(\frac{a_{11}x + a_{12}}{a_{21}x + a_{22}}, \frac{1}{a_{21}x + a_{22}} \cdot \frac{u}{a_{21}(x - \alpha u) + a_{22}}\right),$$

де $A = \|a_{ij}\| \in SL_2(\mathbb{R})$.

3. Диференціальні інваріанти проективних геометричних величин

У цьому розділі ми знаходимо алгебри диференціальних інваріантів для одномірних проективних геометричних величин. Класифікаційна Теорема 1 дозволяє зробити цей опис конструктивним.

На початку нагадаємо [1], [9], [15], що функція

$$f \in C^\infty(J^k\pi),$$

задана в просторі k-джетів розшарування геометричних величин $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, називається диференціальним інваріантом порядку $\leq k$ для заданої дії алгебри $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$, якщо

$$\overline{X}^{(k)}(f) = \overline{Y}^{(k)}(f) = \overline{H}^{(k)}(f) = 0,$$

де $\overline{X}^{(k)}, \overline{Y}^{(k)}, \overline{H}^{(k)}$ — k-е продовження векторних полів $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{H}$.

Зауважимо, що при $k = 0$, функція φ є диференціальним інваріантом для геометричних величин класу (T), а тому локально будь-який інваріант нульового порядку має вигляд $F(\varphi)$, де F - гладка функція. Неважко також бачити, що для геометричних величин класу (S) й (R) диференціальних інваріантів нульового порядку немає.

3.1. **Інваріанти проективних геометричних величин класу** (T)**.** Як ми вже бачили функція φ, що входить в опис подань алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$, для геометричних величин класу (T) є диференціальним інваріантом. З іншої сторони безпосередні обчислення показують, що розмірність $sl_2(\mathbb{R})$-орбіт у просторі 2-джетів $J^2(\pi)$ дорівнює 3. А оскільки $dim J^2(\pi) = 4$, то диференціальних інваріантів порядку ≤ 2, за винятком функції φ, немає. Для того, щоб знайти інваріанти третього порядку нагадаємо, що точкове перетворення $(x, u) \to (x, \varphi(x, u))$ переводить стандартну реалізацію алгебри $sl_2(\mathbb{R})$, що відповідає

$\varphi = u$ в поданні $sl_2(\mathbb{R})$ типу (T), що відповідає функції $\varphi(x, u)$. Для стандартної реалізації легко перевірити, що додатковий інваріант третього порядку дається похідною Шварца оберненої функції:

$$\frac{2u_1u_3 - 3u_2^2}{2u_1^4}.$$

Тому, як легко перевірити, у випадку довільної функції $\varphi(x, u)$ диференціальним інваріантом порядку 3 є функція

$$I = \frac{2\frac{d\varphi}{dx}\frac{d^3\varphi}{dx^3} - 3(\frac{d^2\varphi}{dx^2})^2}{2(\frac{d\varphi}{dx})^4}.$$

З міркувань розмірності слідує, що починаючи з порядку $k = 3$, при переході від k-джетів до $(k+1)$-джетів, ми додаємо рівно один диференціальний інваріант і рівно один інваріант ми одержуємо, використовуючи похідну Трессе. Отже, маємо наступний результат:

Теорема 2. *Алгебра диференціальних інваріантів для геометричних величин класу (T), локально породжена диференціальним інваріантом нульового порядку*

$$I = \varphi(x, u),$$

диференціальним інваріантом третього порядку J, а також всіма похідними Трессе

$$\frac{D^kJ}{DI^k} \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Інакше кажучи, локально всякий диференціальний інваріант порядку k має вигляд:

$$F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \ldots, \frac{D^{k-3}J}{DI^{k-3}}\right),$$

де F — гладка функція.

3.2. **Інваріанти проективних геометричних величин класу** (S)**.** Насамперед зауважимо, що для геометричних величин класу (S) нетривіальних диференціальних інваріантів порядку ≤ 1 немає.

