Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2009, т.6, №2, 47-55

Ю. С. Федченко

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса
E-mail: Fedchenko_Julia@ukr.net

Нескінченно малі геодезичні деформації метрики ds^2

В даній статті досліджуються нескінченно малі геодезичні деформації метрики ds^2, встановлено розмірність простору розв'язків та знайдено вигляд метрики.

В данной статье исследуются бесконечно малые геодезические деформации метрики ds^2, найдены размерность пространства решений и вид метрики.

Infinitesimal deformations of a metric ds^2 are investigated. The spase dimension and the type of a metric are found.

Ключові слова: *геодезична деформація, метрика*

1. Вступ

Нагадаємо, що деформації при яких кожна геодезична крива переходить, в головному, в геодезичну криву називаються геодезичними або проективними (Р-деформації).

Інфінітезимальні геодезичні деформації поверхонь вперше були визначені в роботі Синюкова М. С. та Гаврильченка М. Л. [1] у 1971 році. В монографії [2] авторами показано, що якщоріманів простір V_n допускає нетривіальні нескінченно малі деформації, то він допускає і нетривіальні геодезичні відображення, і навпаки. Основні рівняння нескінченно малої геодезичної деформації мають вигляд:

$$\nabla_k(\delta g_{ij}) = 2\delta\Psi_k g_{ij} + \delta\Psi_i g_{kj} + \delta\Psi_j g_{ki} \tag{1}$$

де δg_{ij} — варіація метричного тензора, Ψ_i — градієнтний вектор, ∇_k — знак коваріантної похідної. Слід зазначити, що геодезичні деформації допускають поверхні Ліувілля і лише вони. Поверхнями Ліувілля [3] є, наприклад, всі поверхні обертання, всі центральні поверхні 2-го порядку та інші.

Загалом геодезичні деформації є малодослідженими. Останні роки над даною темою плідно працює Фоменко В.Т.[4], який показав, що дослідження нескінченно малих геодезичних деформацій метрики

$$ds^2 = E(u,v)(du^2 + dv^2)$$

зводиться до вивчення питання про те, чи має розв'язки система лінійних диференціальних рівнянь $\Im$, до якої зводиться система основних рівнянь (1)

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_u & = & Y_v, \\ X_v & = & -Y_u, \\ Z_u & = & 3((EY)_v + E_u X), \\ Z_v & = & 3((EY)_u + E_v X). \end{array} \right. \tag{2}$$

Тут

$$\begin{aligned} X =& \frac{\delta g_{11}}{E^2} - \frac{\delta g_{22}}{E^2}, \\ Y =& \frac{2\delta g_{12}}{E^2}, \\ Z =& \frac{\delta g_{11}}{E^2} + \frac{\delta g_{22}}{E^2}. \end{aligned}$$

Так,згідно з Фоменком В. Т., сфера S^2 "в цілому" допускає нетривіальне геодезичне відображення.

Основною метою даної роботи і є дослідження системи (2) та, як результат, визначити розмірність простору роз'язків, вказати умови формальної інтегровності системи (2).

2. Попередні відомості

Систему диференціальних рівнянь (2) ми розглядаємо як підмноговид $\mathcal{E} \subset J^1(\pi)$

$$\begin{cases} x_1 & - & y_2 = 0, \\ x_2 & + & y_1 = 0, \\ z_1 & - & 3(E_v y + E y_2 + E_u x) = 0, \\ z_2 & - & 3(E_u y + E y_1 + E_v x) = 0. \end{cases}$$

у просторі 1-джетів $\pi : R^3 \times R^2 \to R^2$, де

$$\pi : (x, y, z, u, v) \to (u, v),$$

а $x, y, z, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ — стандартні координати у просторі джетів.

Цей підмноговид корозмірності 4 і він визначає двомірне розшарування

$$\pi_{1,0} : \mathcal{E} \to J^0(\pi).$$

Перше продовження в стандартних координатах

$$x_{1,1} - y_{1,2} = 0,$$
$$x_{1,2} - y_{2,2} = 0,$$
$$x_{1,2} + y_{1,1} = 0,$$
$$x_{2,2} + y_{1,2} = 0,$$
$$-3\,E_{uv}y - 3\,E_u y_2 - 3\,E_{uu}x - 3\,E_u x_1 - 3\,E_v y_1 - 3\,E y_{1,2} + z_{1,1} = 0,$$
$$-3\,E_{vv}y - 6\,E_v y_2 - 3\,E_{uv}x - 3\,E_u x_2 - 3\,E y_{2,2} + z_{1,2} = 0,$$
$$-3\,E_{uu}y - 6\,E_u y_1 - 3\,E_{uv}x - 3\,E_v x_1 - 3\,E y_{1,1} + z_{1,2} = 0,$$
$$-3\,E_{uv}y - 3\,E_v y_1 - 3\,E_{vv}x - 3\,E_v x_2 - 3\,E_u y_2 - 3\,E y_{1,2} + z_{2,2} = 0$$

