Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 91-122

***А. Г. Кушнер***

*Астраханский государственный университет, Астрахань и Институт проблем управления РАН, Москва*
*E-mail:* kushnera@mail.ru

# Нормальные формы для уравнений Монжа-Ампера: телеграфное уравнение и уравнение Гельмгольца

Приводится решение проблемы локальной контактной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера линейным уравнениям с постоянным коэффициентами. Построены нормальные формы: телеграфное уравнение и уравнение Гельмгольца.

We solve a problem of local contact equivalence of Monge-Ampère equations to linear equations with constant coefficients. We find normal forms for such equations: the telegraph equation and the Helmholtz equation.

**Ключевые слова**: *эффективные дифференциальные формы, инварианты Лапласа, контактные преобразования*

## 1. Введение

Классическое уравнение Монжа-Ампера имеет следующий вид:

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \tag{1}$$

где $A, B, C, D, E$ — функции от независимых переменных $x, y$, неизвестной функции $v = v(x, y)$ и ее первых производных $v_x, v_y$.

Уравнения этого типа на протяжении последних полутора столетий привлекали внимание геометров.

Класс уравнений Монжа-Ампера выделяется из всего многообразия уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения.

Этот факт был известен еще Софусу Ли. В 1870-х и 1880-х годах он изучал проблемы классификации уравнений Монжа-Ампера относительно (псевдо)группы контактных преобразований [21, 22].

Сам Софус Ли нашел условия приведения гиперболических уравнений Монжа-Ампера к волновому уравнению $v_{xy} = 0$ при наличии у них двух промежуточных интегралов[1], но доказательства этого результата он так и не опубликовал. Заметим, однако, что проверка наличия промежуточных интегралов у общего уравнения Монжа-Ампера, а тем более их построение, является не простой задачей.

В 1978 г. Лычагин [24] предложил геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа-Ампера (1).

Основная идея Лычагина [24, 25] заключается в представлении уравнений Монжа-Ампера и их многомерных аналогов дифференциальными формами на пространстве 1-джетов функций на гладком многообразии.

Преимуществом такого подхода перед классическим является редукция порядка пространства джетов: используется более простое пространство 1-джетов $J^1M$ вместо пространства 2-джетов $J^2M$, в котором, будучи уравнениями второго порядка, *ad hoc* должны лежать уравнения Монжа-Ампера.

[1] *Промежуточным интегралом* уравнения Монжа-Ампера называется дифференциальное уравнение первого порядка, каждое решение которого является решением уравнения Монжа-Ампера

Такая интерпретация уравнений Монжа-Ампера позволила по-новому взглянуть на проблему их классификации и послужила толчком к появлению множества работ других авторов (см., например, [6, 11, 29]).

В 1983 году Лычагиным и Рубцовым [27] была решена проблема приводимости невырожденных уравнений (1) к уравнениям Монжа-Ампера с постоянными коэффициентами в случае когда коэффициенты $A, B, C, D, E$ не зависят от переменной $v$. В 1996 г. Туницкий снял это ограничение и решил проблему для уравнений Монжа-Ампера общего вида [29].

Проблема локальной эквивалентности общих уравнений Монжа-Ампера гиперболического, эллиптического и переменного типов, коэффициенты которых не зависят от $v$, была решена в работах Кругликова [4–6] и автора [8–11]. Позднее автор решил эту проблему для уравнений общего вида [12], а также проблему приведения уравнений Монжа-Ампера гиперболического и эллиптического типов контактным преобразованием к линейным уравнениям [13–16].

Подробное описание истории уравнений Монжа-Ампера и их классификации, а также старые и новые результаты, можно найти в монографии [19] и в работе [18].

В предлагаемой работе мы рассматриваем проблему контактной эквивалентности уравнений Монжа-Ампера линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Результаты по гиперболическим уравнениям были анонсированы в работе [17].

Опишем основные идеи работы.

Как известно [26], невырожденные уравнения Монжа-Ампера порождают на пяти-мерном пространстве 1-джетов $J^1\mathbb{R}^2$ три распределения: два двумерных $C_+$ и $C_-$ и одно одномерное $l$. Для гиперболических уравнений эти распределения вещественные, а для эллиптического — комплексные. Прямая сумма подпространств $C_+(a), C_-(a)$ и $l(a)$ в точке $a \in J^1\mathbb{R}^2$ совпадает или со всем касательным пространством $T_aJ^1\mathbb{R}^2$ (для гиперболических уравнений), или с его комплексификацией (для уравнений эллиптических).

Это разложение, в свою очередь, порождает разложение в прямую сумму комплекса де Рама на многообразии 1-джетов. Применяя это разложение, мы построили четыре тензорных поля типа (2,1) на пространстве 1-джетов [12].

Построенные тензорные поля позволяют определить две дифференциальные 2-формы $\lambda_+$ и $\lambda_-$, которые являются контактными инвариантами уравнений.

Примечательно, что коэффициенты этих форм, вычисленных для линейных гиперболических уравнений, представляют собой классические инварианты Лапласа [20]. Поэтому формы $\lambda_+$ и $\lambda_-$ мы называем *формами Лапласа* [13].

Классические инварианты Лапласа имеют давнюю историю. В 1770 г. Эйлер [2] при решении проблемы интегрирования линейных гиперболических уравнений вида

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v \tag{2}$$

ввел функции $h = ab + c - a_x$ и $k = ab + c - b_y$. Эти функции являются относительными инвариантами при преобразованиях независимых переменных $x, y$ и переменной $v$, которые не меняют вида уравнения (2). Такие преобразования имеют следующий вид:

$$(x,y,v) \mapsto (X(x), Y(y), Z_1(x,y)v + Z_2(x,y)), \tag{3}$$

где $X, Y, Z_1, Z_2$ — некоторые гладкие функции. Функции $h$ и $k$ умножаются на $X'(x)Y'(y)$ при таких преобразованиях. Оказалось, что уравнение (2) эквивалентно волновому уравнению

$$v_{xy} = 0$$

тогда и только тогда, когда инварианты $h$ и $k$ равны нулю и в этом случае уравнение (2) может быть проинтегрировано. Если же в нуль обращается только один из этих инвариантов, то дифференциальный оператор, отвечающий правой части уравнения (2), раскладывается в композицию двух дифференциальных операторов первого порядка и уравнение также можно решить.

Позднее, в 1773 г., Лаплас [20] существенно развил идеи Эйлера, создав так называемый "каскадный метод" интегрирования уравнений. Инварианты $h$ и $k$ играют в нем ключевую роль.

В 1890-х годах Дарбу усовершенствовал метод Лапласа и назвал функции $h$ и $k$ *инвариантами Лапласа.* Линейное гиперболическое уравнение может быть решено методом Дарбу в замкнутой форме тогда и только тогда, когда последовательность инвариантов Лапласа, ассоциированная с уравнением, обрывается.

В 2004 г. Ибрагимов [3] описал структуру алгебры дифференциальных инвариантов линейных гиперболических уравнений (2) и показал, что любой их дифференциальный инвариант относительно преобразований (3) является функцией от инвариантов Лапласа и функций, полученных из последних путем применения к ним инвариантных дифференцирований.

Аналоги инвариантов Лапласа для линейных эллиптических уравнений были построены Коттоном в 1990 г. [1].

Подчеркнем, что построенные нами дифференциальные 2-формы $\lambda_+$ и $\lambda_-$, в отличие от классических инвариантов Лапласа и Коттона, являются абсолютными дифференциальными инвариантами относительно контактных преобразований.

