Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 431-442

УДК 512.662.5

Ю. В. Шарко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Імпульсні градієнтні системи

В роботі розглядається система диференціальних рівнянь з імпульсною дією побудована в області евклідового простору R^n . В ході дослідження якісної поведінки інтегральних кривих цієї системи приводиться критерій існування замкнених орбіт і умова існування їх орбітальної стійкості.

Investigate system of di erential equations with impulse action. Gradient system of di erential equations is considered in domain of Euclidean space R^n. By the investigation of the qualitative behaviour of integral curves of this system is given the criterion of existence of closed orbits and the condition of their orbital stability.

1. Вступ.

За останні 20 років бурхливо розвивається теорія диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Рівняння такого типу використовують для опису реальних фізичних процесів, які миттєво змінюють свою поведінку. Основи теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією були закладені в Києві М.М. Криловим, М.М.Боголюбовим і Ю.О. Митропольским. Визначальний вклад в розвиток теорії диференціальних рівнянь з імпульсною вніс А.М. Самойленко. Найбільш яскраві результати в цій області висвітлена в монографії А.М. Самойленка та М.О. Перестюка [1] .

Ми розглядаємо в області евклідового простору R^n дві градієнтні системи диференціальних рівнянь для однієї функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ але відносно різних скалярних добутків в R^n. Природнім чином виникає система диференціальних рівнянь з імпульсною дією (розривна динамічна система з "биттям") [1], [2]. Ми даємо опис поведінки її траєкторій, приводимо топологічний критерій існування, так званих, замкнених траєкторій та доводимо одну теорему про їх орбітальну стійкість. На завершення хочу подякувати Ользі Сергіївні Черніковій за можливість познайомитися з чудовим розділом сучасної математики - диференціальними рівняннями з імпульсною дією.

2. Попередні відомості.

Ми наводимо деякі визначення і твердження, якими будемо користуватися і які можна знайти в літературі. Нагадаємо, що функція $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка задана в області D з R^n називається диференційованою (класу C^∞, якщо у неї існують всі частинні похідні .

Точка $y \in D$ називається **критичною точкою** функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо частинні похідні $\partial f(y)/\partial x$ функції в цій точці рівні нулеві.

Точка $y \in D$ називається **регулярною точкою** функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо хоча б одна частинна похідна $\partial f(y)/\partial x$ функції в цій точці відмінна від нуля. Нехай a належить множині значень функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Замкнена множина $f^{-1}(a) = M_a$ називається **поверхнею рівня функції**.

Якщо на поверхні рівня (взагалі кажучи незв'язною) $f^{-1}(a)$ функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не лежать критичні точки то така поверхня рівня називається **гіперповерхнею**.

Нехай в R^n задана додатньо визначена, симетрична, невироджена білінійна форма $B(X, Y)$ (скалярний добуток). Якщо функція $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$

задана в області D з R^n, тоді в D можна побудувати векторне **поле градієнта** $\overrightarrow{grad_B} f(x)$, яке визначається з рівності

$$B(\overrightarrow{grad_B} f(x), Y) = Y(f(x)),$$

де Y - довільне векторне поле в D, $Y(f(x))$ - похідна функції
$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ вздовж поля Y в точці x. Відомо [3,4], що поле $\overrightarrow{grad_B} f(x)$ ортогональне (відносно форми $B(X,Y)$) поверхням рівня функції
$z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, а його інтегральні криві направлені в сторону зростання функції.

Позначимо через $\sum(f)$ - множину всіх критичних точок функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. **Теорема Сарда** стверджує що образ $f(\sum(f))$ є замкнена множина і має на прямій міру нуль [5].

Нехай $F_o(x)$ і $F_1(x)$ - два неперервних відображення компактного простору K в топологічний простір L. Кажуть, що відображення $F_o(x)$ і $F_1(x)$ - **гомотопні**, якщо існує неперервне сімейство неперервних відображень $G_t(x), t \in [0,1]$ із K в L для якого $G_o(x) = F_o(x)$, $G_1(x) = F_1(x)$.

Для неперервного відображення $F:K \longrightarrow K$, де K - компактний простір можна за допомогою груп гомологій простору K можна визначити число **Лєфшеця** $\Lambda(F)$ [5]. Це число використовують для відповіді на питання про існування нерухомих точок відображення F.

Ейлерову характеристику компактного простору K теж можна визначити через групи гомологій простору K [5].