Для знаходження диференціальних інваріантів другого порядку необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\overline{X}^{(2)}(F) = \overline{Y}^{(2)}(F) = \overline{H}^{(2)}(F) = 0 \tag{10}$$

відносно функції $F \in C^{\propto}(J^2\pi)$. Тут $\overline{X}^{(2)}$, $\overline{Y}^{(2)}$, $\overline{H}^{(2)}$ — другі продовження векторних полів $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{H}$. Спочатку розглянемо випадок, коли $\varphi = u$. Тоді в стандартних координатах (x, u, u_1, u_2) на $J^2(\pi)$, маємо:

$$\begin{array}{rcl} \overline{X}^{(2)} & = & \partial_x, \\ \overline{Y}^{(2)} & = & x^2\partial_x + 2x\partial_u - 2(xu_1 - 1)\partial_{u_1} + 2(2xu_2 - u_1)\partial_{u_2}, \\ \overline{H}^{(2)} & = & x\partial_x + \partial_u - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2}. \end{array}$$

Безпосередні обчислення показують, що загальний розв'язок F цієї системи рівнянь (10) є функцією від

$$e^{2u}(2u_2 + u_1^2).$$

Але, оскільки локальне точкове пошарове перетворення,

$$(x, u) \longmapsto (x, \varphi(x, u)),$$

переводить це, модельне, подання в загальне, що відповідає довільній функції $\varphi(x, u)$, то можна чекати, що функція

$$I = e^{2\varphi}\left(2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right)$$

є розв'язком системи (10).

Безпосередня перевірка показує, що це дійсно так. Тепер з того, що розмірності sl_2-орбіт у $J^2(\pi)$ дорівнюють 3, а $dimJ^2(\pi) = 4$, випливає, що локально будь-який розв'язок (10) є функцією від I.

Для знаходження інваріантів вищого порядку знайдемо інваріантне диференціювання, скориставшись наступною лемою.

Лема 1. *Для того, щоб диференціювання*

$$\nabla = \lambda \frac{d}{dx} : C^{\infty}(J^{\infty}\pi) \longrightarrow C^{\infty}(J^{\infty}\pi),$$

де $\lambda \in C^{\propto}(J^k(\pi))$, *було комутативним із продовженням векторних полів* $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{H}$, *тобто було інваріантним диференціюванням проективних геометричних величин, необхідно і достатньо, щоб функція* λ *задовольняла наступній системі диференціальних рівнянь:*

$$\overline{X}^{(k)}(\lambda) = 0, \quad \overline{Y}^{(k)}(\lambda) = 2x\lambda, \quad \overline{H}^{(k)}(\lambda) = \lambda. \tag{11}$$

Доведення.

Нехай V векторне поле на $\mathbb{R}^2$:

$$V = A\partial_x + B\partial_u$$

і $\psi = B - Au_1$ його похідна функція, тоді його k-е продовження має вигляд [6, 13]:

$$V^{(k)} = \psi \frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + \frac{d^k\psi}{dx^k}\frac{\partial}{\partial u_k} + \\ + A\left(\frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + u_{k+1}\frac{\partial}{\partial u_k}\right).$$

Ми розглянемо нескінченне продовження векторного поля V, як формальне диференціювання вигляду

$$V^{\bullet} = \Theta_{\psi} + A\frac{d}{dx} : C^{\infty}(J^{\infty}\pi) \longrightarrow C^{\infty}(J^{\infty}\pi),$$

де $\Theta_{\psi} = \psi\frac{\partial}{\partial u} + \frac{d\psi}{dx}\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + \frac{d^k\psi}{dx^k}\frac{\partial}{\partial u_k} + \ldots$ — еволюційне диференціювання [6].

Тоді $V^{\bullet}(F) = V^k(F)$, якщо $F \in C^{\infty}(J^k)$.