## 2. Подход Лычагина к уравнениям Монжа-Ампера

2.1. **Эффективные дифференциальные формы.** Пускай $M$ — $n$-мерное гладкое многообразие, $J^kM$ — многообразие $k$-джетов гладких функций на $M$, а $D(J^kM)$ и $\Omega^s(J^kM)$ —

$C^\infty(J^kM)$-модули векторных полей и дифференциальных $s$-форм на $J^kM$ соответственно. $(2n+1)$-мерное гладкое многообразие 1-джетов $J^1M$ снабжено естественной контактной структурой — распределением Картана

$$C : J^1M \ni a \mapsto C(a) \subset T_a(J^1M),$$

задаваемым дифференциальной 1-формой Картана $U$. Подпространство $C(a) = \ker U_a$ касательного пространства $T_a(J^1M)$ называется *подпространством Картана.*

В канонических локальных координатах Дарбу

$$(q, u, p) = (q_1, \ldots, q_n, u, p_1, \ldots, p_n)$$

на $J^1M$ форма Картана имеет вид

$$U = du - pdq = du - p_1dq_1 - \cdots - p_ndq_n.$$

Ограничение дифференциала формы Картана на подпространство Картана не вырождено на нем и определяет симплектическую структуру $\Omega_a$.

Всякая дифференциальная $n$-форма $\omega \in \Omega^n(J^1M)$ определяет нелинейный дифференциальный оператор

$$\Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Omega^n(M),$$

действующий на функцию $v \in C^\infty(M)$ по следующему правилу [25]:

$$\Delta_\omega(v) = \omega|_{j_1(v)(M)}. \tag{4}$$

Здесь $j_1(v)(M) \subset J^1M$ — график 1-джета $j_1(v)$ и $\omega|_{j_1(v)(M)}$ — ограничение дифференциальной формы $\omega$ на этот график.

Оператор $\Delta_\omega$ называется *оператором Монжа-Ампера,* а уравнение

$$E_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\Delta_\omega(v) = 0\} \subset J^2M$$

— *уравнением Монжа-Ампера.*

Заметим, что соответствие между дифференциальными $n$-формами на $J^1M$ и операторами Монжа-Ампера не является взаимно-однозначным. Для установления взаимно-однозначного соответствия между дифференциальными формами и операторами необходимо ограничиться только так называемыми эффективными формами.

Дифференциальные $n$-формы на $J^1M$, исчезающие на любом интегральном многообразии распределения Картана, и поэтому порождающие нулевой дифференциальный оператор, образуют градуированный идеал $I^* = \bigoplus_{s\geq 0} I^s$ $\left(I^s \subset \Omega^s \left(J^1M\right)\right)$ во внешней алгебре $\Omega^* \left(J^1M\right)$. Элементы фактор-модуля

$$\Omega^s_\varepsilon \left(J^1M\right) = \Omega^s \left(J^1M\right)/I^s.$$

называются *эффективными* $s$-формами ($s \leq n$), а сам модуль — модулем *эффективных дифференциальных форм.*

Имея в виду классические уравнения Монжа-Ампера (1), далее мы ограничимся случаем $n = 2$. Для любого элемента фактор-модуля $\Omega^2_\varepsilon$ может быть выбран единственный представитель $\omega \in \Omega^2 \left(J^1M\right)$ такой, что $X_1 \rfloor \omega = 0$ и $\omega \wedge dU = 0$. Здесь $X_1$ — контактное векторное поле с производящей функцией 1. В канонических координатах Дарбу $X_1 = \partial/\partial u$ и такие представители имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega = {} & E dq_1 \wedge dq_2 + B \left(dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2\right) + \\ & + C dq_1 \wedge dp_2 - A dq_2 \wedge dp_1 + D dp_1 \wedge dp_2, \end{aligned} \tag{5}$$

где $A, B, C, D, E$ — некоторые гладкие функции на $J^1M$.

Дифференциальные формы вида (5) мы также будем называть эффективными.

Заметим, что форме (5) отвечает уравнение (1).

2.2. **Оператор $A_\omega$.** Пусть $\Omega$ — ограничение дифференциала формы Картана на распределение Картана: $\Omega_a = dU|_{C(a)}$. Заметим, что $\Omega$ не является дифференциальной 2-формой на $J^1$, так как этот объект определен только на распределении Картана.

Определим ассоциированный с формой $\omega$ оператор

$$A_\omega : D(C) \mapsto D(C),$$

действующий на модуле векторных полей $D(C)$, которые лежат в распределении Картана [27]:

$$X \rfloor \omega = A_\omega X_a \rfloor \Omega,$$

где $X \in D(C)$ — произвольное векторное поле.

Функция $\mathrm{Pf}(\omega) \in C^\infty\left(J^1 M\right)$, определяемая равенством

$$\mathrm{Pf}(\omega)\Omega \wedge \Omega = \omega \wedge \omega,$$

называется *пфаффианом* формы $\omega$.

Пусть $h$ — не обращающаяся в нуль функция на $J^1M$. Дифференциальные эффективные 2-формы $\omega$ и $h\omega$ определяют одно и то же уравнение Монжа-Ампера, т.е. $E_{h\omega} = E_\omega$. Кроме того, $A_{h\omega} = hA_\omega$ и $\mathrm{Pf}(h\omega) = h^2\,\mathrm{Pf}(\omega)$.

Перечислим основные свойства оператора $A_\omega$.

- Оператор $A_\omega$ симметричен относительно $\Omega$, то есть,

$$\Omega\left(A_\omega X, Y\right) = \Omega\left(X, A_\omega Y\right)$$

  для любых векторных полей $X, Y \in D(C)$;
- Векторные поля $X$, и $A_\omega X \in D(C)$ косоортогональны, то есть

$$\Omega\left(A_\omega X, X\right) = 0.$$

- Квадрат оператора $A_\omega$ скалярен и

$$A_\omega^2 + \mathrm{Pf}\left(\omega\right) = 0. \tag{6}$$

2.3. **Характеристические распределения и прямая сумма распределений.** Подпространство Картана в каждой точке $a \in J^1M$ распадается в прямую сумму собственных подпространств оператора $A_a$: $C(a) = C_+(a) \oplus C_-(a)$, где $C_\pm(a) = \{X \in C(a) | A_a X = \pm X\}$. Мы получаем два 2-мерных распределения на $J^1M$:

$$C_\pm : J^1M \ni a \longmapsto C_\pm(a) \subset C(a).$$

Эти распределения кососортогональны, т.е. $\Omega_a(P_a, Q_a) = 0$ для любых векторов $P_a \in C_+(a)$ и $Q_a \in C_-(a)$. Кроме того, на каждом из подпространств $C_+(a)$ и $C_-(a)$ симплектическая структура $\Omega_a$ не вырождена. Распределения $C_\pm$ называются *характеристическими*. Это определение оправдано тем, для линейных гиперболических уравнений существует естественная проекции этих распределений на плоскость $(x, y)$. Эти проекции одномерны и их интегральные кривые представляют собой обычные характеристики линейных уравнений. Для общих нелинейных уравнений такой естественной проекции не существует.

Заметим, что при умножении 2-формы на $-1$ собственные подпространства оператора $A_a$ меняются местами, так что уравнение Монжа-Ампера порождает разложение подпространства Картана с точностью до перестановки $C_+(a)$ и $C_-(a)$.

Обратно: всякое разложение подпространства Картана $C(a)$ в прямую сумму двух двумерных кососортогональных относительно $\Omega_a$ подпространств, на каждом из которых симплектическая структура не вырождена, порождает некоторое гиперболическое уравнение Монжа-Ампера.

Обозначим через $C_\pm^{(k)}$ их $k$-е производные.[1] Первые производные характеристических распределений являются 3-мерными распределениями, а их пересечение порождает 1-мерное распределение

$$l : J^1M \ni a \mapsto l(a) = C_+^{(1)}(a) \cap C_-^{(1)}(a) \subset T_a(J^1M),$$

которое не лежит в распределении Картана: $U_a(Z_a) \neq 0$ для любого вектора $Z_a \in l(a)$.