цієї системи $\mathcal{E}^{(1)} \subset J^2(\pi)$ має корозмірність 12 і визначає 1-мірне розшарування $\pi_{2,1} : \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}$, і нарешті, 2-е продовження

$$x_{1,1,1} - y_{1,1,2} = 0,$$
$$x_{1,1,2} - y_{1,2,2} = 0,$$
$$x_{1,2,2} - y_{2,2,2} = 0,$$
$$x_{1,1,2} + y_{1,1,1} = 0,$$

$$x_{1,2,2}+y_{1,1,2}=0,$$

$$x_{2,2,2}+y_{1,2,2}=0,$$

$$-3\,E_{uuv}y-3\,E_{uu}y_2-3\,E_{uuu}x-6\,E_{uu}x_1-6\,E_{uv}y_1-$$
$$-6\,E_u y_{1,2}-3\,E_u x_{1,1}-3\,E_v y_{1,1}-3\,E y_{1,1,2}+z_{1,1,1}=0,$$

$$-3\,E_{vuv}y-6\,E_{uv}y_2-3\,E_{uuv}x-3\,E_{uu}x_2-3\,E_u y_{2,2}-$$
$$-3\,E_{uv}x_1-3\,E_{vv}y_1-3\,E_u x_{1,2}-6\,E_v y_{1,2}-3\,E y_{1,2,2}+z_{1,1,2}=0,$$

$$-3\,E_{vvv}y-9\,E_{vv}y_2-3\,E_{vuv}x-6\,E_{uv}x_2-9\,E_v y_{2,2}-$$
$$-3\,E_u x_{2,2}-3\,E y_{2,2,2}+z_{1,2,2}=0,$$

$$-3\,E_{uuu}y-9\,E_{uu}y_1-3\,E_{uuv}x-6\,E_{uv}x_1-9\,E_u y_{1,1}-$$
$$-3\,E_v x_{1,1}-3\,E y_{1,1,1}+z_{1,1,2}=0,$$

$$-3\,E_{uuv}y-6\,E_{uv}y_1-3\,E_{vuv}x-3\,E_{uv}x_2-3\,E_{uu}y_2-6\,E_u y_{1,2}-$$
$$-3\,E_{vv}x_1-3\,E_v x_{1,2}-3\,E_v y_{1,1}-3\,E y_{1,1,2}+z_{1,2,2}=0,$$

$$-3\,E_{vuv}y-3\,E_{vv}y_1-3\,E_{vvv}x-6\,E_{vv}x_2-6\,E_{uv}y_2-6\,E_v y_{1,2}-$$
$$-3\,E_v x_{2,2}-3\,E_u y_{2,2}-3E y_{1,2,2}+z_{2,2,2}=0.$$

$\mathcal{E}^{(2)}\subset J^3(\pi)$ має корозмірність 24 а проекція $\pi_{3,2}:\mathcal{E}^2\to\mathcal{E}^1$ є дифеоморфізмом.

Геометрично, кожний елемент $\theta_3\epsilon\mathcal{E}^{(2)}$ можна розглядати як 2-мірну площину $L(\theta_3)$, яка дотикається продовження $\mathcal{E}^{(1)}$ у точці $\theta_2=\pi_{3,2}(\theta_3)$. Іншими словами, 2-е продовження $\mathcal{E}^{(2)}$ можна розглядати як двомірний розподіл $C_{\mathcal{E}^{(2)}}$ на многовиді $\mathcal{E}^{(1)}$, або як зв'язність ∇ в 6-мірному векторному розшаровуванні $\pi_2:\mathcal{E}^{(1)}\to R^2$.

Умови інтегрування розподілу $C_{\mathcal{E}^{(2)}}$ (або, що те саме, тривіальності зв'язності ∇) ми виразимо в термінах мультидужки (multi-brackets of differential operators), які були введені Личагіним В. В. та Кругліковим Б. С. [5]. Наведемо формулу для обчислення такої дужки, яка знайдена у наведеній роботі.

Нехай маємо систему з $n+1$ лінійних диференціальних рівнянь на n невідомі функції:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+11} & a_{n2} & \dots & a_{n+1n} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\| = 0,$$

тут a_{ij}- лінійні диференціальні оператори. Тоді дужка

$$\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$$

скалярних диференціальних операторів $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ обчислює ться за формулою

$$\{a_1, \dots, a_{n+1}\} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \mathrm{Ndet}(A_i) a_i, \tag{3}$$

де A_i- матриці розміру $n \times n$, отримані з матриці $\|a_{ij}\|$, якщо викреслити i-тий рядок, а $\mathrm{Ndet}(A_i)$- некомутативний визначник матриці A_i.