Пряме обчислення показує, що

$$\left[\lambda\frac{d}{dx}, V^{\bullet}\right] = \left(V^{\bullet}(\lambda) - \lambda\frac{dA}{dx}\right)\frac{d}{dx}.$$

Інакше кажучи, диференціювання $\lambda\frac{d}{dx}$ комутує з нескінченним продовженням $V^\bullet$ тоді й тільки тоді, коли

$$V^\bullet(\lambda) = \lambda \frac{dA}{dx}.$$

Якщо взяти за векторне поле V наші поля $\overline{X}$ й $\overline{Y}$ ми одержимо твердження леми.

Розв'язуючи систему (11) при $k = 0$, ми отримуємо, що

$$\nabla = e^{\varphi} \frac{d}{dx}$$

є інваріантним диференціюванням для геометричних величин класу (S). Підрахунок розмірів показує, що починаючи з порядку $k = 2$ при переході від k-джетів до $(k+1)$-джетів додається рівно один диференціальний інваріант, який ми можемо одержати за допомогою інваріантного диференціювання, тому ми приходимо до наступного результату:

Теорема 3. *Алгебра диференціальних інваріантів для проективних геометричних величин класу (S), локально породжена базисним інваріантом другого порядку*

$$I = 2\psi \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2,$$

і його інваріантними похідними

$$\nabla^k(I) \qquad k = 1, 2, \dots,$$

де $\psi = e^{\varphi}$ й $\nabla = \psi\frac{d}{dx}$. Інакше кажучи, локально диференціальні інваріанти порядку k геометричних величин класу (S) мають вигляд:

$$F\Big(I, \nabla I, \dots, \nabla^{(k-2)}(I)\Big),$$

де F - гладка функція.

3.3. **Інваріанти проективних геометричних величин класу** (R)**.** Прямий підрахунок показує, що у геометричних величин класу (R) немає нетривіальних диференціальних інваріантів нульового й першого порядку. Для системи диференціальних рівнянь

$$\overline{X}^{(2)}(F) = \overline{Y}^{(2)}(F) = \overline{H}^{(2)}(F) = 0 \tag{12}$$

ми використаємо аналогічний прийом, що й у випадку геометричних величин класу (S). А саме, розглянемо спочатку випадок коли $\varphi = u$, тоді

$$\begin{aligned}
&\overline{X}^{(2)} = \partial_x,\\
&\overline{Y}^{(2)} = x^2\partial_x + \left(2x - \tfrac{e^u}{\beta}\right)\partial_u + \left(2 - 2xu_1 - \tfrac{e^u}{\beta}u_1\right)\partial_{u_1} -\\
&-\left(2u_1 + 4xu_2 + \tfrac{e^u}{\beta}u_1^2 + \tfrac{e^u}{\beta}u_2\right)\partial_{u_2},\\
&\overline{H}^{(2)} = x\partial_x + \partial_u - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2}.
\end{aligned}$$

Розв'язуючи систему (12) для цього випадку, знаходимо, що загальний розв'язок є функцією від

$$\frac{(u_2 - u_1^2)e^{2u} + 6\beta u_1 e^u - 4\beta^2}{\left(\beta - u_1 e^u\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Тому, також як і для геометричних величин класу (S), ми робимо висновок, що функція

$$I = \frac{\psi\frac{d^2\psi}{dx^2} - 2\left(\widehat{A}(\varphi)\right)^2 + 6\beta\frac{d\psi}{dx} - 4\beta^2}{\left(\beta - \frac{d\psi}{dx}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

де $\psi = e^{\varphi}$, є розв'язком системи (12) і всі диференціальні інваріанти 2-го порядку суть функції I.

Для знаходження інваріантів вищого порядку ми використаємо інваріантне диференціювання. Розв'язуючи систему рівнянь (11) для $k = 1$ знаходимо інваріантне диференціювання

$$\nabla = \frac{\psi}{\sqrt{\beta - \frac{d\psi}{dx}}}\widehat{A}(\varphi).$$

Отже, одержуємо наступний результат:

Теорема 4. *Алгебра диференціальних інваріантів геометричних величин класу (R) локально породжена диференціальним інваріантом другого порядку (I) і всіма інваріантними похідними $\nabla^k(I)$, де $k = 1, 2, \ldots$. Іншими словами, будь-який диференціальний інваріант порядку k можна подати у вигляді*

$$F\bigg(I, \nabla I, \ldots, \nabla^{(k-3)}(I)\bigg),$$

де F — гладка функція.