[1] Первая производная $P^{(1)}$ распределения $P = \mathcal{F}\langle X_1, \dots, X_n\rangle$ — это распределение, порожденное векторными полями $X_1, \dots, X_n$ и их всевозможными коммутаторами. Далее — по индукции.

Таким образом, в каждой точке $a \in J^1M$ касательное пространство к многообразию 1-джетов распадается в прямую сумму трех подпространств [26]:

$$T_a(J^1M) = C_+(a) \oplus l(a) \oplus C_-(a).$$

Поэтому гиперболическое уравнение Монжа-Ампера можно рассматривать как прямую сумму прямую сумму трех распределений:

$$\mathcal{P} = C_- \oplus l \oplus C_+.$$

Пусть теперь $E_\omega$ — эллиптическое уравнение Монжа-Ампера и форма $\omega$ нормирована. Этот случай сходен с гиперболическим, только вместо касательного пространства $T_a(J^1M)$ нужно рассматривать его комплексификацию $T_a^{\mathbb{C}}(J^1M)$. Комплексификация касательного пространства распадается в прямую сумму трех комплексных подпространств:

$$T_a^{\mathbb{C}}(J^1M) = C_+(a) \oplus l(a) \oplus C_-(a),$$

где $C_\pm(a)$ — собственные комплексные подпространства оператора $A_a$, отвечающие собственным значениям $\pm\iota$ ($\iota = \sqrt{-1}$) и $l(a) = C_+^{(1)}(a) \cap C_-^{(1)}(a)$ — комплексная прямая. Отметим, что подпространства $C_+(a)$ и $C_-(a)$ комплексно сопряжены: $\overline{C_+(a)} = C_-(a)$, а комплексная прямая $l(a)$ порождена действительным вектором: $l(a) = \mathbb{C}Z_a$, $Z_a \in T_a(J^1M)$.

Таким образом, эллиптическое уравнение Монжа-Ампера представляет собой прямую сумму комплексных распределений.

## 3. Дифференциальные тензорные инварианты уравнений

3.1. **Разложение комплекса де Рама.** Рассмотрим гиперболическое уравнение Монжа-Апмера.

Обозначим распределения $C_+, l$ и $C_-$ через $P_1, P_2$ и $P_3$ соответственно. Пусть $D_j$ — модуль векторных полей из распределения $P_j$. Пространство внешних $s$-форм на $T_a(J^1M)$ распадается в прямую сумму

$$\Lambda^s \left(T_a^*(J^1M)\right) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Lambda^{\mathbf{k}} \left(T_a^*(J^1M)\right), \tag{7}$$

где $\mathbf{k}$ — мультииндекс, $\mathbf{k} =(k_1, k_2, k_3)$, $k_i \in \{0, 1, \ldots, \dim P_i\}$, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$,

$$\Lambda^{\mathbf{k}} \left(T_a^*(J^1M)\right) = \left\{ \sum_{j_1+j_2+j_3=|\mathbf{k}|} \theta_{j_1} \wedge \theta_{j_2} \wedge \theta_{j_3}, \text{ где } \theta_{j_i} \in \Lambda^{k_i}(P_i(a)^*) \right\}$$

и $\Lambda^s(P_i(a)^*)$ — векторное пространство внешних $s$-форм на $P_i(a)$.

Пусть $\Omega^s(P_i)$ — модуль гладких сечений векторного расслоения

$$\pi_i : \bigcup_{a \in J^1M} \Lambda^s(P_i(a)^*) \to J^1M.$$

Этот модуль естественным образом отождествляется с подмодулем

$$\Omega_i^s = \{\alpha \in \Omega^s(J^1M)|\ X \rfloor \alpha = 0\ \forall\, X \in D_j,\ j \neq i\} \subset \Omega^s(J^1M)$$

и в дальнейшем мы не будем делать различий между $\Omega^s(P_i)$ и $\Omega_i^s$.

Разложение (7) в свою очередь влечет разложение в прямую сумму модуля дифференциальных $s$-форм на $J^1M$:

$$\Omega^s \left(J^1M\right) = \bigoplus_{|\mathbf{k}|=s} \Omega^{\mathbf{k}}.$$

Здесь

$$\Omega^{\mathbf{k}} = \left\{ \sum_{j_1+j_2+j_3=|\mathbf{k}|} \alpha_{j_1} \wedge \alpha_{j_2} \wedge \alpha_{j_3}, \text{ где } \alpha_{j_i} \in \Omega_i^{k_i} \right\} \subset \bigotimes_{i=1}^{3} \Omega_i^{k_i}.$$

Внешний дифференциал также распадается в прямую сумму

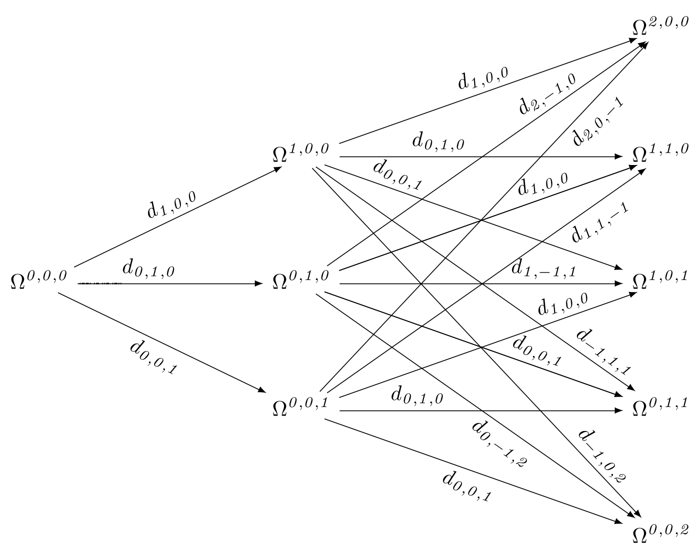
$$d = \bigoplus_{|\mathbf{t}|=1} d_{\mathbf{t}},$$

где $t_j \in I_j = \{\, z \in \mathbb{Z} |\ |z| \leq \dim P_j \}$ и

$$d_{\mathbf{t}} : \Omega^{\mathbf{k}} \to \Omega^{\mathbf{k}+\mathbf{t}}.$$

Здесь под суммой мультииндексов $\mathbf{a} = (a_i)_i$ и $\mathbf{b} = (b_i)_i$ мы понимаем мультииндекс $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i + b_i)_i$.

Разложение трех первых членов комплекса де Рама представлено на следующей диаграмме:




Если одна из компонент $t_i$ мультииндекса $\mathbf{t}$ отрицательна, то оператор $d_{\mathbf{t}}$ является $C^\infty(J^1M)$–гомоморфизмом [12]. Не сложно показать, что таких нетривиальных гомоморфизмов всего четыре: $d_{-1,1,1}, d_{1,1,-1}, d_{2,-1,0}$ и $d_{0,-1,2}$.

3.2. **Формы Лапласа.** Пусть $\mathbf{1}_i = (0, 1_i, 0)^1$ — мультииндекс длины 3. Гомоморфизм $d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ $(s, j, k = 1, 2, 3;\ s \neq j, k)$ можно рассматривать как $C^\infty(J^1M)$-линейное отображение

$$d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : \Omega^{\mathbf{1}_s} \to \Omega^{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k},$$

или как $C^\infty(J^1M)$-билинейное отображение

$$d_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s} : D_j \times D_k \to D_s. \tag{8}$$

Эти гомоморфизмы мы используем для определения тензорных полей $\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}$ на $J^1M$, положив для произвольных векторных полей $X, Y$ на $J^1M$

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(X, Y) = \tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}\left(\mathbf{P}_j X, \mathbf{P}_k Y\right), \tag{9}$$

где $\mathbf{P}_j : D(J^1M) \to D_j$ — проектор векторных полей на распределение $P_j$ $(j = 1, 2, 3)$.