Теорема 1. *Розподіл $C_{\mathcal{E}^{(2)}}$ цілком інтегрований тоді й тільки тоді, коли обмеження дужки на друге продовження рівнянь $\mathcal{E}^2$ дорівнює нулю.*

3. Нескінченно малі геодезичні деформації метрики ds^2

Розглянемо на поверхні F^2 деяку метрику ds^2 класу C^1. Як вище було сказано, дослідження геодезичних деформацій метрики ds^2 зводиться до вивчення системи (2). Справедлива

Теорема 2. *1) Розмірність простору розв'язків системи (2) не більше 6;*

2) розмірність простору розв'язків системи (2) дорівнює 6 тоді і лише тоді, коли система рівнянь (2) формально інтегрована (сумісна), а функція $E(u,v) = C_3 e^{C_1 u + C_2 v}$.

3) для поверхонь нульової гаусової кривини і тільки для них розмірність простору нескінченно малих геодезичних деформацій дорівнює 6.

Доведення. Використаємо теорію дужок диференціальних операторів. Для цього систему (2) запишемо у вигляді

$$\begin{Vmatrix} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Vmatrix} = 0.$$

Знайдемо $\mathrm{Ndet}(A_i)$, $i = \overline{1,4}$. Так як

$$\mathrm{Ndet}(A_1) = \begin{vmatrix} \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{vmatrix} =$$
$$= 9E_u\partial_u\partial_v + 6E_{uu}\partial_v + 3E\partial_u^2\partial_v - 6E_v\partial_v^2 - 3E_{vv}\partial_v - 3E\partial_v^3,$$

$$\mathrm{Ndet}(A_2) = \begin{vmatrix} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{vmatrix} = 9E_{uu}\partial_u + 9E_u\partial_u^2 -$$
$$6E_u\partial_v^2 - 3E_{vu}\partial_v - 3E\partial_u\partial_v^2 + 3E_{uuu} + 3E\partial_u^3 + 3E_{vv}\partial_u + 3E_{vuv},$$

$$\mathrm{Ndet}(A_3) = \begin{vmatrix} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_v & 3E_u + 3E\partial_u & -\partial_v \end{vmatrix} = -\partial_u^2\partial_v - \partial_v^3,$$

$$\mathrm{Ndet}(A_4) = \begin{vmatrix} \partial_u & -\partial_v & 0 \\ \partial_v & \partial_u & 0 \\ 3E_u & 3E_v + 3E\partial_v & -\partial_u \end{vmatrix} = -\partial_u^3 - \partial_v^2\partial_u,$$

$$\begin{aligned} a_1 &= (\partial_u, -\partial_v, 0), \\ a_2 &= (\partial_v, \partial_u, 0), \\ a_3 &= (3E_u, 3E_v + 3E\partial_v, -\partial_u), \\ a_4 &= (3E_v, 3E_u + 3E\partial_u, -\partial_v), \end{aligned}$$

тоді ми, на основі (3), знаходимо рівняння третього порядку, яке є умовою формальної інтегрованості системи (2):

$$\begin{gathered} -E_v x_{1,2,2} - 3\,E_{uu} x_{1,2} + E_u x_{2,2,2} - E_{uv} x_{2,2} - \\ 2\,E_{uuu} x_2 - 2\,E_{uvv} x_2 - E_u x_{1,1,2} + 2\,E_{uv} x_{1,1} + \\ E_{uuv} x_1 + E_v x_{1,1,1} + E_{vvv} x_1 - E_u y_{1,2,2} - \\ 2\,E_{uu} y_{2,2} - 2\,E_v y_{2,2,2} - 5\,E_{vv} y_{2,2} + 3\,E_{uu} y_{1,1} + \\ E_u y_{1,1,1} + E_{uv} y_{1,2} + 3\,E_{uuu} y_1 - E_{vv} y_{1,1} - \\ E_{vvu} y_1 - 4\,E_{vvv} y_2 - E_{vvvv} y + E_{uuuu} y = 0 \end{gathered} \tag{4}$$