Приклад 1. *Застосовуючи оператор ∇ до інваріанта I ми знаходимо, диференціальний інваріант третього порядку:*

$$\nabla(I) = \frac{\psi^2 \frac{d^3\psi}{dx^3}}{\left(\beta - \frac{d\psi}{dx}\right)^2} + \frac{3\psi^2\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2}{2\left(\beta - \frac{d\psi}{dx}\right)^3},$$

де $\psi = e^{\varphi}$.

4. Нормальні форми й дії алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$

В цьому розділі ми приводимо локальну класифікацію 1-мірних геометричних величин над проективною прямою. А саме ми класифікуємо локальні дії алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ в розшаруванні геометричних величин $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ відносно псевдогрупи точкових пошарових перетворень, тобто перетворень виду:

$$(x, u) \longmapsto (x, F(x, u)).$$

Відзначимо, що локальна класифікація дій алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ відносно псевдогрупи всіх локальних дифеоморфізмів $\mathbb{R}^2$, була знайдена Софусом Лі [11], і вона складається з трьох класів T_0, S_0, R_0.

Зауважимо, що векторне поле $\overline{X}$ трансверсальне шарам розшарування π, і отже локально має перший інтеграл $h(x,u)$ такий, що $h_u \neq 0$. Вибравши локальний пошаровий дифеоморфізм

$$(x,u) \longmapsto (x, h(x,u)),$$

ми переведемо векторне поле $\overline{X}$ в ∂_x. У цьому випадку векторні поля $\overline{Y}$, $\overline{H}$ набудуть вигляду (1), де $A \equiv 0$.

З рівнянь (4) маємо, що $B_x = H_x = 0$, і функції

$$B = B(u), \qquad H = H(u)$$

задовольняють співвідношенню:

$$B - HB_u + H_uB = 0. \tag{13}$$

Відзначимо, що при $B \equiv 0$, довільна функція $H(u)$ задовольняє рівнянню (13).

У цьому випадку

$$\begin{aligned} \overline{X} &= \partial_x, \\ \overline{Y} &= x^2\partial_x + 2xH\partial_u, \\ \overline{H} &= x\partial_x + H\partial_u, \end{aligned}$$

а класифікація sl_2-дій зводиться до класифікації векторних полів $H(u)\partial_u$ щодо локальних дифеоморфізмів

$$u \longmapsto F(u).$$

Як добре відомо, одномірні ненульові векторні поля в околі точки $u = 0$ локально еквівалентні (відносно псевдогрупи локальних дифеоморфізмів прямої) векторним полям з наступного переліку

$$\partial_u, \quad \lambda u\partial_u, \quad \pm u^k\partial_u, \quad \alpha(u)\partial_u,$$

где $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$, $k \in \ N$, $k \geq 2$, а $\alpha(u)$ — плоска в нулі функція. Тому, у цьому випадку, в околі точки $(x = 0, u = 0)$, ми одержуємо наступні нормальні форми:

1) $\overline{H} = x\partial_x$,
якщо $H = 0$.
2) $\overline{H} = x\partial_x + \partial_u$,
якщо $H(0) \neq 0$.
3) $\overline{H} = x\partial_x + \lambda u\partial_u$,
якщо $H(0) = 0$, але $H'(0) = \lambda \neq 0$.
4) $\overline{H} = x\partial_x + u^{2k}\partial_u$,
якщо $H(0) = \ldots = H^{2k-1}(0) = 0$, але $H^{(2k)}(0) \neq 0$.
5) $\overline{H} = x\partial_x \pm u^{2k+1}\partial_u$,
якщо $H(0) = \ldots = H^{2k}(0) = 0$, але $H^{(2k+1)}(0) \neq 0$.
6) $\overline{H} = x\partial_x + \lambda u\partial_u$,
якщо $\lambda(u)$ плоска в нулі функція, тобто $\lambda^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, \ldots$.