Таким образом, мы получили четыре тензорных поля

$$\tau_{-1,1,1}, \quad \tau_{1,1,-1}, \quad \tau_{2,-1,0} \quad \text{и} \quad \tau_{0,-1,2}$$

на $J^1M$. В силу (8) их можно рассматривать как билинейные отображения

$$\begin{aligned} \tau_{2,-1,0} &: \quad C_+ \times C_+ \to l, \\ \tau_{0,-1,2} &: \quad C_- \times C_- \to l, \\ \tau_{-1,1,1} &: \quad C_- \times l \to C_+, \\ \tau_{1,1,-1} &: \quad C_+ \times l \to C_-. \end{aligned}$$

Пусть $s \neq j, k$. Для произвольных векторных полей $X$ и $Y$ на $J^1M$

$$\tau_{\mathbf{1}_j+\mathbf{1}_k-\mathbf{1}_s}(X, Y) = -\mathbf{P}_s\left[\mathbf{P}_j X, \mathbf{P}_k Y\right]. \tag{10}$$

Определим две дифференциальные 2-формы $\lambda_-$ и $\lambda_+$ из модуля $\Omega^{101}$ как "косую свертку" тензорных полей:

$$\lambda_+ = \langle \tau_{0,-1,2}, \tau_{1,1,-1} \rangle, \qquad \lambda_- = \langle \tau_{2,-1,0}, \tau_{-1,1,1} \rangle. \tag{11}$$

[1] единица стоит только на $i$-м месте.

Здесь скобка $\langle\cdot,\cdot\rangle$ определена формулой

$$\langle \alpha\otimes X, \beta\otimes Y\rangle = (Y\rfloor\alpha)\wedge(X\rfloor\beta)$$

для тензоров вида $\alpha\otimes X$ и $\beta\otimes Y$. На линейные комбинации таких тензоров она продолжается по линейности.

Формы $\lambda_+$ и $\lambda_-$ мы будем называть *формами Лапласа* [13]. Как показывает следующий пример, это определение оправдано.

**Пример 4.** *Для линейного гиперболического уравнения*

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y) \tag{12}$$

*формы Лапласа имеют вид*

$$\lambda_- = (ab + c - b_{q_2})dq_1\wedge dq_2, \qquad \lambda_+ = -(ab + c - a_{q_1})dq_1\wedge dq_2.$$

*Коэффициенты* $k = ab + c - b_{q_2}$ *и* $h = ab + c - a_{q_1}$ *при* $dq_1\wedge dq_2$ *в этих выражениях представляют собой классические инварианты Лапласа* [20].

**Пример 5.** *Для уравнения*

$$v_{xy} = f\left(x, y, v, v_x, v_y\right) \tag{13}$$

*формы Лапласа*

$$\begin{gathered}\lambda_- = f_{p_2p_2}\left(f_{p_1}dq_1\wedge du - dq_1\wedge dp_2\right) + \\ \left(f_u - p_2 f_{p_2u} + f_{p_1}f_{p_2} - p_2 f_{p_1}f_{p_2p_2} - f f_{p_1p_2} - f_{q_2p_2}\right) dq_1\wedge dq_2,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\lambda_+ = f_{p_1p_1}\left(f_{p_2}dq_2\wedge du - dq_2\wedge dp_1\right) + \\ \left(-f_u + p_1 f_{p_1u} - f_{p_1}f_{p_2} + p_1 f_{p_2}f_{p_1p_1} + f f_{p_1p_2} + f_{q_1p_1}\right) dq_1\wedge dq_2.\end{gathered} \tag{15}$$

**Пример 6.** *Уравнение*

$$\frac{v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2}{(1 + v_x^2 + v_y^2)^2} = K(x,y),$$

*описывает поверхности гауссовой кривизны $K(x, y)$, которые задаются как графики функций $v = v(x, y)$. Для $K = -1$ это уравнение гиперболическое и его формы Лапласа имеют вид:*

$$\lambda_- = \frac{1}{2(1+p_1^2+p_2^2)}(dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1 - p_2 du \wedge dp_1 + p_1 du \wedge dp_2),$$

$$\lambda_+ = -\lambda_-.$$

Для эллиптических уравнений все наши конструкции остаются в силе. Нужно только вместо комплекса де Рама рассматривать его комплексификацию. Полученные при этом формы Лапласа будут комплексно сопряженными.

**Пример 7.** *Для линейного эллиптического уравнения*

$$v_{xx} + v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y) \tag{16}$$

*формы Лапласа имеют вид*

$$\lambda_\pm = \frac{1}{4}\left(b_x - a_y \pm \left(\frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2c - a_x - b_y\right)\iota\right) dx \wedge dy. \tag{17}$$

*Коэффициенты этих форм*

$$K = b_x - a_y, \qquad \textit{and} \qquad H = \frac{1}{2}(a^2+b^2) + 2c - a_x - b_y \tag{18}$$

*представляют собой инварианты Коттона [1].*

Уравнение Монжа-Ампера будем называть *регулярным*, если производные любого порядка характеристических распределений также являются распределениями. Это равносильно тому, что ранг форм Лапласа не меняется в рассматриваемой области. Далее мы будем рассматривать только такие уравнения.

## 4. Контактная линеаризация уравнений

Рассмотрим проблему локальной эквивалентности невырожденных уравнений Монжа-Ампера линейным уравнениям вида

$$v_{xx} \pm v_{yy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y). \tag{19}$$

Если уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно линейному уравнению вида (19), то его формы Лапласа удовлетворяют одному из следующих условий:

(1) $\lambda_+ = \lambda_- = 0$,
(2) $\lambda_+ \neq 0$ и $\lambda_- \neq 0$,
(3) одна из форм Лапласа — нулевая, а другая — нет.

Заметим, что так как формы Лапласа для эллиптических уравнений комплексно сопряжены, то для последний случай не может реализоваться для таких уравнений.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

4.1. **Обе формы Лапласа обращаются в нуль.** Известно, что если инварианты Лапласа $k$ и $h$ для линейного гиперболического уравнения (12) тождественно равны нулю, то такое уравнение заменой переменных может быть приведено к волновому уравнению $v_{xy} = 0$. Как показывает следующая теорема [17], аналогичное утверждение оказывается справедливым и для уравнений Монжа-Ампера.

**Теорема 1.** *Невырожденное уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно либо волновому уравнению $v_{xy} = 0$, либо уравнению Пуассона $v_{xx} + v_{yy} = f(x, y)$ тогда и только тогда, когда обе его формы Лапласа равны нулю.*

4.2. **Обе формы Лапласа не обращаются в нуль.** Заметим, что формы Лапласа для линейных уравнений (19) удовлетворяют следующим условиям:

$$\lambda_\pm \wedge \lambda_\pm = 0, \quad \lambda_+ \wedge \lambda_- = 0, \quad d\lambda_\pm = 0. \tag{20}$$

Поэтому эти же условия должны выполняться для уравнений Монжа-Ампера, которые контактно эквивалентны линейным уравнениям. Оказывается, эти условия являются и достаточными. А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть для невырожденного уравнения Монжа-Ампера обе формы Лапласа не обращаются в нуль. Уравнение* *локально контактно эквивалентно линейному уравнению (19) тогда и только тогда, когда условия (20) выполняются.*

4.3. **Одна из форм Лапласа равна нулю, а другая — нет.** Как отметили выше, этот случай может реализоваться лишь для гиперболических уравнений. Для определенности предположим, что $\lambda_- = 0$ и $\lambda_+ \neq 0$.

Мы должны предположить, что $\lambda_+ \wedge \lambda_+ = 0$, ибо это условие выполняется для линейных уравнений. Это означает, что $\lambda_+ = \eta_- \wedge \vartheta_+$, где $\eta_- \in \Omega^{001}$ и $\vartheta_+ \in \Omega^{100}$ — некоторые дифференциальные 1-формы.

