Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 183-194

В. И. Паньженский

Пензенский государственный педагогический университет, Пенза

E-mail: Sorokina_m@list.ru

Римановы пространства постоянной кривизны с кручением

В настоящей работе нами доказано, что среди всех римановых пространств постоянной секционной кривизны только трехмерные пространства имеют кручение, инвариантное относительно группы движений. Тензор кручения в этих пространствах ковариантно постоянен и определяет форму кручения. Отношение интеграла от этой формы по ограниченной области к ее объему есть величина постоянная, определяющая кручение пространства. Вводятся понятия объемного кручения и скалярного кручения.

Ключевые слова: *риманово пространство, тензор кручения*

1. Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, g — риманова метрика на M, ∇ — связность Леви-Чивита, $\widetilde{\nabla}$ — метрическая связность с кручением: $\widetilde{\nabla}g = 0$, S — тензор кручения связности $\widetilde{\nabla}$, T — тензор деформации связности ∇. Если (x^i) — локальные координаты на M, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ — естественный локальный базис векторных полей и $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$, $\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \widetilde{\Gamma}^k_{ij}\partial_k$, $S^k_{ij} = \widetilde{\Gamma}^k_{ij} - \widetilde{\Gamma}^k_{ji}$, $T^k_{ij} = \widetilde{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$, то, очевидно, имеем:

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \widetilde{\Gamma}^k_{(ij)} + \frac{1}{2}S^k_{ij}, \widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij}, S^k_{ij} + S^k_{ji} = 0.$$

Кроме того согласованность связности $\widetilde{\nabla}$ с метрикой g имеет место тогда и только тогда, когда компоненты $T_{ijk} = T_{ij}{}^p g_{kp}$ тензора деформации кососимметричны по последним двум индексам. Действительно, в локальных координатах имеем

$$\partial_i g_{jk} - g_{pk}\widetilde{\Gamma}^p_{ij} - g_{jp}\widetilde{\Gamma}^p_{ik} = 0 \qquad (1)$$

или
$$\partial_i g_{jk} - g_{pk}\Gamma^p_{ij} - g_{jp}\Gamma^p_{ik} - g_{pk}T^p_{ij} - g_{jp}T^p_{ik} = 0,$$
откуда
$$g_{pk}T_{ij}{}^p + g_{jp}T_{ik}{}^p = 0,$$
т.е.
$$T_{ijk} + T_{ikj} = 0,$$
что и доказывает наше утверждение. Циклируя (1) получим еще два равенства
$$\partial_j g_{ki} - g_{pi}\widetilde{\Gamma}^p_{jk} - g_{kp}\widetilde{\Gamma}^p_{ji} = 0,$$
$$\partial_k g_{ij} - g_{pj}\widetilde{\Gamma}^p_{ki} - g_{ip}\widetilde{\Gamma}^p_{kj} = 0.$$
Складывая два первых равенства и вычитая последнее, получим:
$$(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) =$$
$$= g_{pk}(\widetilde{\Gamma}^p_{ij} + \widetilde{\Gamma}^p_{ji}) + g_{jp}(\widetilde{\Gamma}^p_{ik} - \widetilde{\Gamma}^p_{ki}) + g_{ip}(\widetilde{\Gamma}^p_{jk} - \widetilde{\Gamma}^p_{kj}),$$
или
$$g_{pk}(\widetilde{\Gamma}^p_{ij} + \widetilde{\Gamma}^p_{ij} + S^p_{ji}) = (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) + g_{jp}S^p_{ki} + g_{ip}S^p_{kj},$$
откуда
$$2g_{pk}\widetilde{\Gamma}^p_{ij} = (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) + g_{pk}S^p_{ij} + g_{jp}S^p_{ki} + g_{ip}S^p_{kj},$$
поэтому
$$g_{pk}\widetilde{\Gamma}^p_{ij} = \Gamma_{ijk} + \frac{1}{2}(S_{ijk} + S_{kij} + S_{kji})$$
и
$$\widetilde{\Gamma}^l_{ij} = \Gamma^l_{ij} + \frac{1}{2}(S_{ij}{}^l + S^l{}_{ij} + S^l{}_{ji}).$$