Нехай тепер $B \neq 0$, і $H(0) \neq 0$. Тоді векторне поле $H(u)\partial_u$ локальним дифеоморфізмом зводиться до вигляду ∂_u; тобто ми можемо вважати $H \equiv 1$. Тоді $B - B_u = 0$, і $B = Ce^u$. Трансляцією $u \mapsto u + const$ ми можемо перевести функцію $B = Ce^u$ у функцію $\pm e^u$ й отже

$$\begin{array}{rcl} \overline{H} & = & x\partial_x + \partial_u, \\ \overline{Y} & = & x^2\partial_x + (\pm e^u + 2x)\partial_u. \end{array}$$

Нарешті, якщо $H(0) = 0$, але $B(0) \neq 0$, то подавши функцію H у вигляді $H = \psi B$, одержуємо $B\psi_u + 1 = 0$, або

$$B = -\frac{1}{\psi_u}, \quad H = -\frac{\psi}{\psi_u}.$$

Ми розглянемо тільки випадок, коли векторне поле $H(u)\partial_u$ має нуль кінцевого порядку. У цьому випадку векторне поле $H(u)\partial_u$ можна звести до нормальної форми $\lambda u\partial_u$, якщо $H'(0) = \lambda \neq 0$, або до вигляду $\pm u^k\partial_u$, якщо

$$H(0) = \ldots = H^{(k-1)}(0) = 0, \quad H^{(k)}(0) \neq 0, \quad k \geq 0.$$

Інтегруючи рівняння $H = -\frac{\psi}{\psi_u}$ відносно ψ, і припускаючи, що ψ має одну із зазначених вище нормальних форм, ми одержуємо:

$$\psi(u) = Ce^{-\int \frac{du}{H}}$$

і

$$B = -\frac{1}{\psi_u} = \frac{1}{C} He^{-\int \frac{du}{H}}.$$

Отже, гладкий розв'язок $B(u)$ існує тільки у випадку, коли $H(u)$ має нуль першого порядку, тобто

$$H(u) = \lambda u, \quad \lambda \neq 0.$$

Тоді

$$\psi(u) = Cu^{-\frac{1}{\lambda}},$$

і

$$B = \frac{\lambda}{C} u^{1+\frac{1}{\lambda}}.$$

Отже, для того щоб функція $B(u)$ була гладкою в нулі показник степеня $(1 + \frac{1}{\lambda})$ повинен бути натуральним числом.

Нехай $n = 1 + \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{N}$, тоді

$$\lambda = \frac{1}{n-1}, \qquad H(u) = \frac{u}{n-1}, \qquad B(u) = Cu^n,$$

$n = 0, 2, 3, \ldots$. Масштабні перетворення

$$u \mapsto tu, \quad t \neq 0,$$

зберігають векторне поле $H(u)\partial_u$, але переводять поле

$$B(u)\partial_u = Cu^n \partial_u$$

в поле $Ct^{n-1}u^n\partial_u$. Тому, залежно від парності n, векторне поле $B(u)\partial_u$ може бути переведене в поле $u^n\partial_u$, якщо n - парне, або в поле $\pm u^n\partial_u$, якщо n - непарне.

Інакше кажучи, ми одержуємо наступні нормальні форми:

$$\overline{H} = x\partial_x + \frac{u}{n-1}\partial_u, \qquad \overline{Y} = x^2\partial_x + (u^n + \frac{2ux}{n-1})\partial_u,$$

якщо n - парне, і

$$\overline{H} = x\partial_x + \frac{u}{n-1}\partial_u, \qquad \overline{Y} = x^2\partial_x + (\pm u^n + \frac{2ux}{n-1})\partial_u,$$

якщо n — непарне, і $n \neq 1$.

Для того, щоб виключити з розгляду випадки плоских векторних полів (тобто випадки, коли функція $H(u)$ — плоска в нулі) ми обмежимося тільки геометричними величинами кінцевого порядку, тобто тими випадками, коли функція $H(u)$ має нуль кінцевого порядку. Для таких величин ми одержуємо наступний класифікаційний результат.