Користуючись двома різними скалярними добутками в R^n, можна побудувати в області евклідового простору R^n

дві градієнтні системи диференціальних рівнянь для однієї функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Природнім чином виникає система диференціальних рівнянь з імпульсною дією (розривна динамічна система з "биттям").

Дослідження якісної поведінки інтегральних кривих цієї розривна динамічна система з "биттям"приводить до двох наслідків:

a) Топологічні інваріанти (ейлерова характеристика) гіперповерхонь функції f дають критерій існування, розривної динамічної системи з "биттям"так званих, замкнених орбіт .

b) Умова притягування для відповідної нерухомої точки гомеоморфізму, являється достатньою для того щоб замкнена орбіта розривної динамічної системи з "биттям" була орбітально стійкою.

3. Імпульсні градієнтні системи .

Нехай D^n - область в R^n обмежена гладкою компактною зв'язною гіперповерхнею Ω. Припустимо, що в $\overline{D} = D^n \bigcup \Omega$ задана гладка функція
$f : \overline{D} \longrightarrow [0, 1]$ з скінченою кількістю критичних точок, що лежать в D^n і $f^{-1}(0) \subset D^n$, $f^{-1}(1) = \Omega$. Відомо, що скалярний добуток в R^n задається невиродженою, симетричною, додатньо визначеною білінійною формою $B = B(a, b)$. Користуючись різними скалярними добутками в D^n ми можемо для однієї і тієї ж гладкої функції $f : \overline{D} \longrightarrow [0, 1]$, задавати різні векторні поля $grad_B f$. Цією обставиною ми скористаємося, для побудови в D^n градієнтної динамічної системи з імпульсною дією.

Нагадаємо, що **градієнтне векторне поле** $grad_B f$ **відносно скалярного добутку** $B = B(a, b)$, заданого в D^n визначається з рівності

$$B(grad_B f(x), Z) = Z(f(x)),$$

де Z - довільне векторне поле в D^n, а $Z(f(x))$ - похідна в точці $x \in D^n$ функції f вздовж поля Z.

Зауваження 3.1. *Незалежно від скалярного добутку $B = B(a, b)$, ненульовий вектор в точці $x \in D^n$ з векторного поля $grad_B f$ утворює з дотичним вектором до поверхні рівня функції f в цій точці ненульовий кут. Іншими словами, інтегральна крива векторного поля $grad_B f$, що проходить через точку $x \in D^n$ перетинає поверхню рівня функції f в цій точці під ненульовим кутом.*

Нехай зафіксована гладка функція $\overline{D} = D^n \bigcup \Omega$ $f : \overline{D} \longrightarrow [0, 1]$ з скінченою кількістю критичних точок, що лежать в D^n і $f^{-1}(1) = \Omega$, $f^{-1}(0) \subset D^n$. Припустимо, що $0 = c_1 < c_2 < ... < c_{k-1} < c_k < 1$ - всі критичні значення функції f. Виберемо регулярні значення функції f

$$0 < p_1 < q_1 < c_2 < p_2 < q_2 < c_3 < ... < c_{k-1} < p_{k-1} < q_{k-1} < c_k < p_k < 1,$$

і розглянемо гіперповерхні

$$M_{p_i} = f^{-1}(p_i) \text{ та } M_{q_i} = f^{-1}(q_i).$$

Наступний факт добре відомий [6] (ст. 201, теорема 2.2)

Теорема 3.1. *Гіперповерхні M_{p_i} та M_{q_i}, $(i = 1, 2, ..., k-1)$, M_k та Ω - гомеоморфні. Гомеоморфізм $\varphi_i : M_{p_i} \longrightarrow M_{q_i}$, $\varphi_k : M_{p_k} \longrightarrow \Omega$ можна побудувати за допомогою інтегральних кривих довільного векторного поля $grad_B f$. А саме : через точку $x \in M_{p_i}$ проходить інтегральна крива поля $grad_B f$, яка перетинає гіперповерхню M_{q_i} в точці y. Гомеоморфізм φ_i відображає точку x в точку y. Аналогічно для гомеоморфізму $\varphi_k(x)$.*

Гомеоморфізм φ_i залежить від вибору векторного поля $grad_B f$. Очевидно, що має місце рівність $\varphi_i^{-1}(x) \cdot \varphi_i(x) =$

$Id_{M_{p_i}}$. Якщо позначити через $\varphi_{i(grad_{B_1} f)}$ та $\varphi_{i(grad_{B_2} f)}$ гомеоморфізми

$$M_{p_i} \longrightarrow M_{q_i},\ M_{p_k} \longrightarrow \Omega,$$

які побудовані за допомогою градієнтних векторних відносно різних скалярних добутків B_1 і B_2 в R^n, то гомеоморфізм

$$\Phi_i(grad_{B_2} f, grad_{B_1} f) = \varphi^{-1}_{i(grad_{B_2} f)} \cdot \varphi_{i(grad_{B_1} f)}$$

вже не буде тотожнім на M_{p_i}. Має місце наступна лема.