**Теорема 3** (см. [13]). *Допустим, что одна из форм Лапласа нулевая, а вторая, скажем $\lambda_+$, — нет. Уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно линейному уравнению*

$$v_{xx} - v_{yy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y).$$

*тогда и только тогда, когда $d\lambda_+ = 0$, $\lambda_+ = \eta_- \wedge \vartheta_+$ и распределение $\mathcal{F}\langle\vartheta_+\rangle$ вполне интегрируемо.*

## 5. Уравнение $\mathbf{v_{xy} = k(x,y)v}$

Следующая теорема дает условия эквивалентности уравнений Монжа-Ампера линейным гиперболическим уравнениям (19), у которых $a = b = 0$.

**Теорема 4.** *В окрестности точки $a_0 \in J^1M$ гиперболическое уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно уравнению*

$$v_{xy} = k(x,y)v \tag{21}$$

*для некоторой функции $k$ ($k(a_0) \neq 0$) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $\lambda_+ \neq 0$ *и* $\lambda_- \neq 0$,
(2) $\lambda_+ \wedge \lambda_+ = \lambda_- \wedge \lambda_- = \lambda_+ \wedge \lambda_- = 0$
(3) $d\lambda_+ = d\lambda_- = 0$,

(4) $\lambda_+ + \lambda_- = 0$.

*Доказательство.* Условия 1–4 являются необходимыми, поскольку они выполняются для уравнения (21). Докажем их достаточность.

Зафиксируем точку $a_0(q^0, u^0, p^0) \in J^1M$. Из условий 2 и 3 следует, что уравнение локально контактно эквивалентно линейному уравнению (см. [13])

$$v_{xy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y).$$

Для этого уравнения эффективная форма

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2(ap_1 + bp_2 + cu + g)dq_1 \wedge dq_2.$$

Здесь $a, b, c, g$ — функции от $q_1, q_2$. Учитывая условие 4 теоремы, получаем, что $b_{q_2} = a_{q_1}$, то есть $a = \varphi_{q_2}$ и $b = \varphi_{q_1}$ для некоторой функции $\varphi = \varphi(q)$. Эта функция определена с точностью до аддитивной постоянной, которую мы выберем так, чтобы в точке $a$ функция $\varphi$ обращалась в нуль, то есть $\varphi(q^0) = 0$.

Контактное преобразование

$$\phi : \begin{cases} q_1 \mapsto & q_1, \\ q_2 \mapsto & q_2, \\ u \mapsto & e^{\varphi}(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)), \\ p_1 \mapsto & e^{\varphi}(p_1 - \alpha + (u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))\varphi_{q_1}), \\ p_2 \mapsto & e^{\varphi}(p_2 - \beta + (u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))\varphi_{q_2}), \end{cases}$$

где $\alpha = u^0\varphi_{q_1}(q^0)$ и $\beta = u^0\varphi_{q_2}(q^0)$, сохраняет точку $a_0$. Применив это преобразование к $\omega$ и выделив у полученной формы эффективную часть, мы получим форму

$$\begin{aligned} \phi^*(\omega)_\varepsilon = & e^{\varphi}(dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2) - 2(g + e^{\varphi}(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \\ & \beta(q_2^0 - q_2))(c + \varphi_{q_1}\varphi_{q_2} - \varphi_{q_1q_2}))dq_1 \wedge dq_2. \end{aligned}$$

Ей отвечает уравнение

$$v_{q_1q_2} = \widetilde{c}v + \widetilde{g}, \tag{22}$$

где

$$\widetilde{c} = c + \varphi_{q_1}\varphi_{q_2} - \varphi_{q_1q_2}$$

и

$$\widetilde{g} = ge^{-\varphi} + (\alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))\widetilde{c}.$$

Пусть $v = \psi(q_1, q_2)$ — решение уравнения (22), удовлетворяющее следующим условиям Коши:

$$\psi|_{q_2=q_2^0} = \gamma_0(q_1) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right|_{q_2=q_2^0} = \gamma_1(q_1),$$

где функции $\gamma_0$ и $\gamma_1$ гладкие и такие, что $\gamma_0(q_1^0) = \gamma_0'(q_1^0) = \gamma_1(q_1^0) = 0$. Согласно теореме существования решения задачи Коши для уравнения (22), в некоторой окрестности точки $a_0$ такое решение существует и его первая производная по переменной $q_1$ обращается в нуль в этой точке, т.е. $\left.\frac{\partial v}{\partial q_1}\right|_a = 0$. Контактное преобразование

$$(q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto (q_1, q_2, u + \psi, p_1 + \psi_{q_1}, p_2 + \psi_{q_2}),$$

сохраняет точку $a_0$ и переводит уравнение (22) в уравнение (21). □

## 6. Уравнение $\mathbf{v_{xx} + v_{xx} = k(x, y)v + f(x, y)}$

Теорема, аналогичная теореме 4, справедлива и для эллиптических уравнений.

**Теорема 5.** *В окрестности точки $a_0 \in J^1M$ эллиптическое уравнение Монжа-Ампера $E$ локально контактно эквивалентно уравнению*

$$v_{xx} + v_{yy} = k(x, y)v + f(x, y) \tag{23}$$

*для некоторых функций $k$ ($k(a_0) \neq 0$) и $f$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

(1) $\lambda_+ \neq 0$ *и* $\lambda_- \neq 0$,
(2) $\lambda_+ \wedge \lambda_+ = \lambda_- \wedge \lambda_- = \lambda_+ \wedge \lambda_- = 0$,
(3) $d\lambda_+ = d\lambda_- = 0$,
(4) $\lambda_+ + \lambda_- = 0$.

*Доказательство.* Условия 1–4 являются необходимыми, потому что они выполняются для уравнения (23). Докажем их достаточность.

Итак, пусть эти условия выполняются для некоторого уравнения $E$ типа $H_{2,2}$. Зафиксируем точку

$$a_0(q_1^0, q_2^0, u^0, p_1^0, p_2^0) \in J^1 M.$$

Из условий 2 и 3 следует, что уравнение $E$ локально контактно эквивалентно линейному уравнению [13]

$$v_{xx} + v_{yy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y). \tag{24}$$

Учитывая условие 4 теоремы, получаем, что $b_{q_1} = a_{q_2}$, то есть $a = \varphi_{q_1}$ и $b = \varphi_{q_2}$ для некоторой функции $\varphi = \varphi(q)$. Эта функция определена с точностью до аддитивной постоянной, которую мы выберем так, чтобы в точке $a_0$ функция $\varphi$ обращалась в нуль, то есть $\varphi(q^0) = 0$.

Таким образом, эффективная форма, которая отвечает этому уравнению имеет вид

$$\omega = dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1 - (\varphi_{q_1} p_1 + \varphi_{q_1} p_2 + cu + g) dq_1 \wedge dq_2.$$

Контактное преобразование

$$\phi : \begin{cases} q_1 \mapsto & q_1, \\ q_2 \mapsto & q_2, \\ u \mapsto & (u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2))e^{\frac{\varphi}{2}}, \\ p_1 \mapsto & (p_1 - \alpha + \frac{\varphi_{q_1}}{2}(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)))e^{\frac{\varphi}{2}}, \\ p_2 \mapsto & (p_2 - \beta + \frac{\varphi_{q_2}}{2}(u + \alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)))e^{\frac{\varphi}{2}}, \end{cases}$$

где $\alpha = \frac{1}{2} u^0 \varphi_{q_1}(q^0)$ и $\beta = \frac{1}{2} u^0 \varphi_{q_2}(q^0)$, сохраняет точку $a_0$. Применив это преобразование к $\omega$ и выделив у полученной формы эффективную часть, мы получим форму

$$\phi^*(\omega)_\varepsilon = (k(q)u + f(q))dq_1 \wedge dq_2 + dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1,$$

где

$$k(q) = \frac{1}{2}(\varphi_{q_2 q_2} + \varphi_{q_1 q_1}) - \frac{1}{4}(\varphi_{q_1}^2 + \varphi_{q_2}^2) - c(q)$$

и

$$f(q) = k(q)(\alpha(q_1^0 - q_1) + \beta(q_2^0 - q_2)) - ge^{-\frac{\varphi}{2}}.$$

Ей отвечает уравнение $v_{xx} + v_{yy} = k(x,y)v + f(x,y)$. □

**Замечание 1.** *Если коэффициенты уравнения Монжа-Ампера — аналитические функции своих переменных, то при выполнении условий теоремы 5 оно может быть приведено к однородному уравнению*

$$v_{xx} + v_{yy} = k(x,y)v \tag{25}$$

*для некоторой функций $k$ $(k(a_0) \neq 0)$.*

## 7. Приводимость уравнений Монжа-Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

Рассмотрим проблему приведения уравнений Монжа-Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами в следующей формулировке: *найти условия при которых уравнения Монжа-Ампера (1) заменой переменных приводятся к уравнению вида*

$$v_{xx} \pm v_{yy} = \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v + f(x,y) = 0, \tag{26}$$

где $\alpha, \beta, \gamma$ — постоянные.