Отсюда получаем выражение тензора деформации через тензор кручения:
$$T_{ij}{}^k = \frac{1}{2}(S_{ij}{}^k + S^k{}_{ij} + S^k{}_{ji})$$
и
$$T_{ijk} = \frac{1}{2}(S_{ijk} + S_{kij} + S_{kji}). \tag{2}$$

Циклируя (2), получим:

$$T_{jki} = \frac{1}{2}(S_{jki} + S_{ijk} + S_{ikj}).$$

Складывая последние два равенства и учитывая косую симметрию тензора кручения по первым двум индексам, получим выражение тензора кручения через тензор деформации:

$$S_{ijk} = T_{ijk} + T_{jki}.$$

Из приведенных выше равенств следует, что *симметрическая часть связности* $\widetilde{\nabla}$ *совпадает со связностью Леви-Чивита тогда и только тогда, когда компоненты* S_{ijk} *тензора кручения и, следовательно, компоненты* T_{ijk} *тензора деформации, кососимметричны по всем индексам [1]. В этом случае* $T_{ijk} = \frac{1}{2}S_{ijk}$*. Такое кручение назовем каноническим, а 3-форму* $\Omega = S_{ijk}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k (i < j < k)$ *— фундаментальной формой кручения.*

2. Векторное поле $X = \xi^i \partial_i$ является инфинитезимальным движением риманова пространства $V^n = (M, g)$ тогда и только тогда, когда производная Ли вдоль X от метрического тензора равна нулю: $\mathcal{L}_X g = 0$. Как следствие нетрудно получить [2], что и $\mathcal{L}_X \nabla = 0$. Потребуем, чтобы любое движение сохраняло и связность $\widetilde{\nabla}$: $\mathcal{L}_X \widetilde{\nabla} = 0$, что равносильно равенству $\mathcal{L}_X T = 0$ или $\mathcal{L}_X S = 0$.

Уравнения движений (уравнения Киллинга) имеют вид [2]

$$\xi_{ij} + \xi_{ji} = 0, \tag{3}$$

где $\xi_{ij} = \xi_i^p g_{jp}, \quad \xi_i^j = \nabla_i \xi^j$. Равенство нулю производной Ли от тензора деформации запишем в ковариантных производных

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \nabla_i \xi^p T_{pjk} + \nabla_j \xi^p T_{ipk} + \nabla_k \xi^p T_{ijp} = 0$$

или

$$\xi^p \nabla_p T_{ijk} + \xi_{rq}\{\delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp}\} = 0, \tag{4}$$

где δ_i^j — символ Кронекера, g^{ij} — контравариантные компоненты метрического тензора g: $g_{ip}g^{pj} = \delta_i^j$.

Пусть V^n является римановым пространством постоянной секционной кривизны и, следовательно, допускает группу движений G^r размерности $r = n(n+1)/2$. Тогда равенства (4) должны выполняться при любых ξ^p и ξ_{rq}, удовлетворяющих (3). Поэтому из (4) следует

$$\nabla_p T_{ijk} = 0 \tag{5}$$

и

$$\begin{gathered}\delta_i^r g^{qp} T_{pjk} + \delta_j^r g^{qp} T_{ipk} + \delta_k^r g^{qp} T_{ijp} - \\ -\delta_i^q g^{rp} T_{pjk} - \delta_j^q g^{rp} T_{ipk} - \delta_k^q g^{rp} T_{ijp} = 0\end{gathered} \tag{6}$$