Теорема 5. *Проективні геометричні величини кінцевого порядку в околі точки (0,0) локально еквівалентні, відносно псевдогрупи пошарових точкових перетворень, геометричним величинам, що відповідають поданням алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ з наступного списку:*

$T_1)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x$, $\overline{H} = x\partial_x$,

$S_1)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x + 2x\partial_u$, $\overline{H} = x\partial_x + \partial_u$,

$S_2)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x + 2\lambda x\partial_u$, $\overline{H} = x\partial_x + \lambda u\partial_u$, *де* $\lambda \neq 0$.

$S_3)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x + 2xu^{2k}\partial_u$, $\overline{H} = x\partial_x + u^{2k}\partial_u$, *де* $k \in \mathbb{N}$.

$S_4)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x \pm 2xu^{2k+1}\partial_u$, $\overline{H} = x\partial_x \pm u^{2k+1}\partial_u$, *де* $k \in \mathbb{N}$.

$S_5)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x + \left(\frac{2ux}{2k-1} + u^{2k}\right)\partial_u$, $\overline{H} = x\partial_x + \frac{u}{2k-1}\partial_u$, *де* $k \in \mathbb{N}$.

$S_6)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x + \left(\frac{ux}{k} \pm u^{2k+1}\right)\partial_u$, $\overline{H} = x\partial_x + \frac{u}{2k}\partial_u$, *де* $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$.

$R_\pm)$ $\overline{X} = \partial_x$, $\overline{Y} = x^2\partial_x + (2x \pm e^u)\partial_u$, $\overline{H} = x\partial_x + \partial_u$,

5. Застосування до диференціальних рівнянь

У цьому розділі ми обговоримо застосування описаних вище структур алгебр диференціальних інваріантів до звичайних диференціальних рівнянь. Насамперед відзначимо, що функція φ, що входить в опис $sl_2(\mathbb{R})$-подань класів R, S, T, є першим інтегралом векторного поля $\overline{X}$. З іншого боку, співвідношення $[\overline{H}, \overline{X}] = \overline{X}$ показує, що розподіл на площині $\mathbb{R}^2$, породжуваний векторним полем $\overline{X}$, допускає симетрію. Для подань класів R і S векторні поля $\overline{X}$, $\overline{H}$ лінійно незалежні, і тому інтеграли $\overline{X}$, можуть бути знайдені квадратурами [10]. Тим самим дія групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$ для подань класів R і S знаходиться квадратурами. Для подань класу T це справедливо, якщо відомо перший інтеграл векторного поля $\overline{X}$.

5.1. **Проективні геометричні величини класу** (T)**.** У цьому випадку кожний диференціальний інваріант

$$F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \ldots, \frac{D^kJ}{DI^k}\right)$$

порядку $(k+3)$ визначає звичайне диференціальне рівняння

$$F\left(I, J, \frac{DJ}{DI}, \ldots, \frac{D^kJ}{DI^k}\right) = const. \tag{14}$$

Алгебра Лі $sl_2(\mathbb{R})$, разом з поданням класу T, є алгеброю точкових симетрій (14). Ми будемо припускати, що перші інтеграли векторного поля $\overline{X}$ відомі, і тому відома дія групи $SL_2(\mathbb{R})$. Це означає, що для розв'язків (14) загального положення, тобто таких розв'язків, які не є інваріантними щодо ненульових елементів алгебри $sl_2(\mathbb{R})$, ми можемо за допомогою квадратур вказати 3 - параметричне сімейство розв'язків (14). А саме, $sl_2(\mathbb{R})$-орбіту обраного розв'язку.

Припустимо, що рівняння (14), як диференціальне рівняння в похідних Трессе, має розв'язок:

$$J = F(I). \tag{15}$$

Це співвідношення можна розглядати, як диференціальне рівняння $J - F(I) = 0 \subset J^3(\pi)$ 3-го порядку для проективних геометричних величин класу T. Розмір простору розв'язків такого рівняння дорівнює 3, і тому знання одного частинного розв'язку разом з $SL_2(\mathbb{R})$-дією, дозволяє знайти загальний розв'язок рівняння (15).