Перед тем как решать эту проблему для общих уравнений Монжа-Ампера, выясним, какие линейные уравнения приводятся заменой переменных к уравнениям с постоянными коэффициентами. Гиперболический и эллиптический типы мы рассмотрим раздельно.

7.1. **Гиперболические линейные уравнения.** Прежде всего заметим, что в гиперболическом случае вместо уравнения (26) можно рассматривать эквивалентное ему уравнение

$$v_{xy} = \lambda v, \tag{27}$$

где $\lambda$ — некоторая постоянная. Если эта постоянная не равна нулю, это уравнение эквивалентно уравнению

$$v_{xy} = v. \tag{28}$$

Уравнение (28) называется *телеграфным.*

Сформулируем условия, при которых линейные уравнения вида

$$v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y) \tag{29}$$

заменой переменных приводятся к уравнениям вида (27).

При решении поставленной задачи необходимо рассматривать преобразования вида

$$(x, y, v) \mapsto (X(x), Y(y), Z_1(x, y)v + Z_2(x, y)), \tag{30}$$

где $X, Y, Z_1, Z_2$ — некоторые гладкие функции, ибо только такие преобразования сохраняют вид уравнений (29).

Заметим, что для уравнений (27) формы Лапласа имеют вид

$$\lambda_- = -\lambda_+ = \lambda dq_1 \wedge dq_2.$$

**Лемма 1.** *Пусть уравнение*

$$v_{xy} = k(x, y)v \tag{31}$$

*регулярно в некоторой окрестности точки* $a_0 \in \mathbb{R}^2$. *Это уравнение локально контактно эквивалентно уравнению*

$$v_{xy} = \lambda v \tag{32}$$

*для некоторой постоянной* $\lambda$ *в том и только том случае, когда функция* $k$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$kk_{xy} - k_x k_y = 0. \tag{33}$$

*Доказательство.* Пусть $(x_0, y_0)$ — координаты точки $a_0$. Формы Лапласа для уравнения (31) имеют вид

$$\lambda_+ = k(x, y)dx \wedge dy \qquad \text{и} \qquad \lambda_- = -k(x, y)dx \wedge dy.$$

Так как это уравнение регулярно, то могут реализоваться две возможности: $k \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $a_0$ или $k(x_0, y_0) \neq 0$.

В первом случае уравнение (31) представляет собой волновое уравнение.

Рассмотрим второй случай, когда функция $k$ не аннулируется в некоторой окрестности точки $a$.

Из условия (33) следует, что

$$\frac{\partial^2 \ln |k|}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$$

и поэтому $k(q_1, q_2) = \widetilde{X}(q_1)\widetilde{Y}(q_2)$ для некоторых функций $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$.

Пусть $X$ и $Y$ — первообразные функций $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ соответственно, такие, что $X(q_1^0) = q_1^0$ и $Y(q_2^0) = q_2^0$. Эффективная форма, отвечающая уравнению (31), имеет следующий вид:

$$\omega = dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2X'(q_1)Y'(q_2)u dq_1 \wedge dq_2.$$

В силу того, что функция $k$ не аннулируется, для функций $X$ и $Y$ в окрестности точки $a$ существуют обратные функции, которые обозначим $\chi$ и $\psi$ соответственно. Заметим, что

$$\chi(q_1^0) = q_1^0, \qquad \psi(q_2^0) = q_2^0, \qquad \chi'(q_1^0) \neq 0, \qquad \psi'(q_2^0) \neq 0.$$

Контактное преобразование

$$(q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto \left(\chi(q_1), \psi(q_2), u - \xi q_1 - \eta q_2, \frac{p_1 - \xi}{\chi'(q_1)}, \frac{p_2 - \eta}{\psi'(q_2)}\right),$$

где

$$\xi = p_1^0 \left(\frac{1}{\chi'(q_1^0)} - 1\right) \qquad \text{и} \qquad \eta = p_2^0 \left(\frac{1}{\psi'(q_2^0)} - 1\right),$$

сохраняет точку $a_0$ и переводит форму $\omega$ в форму

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega} =& dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - \\ & 2X'(\chi(q_1))Y'(\psi(q_2))(u - \xi q_1 - \eta q_2)\chi'(q_1)\psi'(q_2) dq_1 \wedge dq_2.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\chi'(q_1) = \frac{1}{X'(\chi(q_1))} \qquad \text{и} \qquad \psi'(q_2) = \frac{1}{Y'(\psi(q_2))},$$

получаем, что

$$\widetilde{\omega} = dq_1 \wedge dp_1 - dq_2 \wedge dp_2 - 2(u + \gamma(q))dq_1 \wedge dq_2,$$

где

$$\gamma(q) = -X'(\chi(q_1))Y'(\psi(q_2))(\xi q_1 + \eta q_2).$$

Форме $\widetilde{\omega}$ отвечает уравнение

$$v_{q_1 q_2} = v + \gamma(q). \tag{34}$$

Пусть $v = z(q_1, q_2)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее следующим условиям Коши:

$$z\big|_{q_2=q_2^0} = \xi_0(q_1) \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial q_2}\right|_{q_2=q_2^0} = \xi_1(q_1),$$

где функции $\xi_0$ и $\xi_1$ гладкие и такие, что

$$\xi_0(q_1^0) = \xi_0'(q_1^0) = \xi_1(q_1^0) = 0.$$

Согласно теореме существования, такое решение всегда найдется. Контактное преобразование

$$(q_1, q_2, u, p_1, p_2) \mapsto (q_1, q_2, u + z, p_1 + z_{q_1}, p_2 + z_{q_2}),$$

переводит уравнение (34) в уравнение $v_{xy} = v$.

□

Следующая теорема указывает условия приводимости линейных гиперболических уравнений к телеграфному уравнению.

**Теорема 6.** *Уравнение*

$$v_{xy} = a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v + g(x, y) \tag{35}$$

*в окрестности точки* $a_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *локально контактно эквивалентно телеграфному уравнению*

$$v_{xy} = v \tag{36}$$

*тогда и только тогда, когда оно регулярно,* $a_x = b_y$*, а функция* $\Phi = ab + c - b_y$ *не обращается в нуль в точке* $a_0$ *и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$\Phi\Phi_{xy} - \Phi_x\Phi_y = 0. \tag{37}$$

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что уравнение (37) инвариантно относительно преобразований вида (30).

Необходимость условий теоремы следует из того, что для телеграфного уравнения первые интегралы распределений $C_+^{(2)}$ и $C_-^{(2)}$ равны $q_1$ и $q_2$ соответственно, а формы Картана

$$\lambda_- = -\lambda_+ = dq_1 \wedge dq_2.$$

Функция $\Phi = 1$ и поэтому удовлетворяет уравнению (37).