Лема 3.1. *Гомеоморфізм*

$$\Phi_i(grad_{B_2} f, grad_{B_1} f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$$

гомотопний тотожньому відображенню для довільних скалярних добутків B_1 та B_2.

Доведення. З лінійної алгебри відомо, що множина додатньо визначених, симетричних, невироджених білінійних форм утворює випуклу відкриту множину в скінченовимірному евклідовому просторі. Другими словами, якщо B_1 і B_1 - дві додатньо визначені, симетричні, невироджені білінійні форми то для кожного $t \in [0, 1]$ білінійна форма $B_t = tB_1 + (1 - t)B_2$, буде додатньо визначеною, симетричною і невиродженою. Значить, для кожного $t \in [0, 1]$ векторне поле $(grad_{tB_1+(1-t)B_2} f$ коректно задане і являється градієнтним для функції f. Якщо розглянути сімейство гомеоморфізмів

$$\Phi_i(grad_{(1-t)B_2+tB_1} f, grad_{B_1} f) =$$
$$\varphi^{-1}_{i(grad_{(1-t)B_2+tB_1} f)} \cdot \varphi_{i(grad_{B_1} f)} : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i},$$

то очевидно, що воно задає необхідну гомотопію між тотожнім відображенням і гомеоморфізмом $\Phi_i(grad_{B_2} f, grad_{B_1} f) = \varphi^{-1}_{i(grad_{B_2} f)} \cdot \varphi_{i(grad_{B_1} f)}$. $\square$

Взагалі кажучи, відображення $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ може не мати нерухомих точок. Наступна лема дає достатні умови існування у відображення $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ нерухомої точки.

Лема 3.2. *Якщо ейлерова характеристика гіперповерхні $\chi(M_{p_i}) \neq 0$, тоді гомеоморфізм $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ має нерухому точку. Множина нерухомих точок гомеоморфізма $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f)$ є компактна підмножина в M_{p_i}.*

Доведення. Відомо, [7] (стр. 261), що число Лєфшеця для тотожнього відображення довільної гіперповерхні самої в себе дорівнює ейлеровій характеристиці гіперповерхні. Для гомотопних відображень числа Лєфшеця співпадають [7] (стр. 261). За теоремою Лєфшеця[5] (ст. 397) , якщо число Лєфшеця відображення відмінне від нуля, то це відображення має нерухому точку. Множина нерухомих точок завжди замкнена і значить в $M_{p_i} \subset R^n$ вона є компактною [7] (ст. 257). □

Добре відомо [8], що поведінка гомеоморфізму в околі нерухомої точки може бути досить складною. Нам знадобиться для подальшого викладу наступне означення.

Означення 3.1. *Нехай X - компактний простір, $F : X \longrightarrow X$ - гомеоморфізм, у якого точка $y \in X$ є нерухомою точкою відображення F. Скажемо, що точка y є притягуючою, якщо для кожного околу U точки y знайдеться менший окіл $V \subset U$ цієї точки, такий що $F(V) \subset U$.*

Користуючись гомеоморфізмами $\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}$ побудуємо динамічну систему з імпульсною дією в $\overline{D}$.

В наших позначеннях, розгляньмо систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією, які також називають розривними динамічними системами. Спочатку задамо в $\overline{D}^n$ систему звичайних диференціальних рівнянь (в векторних позначеннях)

$$dx/dt = grad_{B_2} f(x).$$

Зафіксуємо гіперповерхні

$$M_{p_i} = f^{-1}(p_i) \text{ та } M_{q_i} = f^{-1}(q_i).$$

Використовуючи попередні побудови, задамо гомеоморфізми

$$\Psi_i = \varphi^{-1}_{i(grad_{B_2} f)} : M_{q_i} \longrightarrow M_{p_i},$$
$$\Psi_k = \varphi^{-1}_{k(grad_{B_2} f)} : \Omega \longrightarrow : M_{p_k}.$$

Користуючись позначеннями монографії [1] покладемо

$$\Gamma = \cup_i M_{q_i} \cup \Omega, \quad \Gamma_o = \cup_i M_{p_i}, \quad A = \Psi_i \cup \Psi_k \quad \text{і } A : \Gamma \longrightarrow \Gamma_o$$

.