Вибравши координати (x, u) таким чином, щоб $\varphi(x, u) = u$, ми можемо записати це рівняння у вигляді:

$$\widetilde{S}(y) = F(y), \tag{16}$$

де

$$\widetilde{S}(y) = \frac{y'y''' - \frac{3}{2}y''^2}{y'^4},$$

та $u = y(x)$. Оскільки $y' \neq 0$, то, принаймні локально, ми можемо перейти до оберненої функції $x = x(y)$.

Неважко перевірити, що

$$\widetilde{S}(y) = -S(x),$$

де $S(x) = \frac{x'x''' - \frac{3}{2}x''^2}{x'^2}$ — похідна Шварца, тому рівняння (16) для оберненої функції $x = x(y)$ має вигляд

$$S(x) = -F(y). \tag{17}$$

З іншого боку, теорема Шварца [8] стверджує, що загальний розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$x(y) = \frac{z_1(y)}{z_2(y)},$$

де $z_1(y)$ й $z_2(y)$ - лінійно незалежні розв'язки лінійного рівняння Шрьодінгера:

$$z'' = \frac{1}{2}F(y)z.$$

Таким чином, інтегрування диференціальних рівнянь виду (15) еквівалентно інтегруванню лінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом $-\frac{1}{2}F$. Зокрема, якщо потенціал інтегруємо (у змісті [6]), то інтегрування (15) може бути зведене до квадратур. Це наприклад так, коли потенціал є розв'язком стаціонарного рівняння Кортвега-де Вріза, або його вищих аналогів [12].

Твердження 1. *Припустимо, що диференціальне рівняння* (14)*, для проективних величин класу T, як диференціальне рівняння в похідних Трессе, є стаціонарним рівнянням Кортвега-де Вріза, або його вищим аналогом. Тоді рівняння (14), як рівняння на проективні геометричні величини, інтегрується у квадратурах.*

Приклад 2. *Диференціальне рівняння 6-ого порядку*

$$u_1^3(u_1u_6 - 15u_2u_5) + u_1^2(99u_2^2 - 16u_1u_3)u_4 +$$

$$+ u_1u_2u_3(96u_1u_3 - 390u_2^2) + 234u_2^5 = 0$$

допускає $sl_2(\mathbb{R})$-алгебру симетрій класу T і $\varphi = u$. Якщо записати його в диференціальних інваріантах, то воно зводиться до рівняння Кортвега-де Вріза:

$$\frac{D^3J}{DI^3} + 6J\frac{DJ}{DI} = 0$$

і тому інтегрується у квадратурах.

5.2. **Проективні геометричні величини класів(R) и (S).** Для геометричних величин класів (R) і (S) кожний диференціальний інваріант

$$F(J, \nabla J, \ldots, \nabla^k J)$$

визначає диференціальне рівняння порядку $(k+2)$

$$F(J, \nabla J, \ldots, \nabla^k J) = const, \tag{18}$$

яке допускає алгебру Лі $sl_2(\mathbb{R})$, як алгебру точкових симетрій.

Зауважимо, що у випадку геометричних величин класів (R) і (S) дія алгебри Лі $sl_2(\mathbb{R})$ інтегрується у квадратурах, і тим самим дія групи Лі $SL_2(\mathbb{R})$ може бути знайдена у квадратурах.

Тому, диференціальні рівняння 3-го порядку

$$F(J, \nabla J) = C \tag{19}$$

можуть бути проінтегровані у квадратурах, якщо відомі частинні розв'язки (19).

Такі розв'язки можна знайти таким способом.

Диференціальні рівняння 2-ого порядку

$$J = C_1 \tag{20}$$

допускають 3-мірну алгебру симетрій $sl_2(\mathbb{R})$, і тому будь-яка 2-мірна розв'язна підалгебра (скажемо, підалгебра, що породжена $\overline{X}$ і $\overline{H}$) дозволяє проінтегрувати (20) у квадратурах [10].