Докажем достаточность. Пусть $a_0 \in J^1M$ — фиксированная точка с координатами $(q^0, u^0, p^0)$ и пусть для уравнения (35) выполняются условия теоремы. Тогда это уравнение локально контактно эквивалентно уравнению $v_{xy} = k(x, y)v$ для некоторой гладкой функции $k$.

Для этого уравнения функция $\Phi = k$. Применив лемму 1, мы завершим доказательство.

□

7.2. **Эллиптические линейные уравнения.** Эллиптическое уравнение вида (26) локально эквивалентно уравнению

$$v_{xx} + v_{yy} = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + 4\gamma)u + \widetilde{f}(x, y), \tag{38}$$

где $\widetilde{f}$ — некоторая функция.

Таким образом, при решении поставленной проблемы вместо уравнений (26) мы можем рассматривать уравнение вида

$$v_{xx} + v_{yy} = \kappa v + f(x, y), \tag{39}$$

где $\kappa$ — некоторая постоянная. Такое уравнение называется *уравнением Гельмгольца.*

Найдем условия, при которых линейные эллиптические уравнения вида заменой переменных приводятся к уравнениям Гельмгольца.

**Лемма 2.** *Для всякой гармонической функции* $w(x, y)$ *найдется гармоническая функция* $h(x, y)$*, такая, что*

$$h_x^2 + h_y^2 = e^w. \tag{40}$$

*Доказательство.* Для доказательства леммы достаточно показать, что переопределенная система

$$\begin{cases} h_{xx} + h_{yy} &= 0, \\ h_x^2 + h_y^2 &= e^w \end{cases} \tag{41}$$

относительно функции $h$ совместна для произвольной гармонической функции $w$. Запишем систему (41) в виде

$$\begin{cases} F &= 0, \\ G &= 0, \end{cases}$$

где

$$F = p_{11} + p_{22}, \quad G = p_1^2 + p_2^2 - e^w,$$

$x_1 = x, x_2 = y, p_i = h_{x_i}, p_{ij} = h_{x_i x_j}$ для $i, j = 1, 2$. Скобка Кругликова-Лычагина-Майера [7] для этой системы имеет вид:

$$\begin{aligned}[F, G] &= D_2^2(G) + D_1^2(G) - 2p_2 D_2(F) - 2p_1 D_1(F) \\ &= 2p_{11}^2 + 4p_{12}^2 + 2p_{22}^2 - e^w(w_{x_1x_1} + w_{x_2x_2} + w_{x_1}^2 + w_{x_2}^2),\end{aligned}$$

где

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial u} + p_{i1} \frac{\partial}{\partial p_1} + p_{i2} \frac{\partial}{\partial p_2} + p_{i11} \frac{\partial}{\partial p_{11}} + p_{i12} \frac{\partial}{\partial p_{12}} + p_{i22} \frac{\partial}{\partial p_{22}}$$

— оператор полной производной по переменной $x_i$ $(i = 1, 2)$. В силу того, что функция $w$ — гармоническая,

$$[F, G] = 2(h_{xx}^2 + 2h_{xy}^2 + h_{yy}^2) - e^w(w_x^2 + w_y^2). \tag{42}$$

Не сложно показать, что эта скобка равна нулю в силу системы (41).

Таким образом, согласно [7], система (41) формально интегрируема. А так как эта система конечного типа, то она имеет гладкое решение $h$. □

Прежде всего рассмотрим уравнения

$$v_{xx} + v_{yy} = k(x,y)v + f(x,y). \tag{43}$$

Формы Лапласа для этого уравнения имеют вид

$$\lambda_+ = \frac{\iota}{2}k(x,y)dx \wedge dy \qquad \text{и} \qquad \lambda_- = -\frac{\iota}{2}k(x,y)dx \wedge dy.$$

**Теорема 7.** *Пусть уравнение (43) регулярно в некоторой окрестности точки $a_0 \in \mathbb{R}^2$. Это уравнение локально контактно эквивалентно уравнению Гельмгольца (39) тогда и только тогда, когда функция $k$ удовлетворяет следующему уравнению:*

$$k(k_{xx} + k_{yy}) = k_x^2 + k_y^2. \tag{44}$$

*Доказательство.* Пусть $(x_0, y_0)$ — координаты точки $a_0$. Так как это уравнение регулярно, то могут реализоваться две возможности: $k \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $a$ или

$$k(x_0, y_0) \neq 0.$$

В первом случае уравнение (43) представляет собой уравнение Пуассона и теорема доказана.

Рассмотрим второй случай, когда функция $k$ не аннулируется в точке $a_0$.

Пусть функция $k$ удовлетворяет уравнению (44). Его можно записать в виде

$$\Delta(\ln|k|) = 0,$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа. Поэтому функция $k$ имеет вид

$$k(x,y) = \varepsilon e^{w(x,y)},$$

где $w$ — некоторая гармоническая функция и $\varepsilon = \pm 1$.

Согласно лемме 2 найдется такая гармоническая функция $h = h(x,y)$, что $k = \varepsilon(h_x^2 + h_y^2)$. Таким образом, эффективная дифференциальная 2-форма, отвечающая уравнению (43) имеет вид:

$$\omega = dq_1 \wedge dp_2 - dq_2 \wedge dp_1 - (\varepsilon(h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2)u + f)dq_1 \wedge dq_2.$$

Пусть $g = g(x, y)$ — гармоническая функция, гармонически сопряженная с функцией $h$, т.е. $h_x = g_y$ и $h_y = -g_x$. Функции $h$ и $g$ определены с точностью до аддитивных постоянных, которые мы выберем так, чтобы $h(x_0, y_0) = x_0$ и $g(x_0, y_0) = y_0$. Построим преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$, сохраняющее точку $a_0$:

$$(q_1, q_2) \mapsto (Q_1 = h(q), Q_2 = g(q)).$$

Т.к. функция $k(a_0) \neq 0$, то якобиан этого преобразования

$$\begin{vmatrix} h_x & h_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = h_x g_y - h_y g_x = h_x^2 + h_y^2 \neq 0$$

в некоторой окрестности точки $a_0$ и оно обратимо. Для обратного преобразования

$$(Q_1, Q_2) \mapsto (q_1 = H(Q), q_2 = G(Q))$$

функции $H$ и $G$ тоже являются гармонически сопряженными и, кроме того,[1]

$$H_{Q_1} = \frac{g_{q_2}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2}, \quad H_{Q_2} = -\frac{h_{q_2}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2},$$
$$G_{Q_1} = -\frac{g_{q_1}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2}, \quad G_{Q_2} = \frac{h_{q_1}}{h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2}.$$

Поэтому

$$h_{q_1}^2 + h_{q_2}^2 = \frac{1}{H_{Q_1}^2 + H_{Q_2}^2}.$$

Построим теперь масштабное преобразование

$$\phi : (q_1, q_2, u) \mapsto (Q_1 = h(q), Q_2 = g(q), U = u)$$

[1]Здесь предполагается, что производные функций $h$ и $g$ выражены через $Q_1$ и $Q_2$

и продолжим его до контактного. Применяя это преобразование к форме $\omega$ и выделяя у полученной формы эффективную часть, мы получим форму

$$\phi^*(\omega)_\varepsilon = dQ_1 \wedge dP_1 - dQ_2 \wedge dP_2 - (\varepsilon U + \widetilde{f}(Q))dQ_1 \wedge dQ_2,$$

где

$$\widetilde{f}(Q) = \frac{f(H(Q), G(Q))}{H_{Q_1}^2 + H_{Q_2}^2}.$$

Этой дифференциальной форме отвечает уравнение (39), где $\kappa = -1$ или $\kappa = 1$. $\square$

Обратимся теперь к общим линейным уравнениям.