Умножая (6) на $g_{lr}g_{mq}$ и учитывая косую симметрию компонент тензора деформации по последним двум индексам, получаем равносильные (6) соотношения:

$$g_{il}T_{mjk} - g_{jl}T_{ikm} + g_{kl}T_{ijm} - g_{im}T_{ljk} + g_{jm}T_{ikl} - g_{km}T_{ijl} = 0. \tag{7}$$

Лемма 1. *Соотношения (7) являются условием интегрируемости системы дифференциальных уравнений (5).*

Доказательство. Уравнения (5) имеют вид

$$\partial_p T_{ijk} = T_{sjk}\Gamma^s_{pi} + T_{isk}\Gamma^s_{pj} + T_{ijs}\Gamma^s_{pk} \tag{8}$$

Дифференцируя (8) и учитывая, что $\partial_{pq}T_{ijk} = \partial_{qp}T_{ijk}$, получим

$$\begin{gathered}\partial_q T_{sjk}\Gamma^s_{pi} + T_{sjk}\partial_q\Gamma^s_{pi} + \partial_q T_{isk}\Gamma^s_{pj} + \\ +T_{isk}\partial_q\Gamma^s_{pj} + \partial_q T_{ijs}\Gamma^s_{pk} + T_{ijs}\partial_q\Gamma^s_{pk} = \\ = \partial_p T_{sjk}\Gamma^s_{pi} + T_{sjk}\partial_p\Gamma^s_{pi} + \partial_p T_{isk}\Gamma^s_{pj} + \\ T_{isk}\partial_p\Gamma^s_{pj} + \partial_p T_{ijs}\Gamma^s_{pk} + T_{ijs}\partial_p\Gamma^s_{pk}.\end{gathered} \tag{9}$$

Принимая во внимание (8) и выражение

$$R^l_{ijk} = \partial_i\Gamma^l_{jk} - \partial_j\Gamma^l_{ik} + \Gamma^l_{ip}\Gamma^p_{jk} - \Gamma^l_{jp}\Gamma^p_{ik}$$

для компонент тензора кривизны, соотношения (9) приводятся к виду

$$R^s_{qpi}T_{sjk} + R^s_{qpj}T_{isk} + R^s_{qpk}T_{ijs} = 0 \tag{10}$$

Так как риманово пространство V^n имеет постоянную секционную кривизну, то

$$R^s_{qpi} = k(\delta^s_q g_{pi} - \delta^s_p g_{qi}), \tag{11}$$

где k — кривизна пространства. Подставляя (11) в (10), получим

$$k(g_{pi}T_{qik} - g_{qi}T_{pjk} + g_{pj}T_{iqk} - g_{qj}T_{ipk} + g_{pk}T_{ijq} - g_{qk}T_{ijp}) = 0 \tag{12}$$

Если $k = 0$, то $R^s_{qpi} = 0$ и условия интегрируемости уравнений (5) выполняются тождественно. Если $k \neq 0$, то из (12), учитывая косую симметрию компонент тензора деформации по последним двум индексам, немедленно следует (7). □

3. Рассмотрим подробнее условия интегрируемости (7). Перепишем (7), умножив на $g^{ql}g^{rm}$:

$$\delta^q_i T^r{}_{jk} - \delta^q_j T_{ik}{}^r + \delta^q_k T_{ij}{}^r - \delta^r_i T^q{}_{jk} + \delta^r_j T_{ik}{}^q - \delta^r_k T_{ij}{}^q = 0, \tag{13}$$

где $T^r{}_{jk} = T_{sjk}g^{sr}, T_{ik}{}^r = T_{iks}g^{sr}$. В (13) свернем индексы q и i. В результате получим:

$$nT^r{}_{jk} - T_{jk}{}^r + T_{kj}{}^r - T^r{}_{jk} + \delta^r_j T_{*k}{}^* - \delta^r_k T_{*j}{}^* = 0 \tag{14}$$