Тому, ми можемо шукати частинні розв'язки рівняння (19) серед розв'язків рівнянь (20), за умови, що постійні C і C_1 зв'язані співвідношенням:

$$F(C_1, 0) = C.$$

Метод інтегрування загальних рівнянь (18) полягає в знаходженні загального розв'язку (18), розглянутого як рівняння щодо інваріантного диференціювання ∇, у вигляді (20).

Для цього введемо проективний параметр s, що назвемо проективним параметром, так, щоб $\nabla = \frac{d}{ds}$. Тоді рівняння (18) можна формально записати у вигляді:

$$F\left(J, \frac{dJ}{ds}, \dots, \frac{d^k J}{ds^k}\right) = C. \tag{21}$$

Припустимо, що $J = f(s)$ є розв'язком (21), тоді, диференціюючи, одержуємо

$$J = f(s), \qquad \nabla J = f'(s),$$

і виключаючи s, приходимо до рівняння виду (20), що вже інтегрується у квадратурах.

Приклад 3. *Класичні рівняння Чазі (Chazy) (див. наприклад [7]) мають вигляд (19) для випадку проективних геометричних величин класу (R), при відповідному виборі функції φ*

й параметра β. Тому рівняння виду (19) як для геометричних величин класу (R) так і для величин класу (T) ми називаємо узагальненими рівняннями Чазі. Як було показано вище ці рівняння інтегруються у квадратурах, якщо рівняння $F(C_1, 0) = C$ мають розв'язки відносно постійної C_1.

Література

[1] *Д. В. Алексеевский, А. М. Виноградов, В. В. Лычагин.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. // Геометрия-1, Т.28. — Москва, — 1988.

[2] *О. Веблен, Дж. Уайтхед.* Основания дифференциальной геометрии // М., ИL , — 1949.

[3] *Ф. Клейн.* Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований // В кн.: Об основаниях геометрии, Pp.399–434.

[4] *Н. Г. Коновенко.* Алгебры дифференциальных инвариантов на проективной прямой// Геометрия в Астрахани - 2007, Тезисы докладов II Международного семинара "Симметрии: теоретический и методический аспекты", Изд. дом "Астраханский университет", – 2007, Pp.33–35.

[5] *Н. Г. Коновенко.* Алгебры дифференциальных инвариантов геометрических величин на аффинной прямой // в печати.

[6] *И. С. Красильщик, В. В. Лычагин, А. В. Виноградов.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений // Москва, "Наука", — 1986.

[7] *P. A. Clarkson, P. J. Olver.* Symmetry and Chazy equation. // Journal of Diff. equations, vol. 124 — 1996, Pp. 225-246.

[8] *E. Hill.* Ordinary Differential Equations in Complex Domain //, Jonh Willey, N.Y. — 1976.

[9] *A. Kumpera.* Invariants differentiels d'un pseudogroupe de Lie. I-II. // J. Differential Geometry **10** (1975), no. 2, 289–345; **10** (1975), no. 3, Pp.347–416.

[10] *A. Kushner, V. Lychagin, V. Roubtsov.* Contact geometry and non-linear differential equations // Cambridge University Press — 2007.

[11] *S. Lie.* Klassifikation und Integration von gewöhnlichen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten I,II // Math. Ann. **32** (1888) Pp.213-281.

[12] *V. V. Lychagin, O. V. Lychagina.* Finite dimensional dynamics for evolutionary equations // Nonlinear Dynamics (2007) **48** Pp.29-48.

[13] *P. Olver.* Applications of Lie groups to differential equations // Graduate Texts in Mathematics, **107**, Springer-Verlag, New York — 1986.

[14] *L. V. Ovsiannikov.* Group analysis of differential equations // Russian: Nauka, Moscow — 1978; Engl. transl.: Academic Press, New York — 1982.

[15] *A. Tresse.* Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations// Acta Math. **18** — 1894, 1—88.