**Теорема 8.** *Уравнение*

$$v_{xx} + v_{yy} = a(x,y)v_x + b(x,y)v_y + c(x,y)v + g(x,y) \tag{45}$$

*в окрестности точки $a_0(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ локально контактно эквивалентно уравнению Гельмгольца (39), где $\kappa \neq 0$, тогда и только тогда, когда один из инвариантов Коттона $H$ равен нулю, а второй, $K$, не обращается в нуль в точке $a_0$ и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$K(K_{xx} + K_{yy}) = K_x^2 + K_y^2. \tag{46}$$

*Доказательство.* Необходимость условий теоремы очевидна. Докажем достаточность. Согласно теореме 5, уравнение (45) локально контактно эквивалентно уравнению (23), а согласно теореме 7, последнее уравнение эквивалентно уравнению Гельмгольца (39), где $\kappa$ может принимать значения $-1, 0, 1$. $\square$

7.3. **Уравнения Монжа-Ампера.** Для уравнений вида (26) либо обе формы Лапласа нулевые, либо обе не обращаются в нуль и

$$\lambda_\pm \wedge \lambda_\pm = 0. \tag{47}$$

Эти же условия должны выполняться и для уравнений Монжа-Ампера, которые контактно эквивалентны уравнению (26).

Если для уравнения Монжа-Ампера обе формы Лапласа нулевые, то оно, согласно теореме 1, заменой переменных приводится к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Поэтому нам осталось рассмотреть второй случай. Ответ на вопрос дает следующая теорема [16].

**Теорема 9.** *Пусть обе формы Лапласа невырожденного уравнения Монжа-Ампера не обращаются в нуль. Уравнение локально контактно линейному уравнению (26) тогда и только тогда, когда формы Лапласа имеют вид*

$$\lambda_+ = \Phi(g,h)dg\wedge dh \qquad \textit{and} \qquad \lambda_- = -\Phi(g,h)dg\wedge dh, \tag{48}$$

*где $g$ и $h$ — первые интегралы распределений $C_+^{(2)}$ и $C_-^{(2)}$ соответственно и функция $\Phi(g,h)$ не обращается в нуль и удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:*

$$\Phi\Phi_{gh} - \Phi_g\Phi_h = 0. \tag{49}$$

*Доказательство.* Из теоремы 2 следует, что уравнение Монжа-Ампера локально контактно эквивалентно линейному уравнению (19). Применяя терему 6 для гиперболических уравнений, и теорему 8 — для уравнений эллиптических, мы получаем, что последнее уравнение локально эквивалентно либо телеграфному уравнению, либо уравнению Гельмгольца. □

## Список литературы

[1] Cotton, E.: Sur les invariants différentiels de quelques équations linearies aux dérivées partielles du second ordre. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **17**, 211—244 (1900)

[2] Euler, L.: Calculi integralis. Vol.3. Petropoli, Impenfis Academiac Imperialis Scientiarium, 1770.

[3] Ibragimov, N.H.: Invariants of hyperbolic equations: solution of the Laplace problem. Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika **45**(2), 11—21 (2004) (Russian); English Translation in Journal of Applied Mechanics and Technical Physics **45**(2), 158–166, (2004)

[4] Kruglikov, B.S.: On some classification problems in four-dimensional geometry: distributions, almost complex structures, and the generalized Monge-Ampère equations. Matem. Sbornik **189**(11), 61–74 (1998)

[5] Kruglikov, B.S.: Symplectic and contact Lie algebras with application to the Monge-Ampère equations. Tr. Mat. Inst. Steklova **221**, 232–246 (1998)

[6] Kruglikov, B.S.: Classification of Monge-Ampère equations with two variables. CAUSTICS'98 (Warsaw), Polish Acad. Sci., Warsaw, 179–194 (1999)

[7] Kruglikov, B.S., Lychagin, V.V.: Mayer Brackets and PDEs solvability – I. Differ. Geom. Appl. **17**(2-3), 251–272 (2002)

[8] Kushner, A.G.: Chaplygin and Keldysh normal forms of Monge-Ampère equations of variable type. Mathem. Zametki **52**(5) 63–67, (1992)(Russian). English translation in Mathematical Notes **52**(5), 1121–1124 (1992)

[9] Kushner, A.G.: Classification of mixed type Monge-Ampère equations. In: Pràstaro, A., Rassias, Th.M. (ed) Geometry in Partial Differential Equations. Singapore New-Jersey London Hong-Kong, World Scientific, 173–188 (1993)

[10] Kushner, A.G.: Symplectic geometry of mixed type equations. In: Lychagin, V.V. (ed) The Interplay between Differential Geometry and Differential Equations. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **167**, 131–142 (1995)

[11] Кушнер А.Г.: Уравнения Монжа-Ампера и $e$-структуры. ДАН, **361**(5), 595–596 (1998).

[12] Kushner, A.G.: Almost product structures and Monge-Ampère equations. Lobachevskii Journal of Mathematics, `http://ljm.ksu.ru` **23**, 151–181 (2006)

[13] Kushner, A.G.: A contact linearization problem for Monge-Ampère equations and Laplace invariants. Acta Appl. Math. **101**(1–3), 177–189 (2008)

[14] Кушнер А.Г.: Контактная линеаризация невырожденных уравнений Монжа-Ампера. Изв. ВУЗов, Математика, №4, 43–58 (2008).

[15] Кушнер, А.Г.: Контактная линеаризация уравнений Монжа-Ампера и инварианты Лапласа. ДАН, **422**(5), 597–600 (2008).

[16] Kushner, A.G.: Contact equivalence of Monge-Ampère equations to linear equations with constant coefficients. Acta Appl. Math. (2008) (to be published)

[17] Кушнер, А.Г.: Приведение гиперболических уравнений Монжа-Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. ДАН, **423**(5), 609–611 (2008).

[18] Kushner, A.G.: Classification of Monge-Ampère equations. Proceedings of the Abel Symposium - 2008, June 18-21, 2008, Tromso, Norway (to be published)

[19] Kushner, A.G., Lychagin, V.V., Rubtsov, V.N.: Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **101**, Cambridge University Press, Cambridge, 2007, xxii+496 pp.

[20] Laplace, P.S.: Recherches sur le calcul intégrals aux différences partielles. Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris 23 **24** (1773). Reprinted in: Laplace, P.S.: Oevre complètes, t. IX, Gauthier-Villars, Paris, 1893; English Translation, New York, 1966.

[21] Lie, S.: Ueber einige partielle Differential-Gleichungen zweiter Orduung, Math. Ann. **5**, 209–256 (1872)

[22] Lie, S.: Begrundung einer Invarianten-Theorie der Beruhrungs-Transformationen. Math. Ann. **8**, 215–303 (1874)

[23] Lie, S.: Classification und integration von gewöhnlichen differentialgleichungen zwischen $x, y$, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. Math. Ann. **32**, 213–281 (1888)

[24] Lychagin, V.V.: Contact geometry and nonlinear second-order partial differential equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR **238**(5), 273–276 (1978). English translation in Soviet Math. Dokl. **19**(5), 34–38 (1978)

[25] Lychagin, V.V.: Contact geometry and nonlinear second-order differential equations. Uspekhi Mat. Nauk **34**(1 (205)), 137–165 (1979). English translation in Russian Math. Surveys **34**(1), 149–180 (1979)

[26] Lychagin, V.V.: Lectures on geometry of differential equations. Vol. 1,2. "La Sapienza", Rome, 1993.

[27] Lychagin, V.V., Rubtsov, V.N.: The theorems of Sophus Lie for the Monge–Ampère equations (Russian). Dokl. Akad. Nauk BSSR **27**(5), 396–398 (1983)

[28] Lychagin, V.V., Rubtsov, V.N.: Local classification of Monge-Ampre differential equations. Dokl. Akad. Nauk SSSR **272**(1), 34–38 (1983)

[29] Tunitskii, D.V.: On the contact linearization of Monge-Ampère equations. Izv. Ross. Akad. Nauk, Ser. Matem. **60**(2), 195–220 (1996)