или

$$(n-1)T^r{}_{jk} - T_{jk}{}^r + T_{kj}{}^r + \delta^r_j T_{*k}{}^* - \delta^r_k T_{*j}{}^* = 0, \tag{15}$$

где $T^*_{*k} = T^s_{sk}$. Умножив (15) на g_{ir}, получим:

$$(n-1)T_{ijk} - T_{jki} + T_{kji} + g_{ji}T_{*k}{}^* - g_{ki}T_{*j}{}^* = 0. \tag{16}$$

Циклируя (16), получим еще два равенства

$$(n-1)T_{jki} - T_{kij} + T_{ikj} + g_{kj}T_{*i}{}^* - g_{ij}T_{*k}{}^* = 0 \tag{17}$$

$$(n-1)T_{kij} - T_{ijk} + T_{jik} + g_{ik}T_{*j}{}^* - g_{jk}T_{*i}{}^* = 0 \tag{18}$$

Складывая (16), (17) и (18), получим

$$(n-1)(T_{ijk}+T_{jki}+T_{kij})-T_{jki}-T_{kij}-T_{ijk}+T_{kji}+T_{ikj}+T_{jik}=0 \tag{19}$$

или, учитывая косую симметрию тензора деформации,

$$(n-3)(T_{ijk}+T_{jki}+T_{kij})=0, \tag{20}$$

откуда для $n \neq 3$

$$T_{ijk}+T_{jki}+T_{kij}=0 \qquad (21).$$

Учитывая (21) равенства (16) примут вид

$$nT_{ijk}+g_{ji}T_{*k}{}^{*}-g_{ki}T_{*j}{}^{*}=0. \tag{22}$$

Умножая (22) на g^{kl}, получим

$$nT^{l}_{ij}+g_{ji}g^{kl}T_{*k}{}^{*}-\delta^{l}_{i}T_{*j}{}^{*}=0 \qquad (23).$$

В (23) свернем индексы l и i. В результате будем иметь: $nT_{*j}{}^{*}+T_{*j}{}^{*}-nT_{*j}{}^{*}=0$, откуда $T_{*j}{}^{*}=0$. Теперь (16) примет вид: $(n-1)T_{ijk}-T_{jki}+T_{kji}=0$ или, учитывая опять (21), $nT_{ijk}=0$, т.е $T_{ijk}=0$ и, следовательно, $S_{ijk}=0$. Таким образом справедлива

Теорема 1. *Если риманово пространство V^n, $n \neq 3$, допускает группу движений максимальной размерности, то оно не имеет инвариантного кручения.*

4. Рассмотрим случай $n=3$. Существует система координат, в которой метрика риманова пространства V^3 постоянной кривизны имеет вид [2]

$$ds^2=\frac{dx^{1\,2}+dx^{2\,2}+dx^{3\,2}}{\left[1+\frac{k}{4}(x^{1\,2}+x^{2\,2}+x^{3\,2})\right]^2}. \tag{24}$$

Имеет место

Лемма 2. *Условия интегрируемости* (7) *для метрики* (24) *выполняются тождественно тогда и только тогда, когда* *тензор деформации T_{ijk} кососимметричен по всем индексам, т.е когда кручение является каноническим.*

Доказательство. Подставив компоненты

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\left[1 + \frac{k}{4}({x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2)\right]^2} \tag{25}$$

метрического тензора в (7), получим

$$\delta_{il}T_{mjk} - \delta_{jl}T_{ikm} + \delta_{kl}T_{ijm} - \delta_{im}T_{ljk} + \delta_{jm}T_{ikl} - \delta_{km}T_{ijl} = 0 \tag{26}$$

Все индексы в (26) принимают значения 1,2,3. Поэтому (26) содержит 3^5 уравнений. Теперь непосредственной проверкой, выписывая каждое из этих уравнений, убеждаемся в справедливости нашего утверждения. □

Далее, интегрируя уравнения движений

$$\xi^p \partial_p g_{ij} + \partial_i \xi^p g_{pj} + \partial_j \xi^p g_{ip} = 0 \tag{27}$$