Знаходимо друге продовження системи (2) і використовуючи дужку (4) отримаємо наступне обмеження на вибір функції $E(u,v)$:

$$-E_v E_u + E_{uv} E = 0; \tag{5}$$

$$\begin{gathered} -3\,(E_v)^3 + 6E\,E_v E_{vv} + 2E\,E_v E_{uu} + \\ 2E\,E_u E_{uv} - 5(\,E_u)^2 E_v + E_{uuv} E^2 - 3\,E_{vvv} E^2 = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} -15\,(E_u)^3 + 6E\,E_v E_{uv} + 20E\,E_{uu} E_u + \\ 4E\,E_u E_{vv} - 9\,(E_v)^2 E_u - 5\,E_{uuu} E^2 - E_{vuv} E^2 = 0; \end{gathered} \tag{7}$$

$$5\,(E_u)^2 E_{uu} + 2E\,E_u E_{vuv} - 2E\,E_u E_{uuu} + \tag{8}$$

$$2E\,E_vE_{vvv} - 2E\,E_vE_{uuv} + 2E\,E_{uu}E_{vv} +$$
$$3(\,E_v)^2E_{uu} - 4E\,(E_{uu})^2 - 5\,(E_u)^2E_{vv} +$$
$$2E\,(E_{vv})^2 - E_{vvvv}E^2 + E_{uuuu}E^2 - 3\,(E_v)^2E_{vv} = 0.$$

Рівняння (5) запишемо у вигляді $(lnE)_{uv} = 0$ звідки слідує, що $E = e^{a(u)}e^{b(v)}$ і тоді рівняння (6), (7), (8) набудуть такого вигляду:

$$a''(u)\,b'(v) - b''(v)\,b'(v) - b'''(v) = 0; \tag{9}$$

$$-2\,b'''(v)\,b'(v) + b''(v)\left(b'(v)\right)^2 + 3\,a''(u)\left(b'(v)\right)^2 + \tag{10}$$
$$2\,a''(u)\,b''(v) - 3\,a''(u)\left(a'(u)\right)^2 - \left(a'(u)\right)^2 b''(v) +$$
$$2\,a'''(u)\,a'(u) - (a''(u))^2 - \left(b''(v)\right)^2 - b^{(4)}(v) + a^{(4)}(u) = 0;$$

$$-5\,a''(u)\,a'(u) - 3\,a'(u)\,b''(v) + 5\,a'''(u) = 0 \tag{11}$$

З (9) та (11) слідує, що функції $a(u)$, $b(v)$ є лінійними функціями. Перевіркою можна переконатися, що такі функції задовольняють і рівняння (10). Отже, $E(u,v) = C_3e^{C_1u+C_2v}$, C_1, C_2, C_3 - const.

Так як на J^0 у нас 3 степені свободи , на $\Im$-2, а на $\Im^{(1)}$ -1, то бачимо, що розмірність простору розв'язків дорівнює 6.

Як відомо, повна кривина може бути обчислена за формулою Гауса

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

або в розгорнутому вигляді

$$K = \frac{1}{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^2}\times$$
$$\times\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\partial^2_{uu}g_{22} + \partial^2_{uv}g_{12} - \frac{1}{2}\partial^2_{vv}g_{11} & \frac{1}{2}\partial_u g_{11} & \partial_u g_{12} - \frac{1}{2}\partial_v g_{11} \\ \partial_v g_{12} - \frac{1}{2}\partial_u g_{22} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}\partial_v g_{22} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\partial_v g_{11} & \frac{1}{2}\partial_u g_{22} \\ \frac{1}{2}\partial_v g_{11} & g_{11} & g_{12} \\ \frac{1}{2}\partial_u g_{22} & g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}$$

Враховуючи, що $g_{11} = g_{22} = E(u,v) = C_3 e^{C_1 u + C_2 v}$, $g_{12} = 0$ маємо, що $K = 0$.

Отже, при геодезичній деформації метрики ds^2 для поверхонь нульової гаусової кривини розмірність простору розв'язків дорівнює 6 і лише для них. Що і треба було довести. □

Література

[1] *Синюков Н.С., Гаврильченко М.Л.* Бесконечно малые геодезические деформации поверхностей //Третья респ. конференция математиков Белоруссии, Минск, – 1971.

[2] *Радулович Ж.,Микеш Й, Гаврильченко М.Л.* Геодезические отображения и деформации римановых пространств //Одесса, Оломоуц – 1997.– С.127

[3] *Каган В.Ф.* Основы теории поверхностей //М.-Л.:ОГИЗ Гостехиздат – 1947.– т.1– 1948.– т.2

[4] *Фоменко В.Т.* Об однозначной определенности замкнутых поверхностей относительно геодезических отображений //Доклады академии наук – 2006.– т.407, №4. – Pp.453-456.

[5] *Kruglikov B., Lychagin V.* Multi-brackets of differential operators and compatibility of PDE systems//C. R. Acad. Sci. Paris,Ser.I – 2006.– 342 – Pp.557–561.