для метрики (24), находим базисные векторные поля (операторы) алгебры Ли инфинитезимальных движений:

$$X_1 = [1 - \frac{k}{4}(-{x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2)]\partial_1 + \frac{k}{2}x^1x^2\partial_2 + \frac{k}{2}x^1x^3\partial_3,$$
$$X_2 = \frac{k}{2}x^2x^1\partial_1 + [1 - \frac{k}{4}({x^1}^2 - {x^2}^2 + {x^3}^2)]\partial_2 + \frac{k}{2}x^2x^3\partial_3,$$
$$X_3 = \frac{k}{2}x^3x^1\partial_1 + \frac{k}{2}x^3x^2\partial_2 + [1 - \frac{k}{4}({x^1}^2 + {x^2}^2 - {x^3}^2)]\partial_3,$$
$$X_{12} = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2,\ X_{13} = -x^3\partial_1 + x^1\partial_3,\ X_{23} = -x^3\partial_2 + x^2\partial_3.$$

Для каждого оператора X выпишем уравнения инвариантности тензора деформации ($\mathcal{L}_X T = 0$):

$$\xi^p \partial_p T_{ijk} + \partial_i \xi^p T_{pjk} + \partial_j \xi^p T_{ipk} + \partial_k \xi^p T_{ijp} = 0 \tag{28}$$

В результате получим следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно неизвестных функций T_{ijk}:

$$\left[1-\frac{k}{4}(-{x^1}^2+{x^2}^2+{x^3}^2)\right]\partial_1 T_{ijk}+\frac{k}{2}x^1x^2\partial_2 T_{ijk}+\frac{k}{2}x^1x^3\partial_3 T_{ijk}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^1\delta_i^1-x^2\delta_i^2-x^3\delta_i^3)T_{1jk}+\frac{k}{2}(x^2\delta_i^1+x^1\delta_i^2)T_{2jk}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^3\delta_i^1+x^1\delta_i^3)T_{3jk}+\frac{k}{2}(x^1\delta_j^1-x^2\delta_j^2-x^3\delta_j^3)T_{i1k}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^2\delta_j^1+x^1\delta_j^2)T_{i2k}+\frac{k}{2}(x^3\delta_j^1+x^1\delta_j^3)T_{i3k}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^1\delta_k^1-x^2\delta_k^2-x^3\delta_k^3)T_{ij1}+\frac{k}{2}(x^2\delta_k^1+x^1\delta_k^2)T_{ij2}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^3\delta_k^1+x^1\delta_k^3)T_{ij3}=0,$$

$$\frac{k}{2}x^2x^1\partial_1 T_{ijk}+\left[1-\frac{k}{4}({x^1}^2-{x^2}^2+{x^3}^2)\right]\partial_2 T_{ijk}+\frac{k}{2}x^2x^3\partial_3 T_{ijk}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^2\delta_i^1+x^1\delta_i^2)T_{1jk}+\frac{k}{2}(-x^1\delta_i^1+x^2\delta_i^2-x^3\delta_i^3)T_{2jk}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^3\delta_i^2+x^2\delta_i^3)T_{3jk}+\frac{k}{2}(x^2\delta_j^1+x^1\delta_j^2)T_{i1k}+$$
$$+\frac{k}{2}(-x^1\delta_j^1+x^2\delta_j^2-x^3\delta_j^3)T_{i2k}+\frac{k}{2}(x^3\delta_j^2+x^2\delta_j^3)T_{i3k}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^2\delta_k^1+x^1\delta_k^2)T_{ij1}+\frac{k}{2}(-x^1\delta_k^1+x^2\delta_k^2-x^3\delta_k^3)T_{ij2}+$$
$$+\frac{k}{2}(x^3\delta_k^2+x^2\delta_k^3)T_{ij3}=0,$$

$$-x^2\partial_1 T_{ijk}+x^1\partial_2 T_{ijk}-\delta_i^2T_{1jk}+\delta_i^1T_{2jk}-\delta_j^2T_{i1k}+$$
$$+\delta_j^1T_{i2k}-\delta_k^2T_{ij1}+\delta_k^1T_{ij2}=0,$$

$$-x^3\partial_1 T_{ijk}+x^1\partial_3 T_{ijk}-\delta_i^3T_{1jk}+\delta_i^1T_{3jk}-\delta_j^3T_{i1k}+$$
$$+\delta_j^1T_{i3k}-\delta_k^3T_{ij1}+\delta_k^1T_{ij3}=0,$$

$$\frac{k}{2}x^3x^1\partial_1 T_{ijk} + \frac{k}{2}x^3x^2\partial_2 T_{ijk} + \left[1 - \frac{k}{4}({x^1}^2 + {x^2}^2 - {x^3}^2)\right]\partial_3 T_{ijk} +$$
$$+ \frac{k}{2}(x^3\delta_i^1 + x^1\delta_i^3)T_{1jk} + \frac{k}{2}(x^3\delta_i^2 + x^2\delta_i^3)T_{2jk} +$$
$$+ \frac{k}{2}(-x^1\delta_i^1 - x^2\delta_i^2 + x^3\delta_i^3)T_{3jk} + \frac{k}{2}(x^3\delta_j^1 + x^1\delta_j^3)T_{i1k} +$$
$$+ \frac{k}{2}(x^3\delta_j^2 + x^2\delta_j^3)T_{i2k} + \frac{k}{2}(-x^1\delta_j^1 - x^2\delta_j^2 + x^3\delta_j^3)T_{i3k} +$$
$$+ (\frac{k}{2}x^3\delta_k^1 + \frac{k}{2}x^1\delta_k^3)T_{ij1} + (\frac{k}{2}x^3\delta_k^2 + \frac{k}{2}x^2\delta_k^3)T_{ij2} +$$
$$+ \frac{k}{2}(-x^1\delta_k^1 - x^2\delta_k^2 + x^3\delta_k^3)T_{ij3} = 0,$$

$$- x^3\partial_2 T_{ijk} + x^2\partial_3 T_{ijk} - \delta_i^3 T_{2jk} + \delta_i^2 T_{3jk} - \delta_j^3 T_{i2k} +$$
$$+ \delta_j^2 T_{i3k} - \delta_k^3 T_{ij2} + \delta_k^2 T_{ij3} = 0.$$

Интегрируя данную систему, находим ее общее решение

$$T_{ijk} = \frac{c_{ijk}}{[1 + \frac{k}{4}({x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2)]^3}, \tag{29}$$

где c_{ijk} — постоянные, из которых, в силу косой симметрии существенной является лишь одна. Нетрудно убедиться, что тензор деформации, как и тензор кручения, ковариантно постоянен.

Таким образом имеет место

Теорема 2. *Трехмерное риманово пространство постоянной кривизны обладает ковариантно постоянным каноническим кручением, инвариантным относительно группы движений.*

5. Обозначив через $s = 2c_{123}$, выпишем фундаментальную форму кручения:

$$\Omega = \frac{s}{[1 + \frac{k}{4}({x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2)]^3} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \tag{30}$$

Пусть D — ограниченная область в пространстве V^3. Тогда инвариантным образом определен интеграл [3] $\upsilon = \int\limits_D \Omega$. С другой стороны, в римановом пространстве определен объем области D интегралом

$$\upsilon_0 = \int\limits_D \Omega_0,$$

где $\Omega_0 = \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$, $g = \det \|g_{ij}\|$. Для метрики (24)

$$\sqrt{g} = [1 + \frac{k}{4}({x^1}^2 + {x^2}^2 + {x^3}^2)]^{-3}.$$

Поэтому отношение $\frac{\upsilon}{\upsilon_0}$ объемов как и отношение $\frac{S_{123}}{\sqrt{g}}$ плотностей есть постоянная величина s, определяющая кручение пространства.

Пусть теперь $V^3 = (M, g)$ — произвольное трехмерное риманово пространство и пусть кроме метрического тензора $g(g_{ij})$ — симметрического тензорного поля на M, задано кососимметрическое тензорное поле $S(S_{ijk})$. Тогда кроме связности Леви-Чивита $\nabla(\Gamma^k_{ij})$ мы имеем метрическую связность

$$\widetilde{\nabla}(\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2} S^k_{ij})$$

с каноническим кручением S. Пусть, как и ранее, D — некоторая ограниченная область в пространстве V^3. Тогда мы можем вычислить интегралы от плотностей S_{123} и $\sqrt{g}$:

$$\upsilon = \int\limits_D S_{123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \upsilon_0 = \int\limits_D \sqrt{g} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

и инвариантным образом определить *объемное кручение* как отношение $\frac{\upsilon}{\upsilon_0}$ и *скалярное кручение* как отношение $\frac{S_{123}}{\sqrt{g}}$ плотностей.

Объемное кручение является функционалом, заданном на множестве всех областей интегрирования, а скалярное кручение есть функция точки.

Таким образом, *если V^3 является римановым пространством постоянной кривизны и кручение инвариантно относительно его группы движений, то его объемное кручение совпадает со скалярным кручением и является постоянной величиной.*

6. Пусть $k=0$. Тогда

$$\widetilde{\Gamma}^3_{12}=\widetilde{\Gamma}^1_{23}=\widetilde{\Gamma}^2_{31}=-\widetilde{\Gamma}^3_{21}=-\widetilde{\Gamma}^1_{32}=-\widetilde{\Gamma}^2_{13}=s,$$

остальные — нули. Уравнения параллельного переноса

$$\frac{dv^k}{dt}+\widetilde{\Gamma}^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}v^j=0$$

вектора $v^k=v^k(t)$ вдоль кривой $x^k=x^k(t)$ примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{dv^1}{dt}+s\left(\frac{dx^2}{dt}v^3-\frac{dx^3}{dt}v^2\right)=0\\
&\frac{dv^2}{dt}+s\left(\frac{dx^3}{dt}v^1-\frac{dx^1}{dt}v^3\right)=0\\
&\frac{dv^3}{dt}+s\left(\frac{dx^1}{dt}v^2-\frac{dx^2}{dt}v^1\right)=0
\end{aligned}\tag{31}$$

Исследуем подробнее параллельное перенесение, например, вектора $v(1,0,0)$ вдоль кривой $x^1=0, x^2=0, x^3=t$, т.е. вдоль оси x^3. Уравнения (31) в этом случае выглядят так:

$$\frac{dv^1}{dt}-sv^2=0,\ \frac{dv^2}{dt}+sv^1=0,\ \frac{dv^3}{dt}=0.\tag{32}$$

Интегрируя эту систему, находим ее общее решение:

$$v^1=\sqrt{c_1^2+c_2^2}\cos(st-\varphi_0),\ v^2=-\sqrt{c_1^2+c_2^2}\sin(st-\varphi_0),\ v^3=c_3,\tag{33}$$

где $\varphi_0=\operatorname{arctg}\frac{c_2}{c_1}$.

Из начальных условий следует, что $c_1=1, c_2=0, c_3=0$. Поэтому конец вектора v описывает винтовую линию

$$\overrightarrow{r}=\overrightarrow{r}\{\cos(st),\sin(st),t\},\tag{34}$$

лежащую на прямом геликоиде, который заметается осью x^1 при параллельном переносе ее вдоль оси x^3.

Список литературы

[1] *Яно К, Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти/ М.– 1957.

[2] *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований/ М. – 1947.

[3] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии/ М. – 1970.