Припустимо, що на множині $\overline{D}^n \setminus (M_{q_i} = f^{-1}(q_i) \cup \Omega)$ задана система звичайних диференціальних рівнянь (в векторних позначеннях)

$$dx/dt = grad_{B_1} f(x).$$

Розривну динамічну систему запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} dx/dt &= grad_{B_1} f(x), x \overline{\in} \Gamma, \\ \Delta x \mid_{x \in \Gamma} &= Ax - x = I(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Рух точки в фазовому просторі $\overline{D^n}$ такої системи відбувається по одній з інтегральних траєкторій системи $dx/dt = grad_{B_1} f(x)$ в проміжках між двома послідовними попаданнями цієї інтегральної траєкторії на множину Γ, а в момент попадання точка $x(t)$ "миттєво"переводиться оператором A в точку $y = A(x)$ множини Γ_o.

Таким чином, фактично інтегральні криві належать множинам

$$\mathcal{D}_i = f^{-1}(q_i, q_{i+1}] \text{ та множині } \mathcal{D}_{k-1} = f^{-1}(q_{k-1}, 1].$$

Після попадання інтегральних кривих на множину $M_{q_{i+1}}$ або Ω вони вже будуть належати множині

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

Очевидно, що для траєкторій, які починаються в точках, що належать множині

$$\mathcal{S}_i = f^{-1}(q_i, c_{i+1}) \text{ або } \mathcal{S}_{k-1} = f^{-1}(q_{k-1}, c_k).$$

є дві можливості :

a) потрапити в точку рівноваги, яка відповідає критичній точці функції $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, що належить поверхні рівня $f^(-1(c_i)$;

b) потрапити в точку, що належить множині M_{q_i} або Ω і далі весь час залишатися на множинах

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

Другими словами, буде "биття"інтегральних кривих в множину Γ. Серед інтегральних кривих другого типу можуть бути такі, які після першої "зустрічі"з множиною M_{q_i} або Ω знову повертаються за допомогою відображення A в ту ж саму точку на множині M_{p_i}, яку вони вже "проходили". Назвемо такі інтегральні криві **замкненими**.

Разом з тим серед інтегральних кривих другого типу можуть бути такі, які після першої "зустрічі"з множиною M_{q_i} або Ω повертаються за допомогою відображення A в іншу точку на множині M_{p_i}, ніж ту яку вони вже "проходили". Але після скінченої кількості таких ітерацій вони повертаються знову в ту ж саму точку на множині M_{p_i}, яку вони "проходили перший раз". Назвемо такі інтегральні криві **періодичними**.

І накінець, підмножину інтегральних кривих S другого типу назвемо **інваріантною**, якщо відображення A переводить підмножину S саму в себе.

Користуючись класифікацією точок і інваріантних множин гомеоморфімів можна визначити аналогічні поняття і в нашій ситуації - градієнтній динамічній системі з імпульсною дією. В цій роботі ми цього робити не будемо.

Наступне твердження є наслідком леми 4.2, воно дає достатню умову існування у системи (2) замкненої інтегральної кривої.

Пропозиція 3.1. *Нехай в* $\overline{D}^n$ *задана система* (2)*. Якщо ейлерова характеристика гіперповнрхності* $\chi(M_{p_{i+1}}) \neq 0$, *тоді існує в*

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або в } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

замкнена інтегральна крива . Множина всіх замкнених інтегральних кривих утворює компактну підмножину в

$$\mathcal{E}_i = f^{-1}[p_{i+1}, q_{i+1}] \text{ або в } \mathcal{E}_{k-1} = f^{-1}[p_k, 1].$$

Якщо розглянути довільну інтегральну криву другого типу системи 2 , то із-за "биття"інтегральних кривих говорити про їх стійкість за Ляпуновим не має сенсу, бо вони не задані на всьому проміжку часу від (t_o, ∞). Можна говорити про **орбітальну стійкість** інтегральних кривих другого типу системи 2 [9] (стр. 96).

Означення 3.2. *Якщо* γ *- інтегральна крива другого типу системи* (2)*, то скажемо, що вона орбітально стійка, якщо довільна інтегральна крива* γ_1 *в певний момент часу проходить досить близько біля* γ*, то вона залишається поблизу неї і надалі (після застосування відображення A).*

Теорема 3.2. *Нехай в* $\overline{D}^n$ *задана система* (2). *Припустимо, що* γ *- замкнена інтегральна крива системи* (2) *, яка перетинає множину* M_{p_i} *в точці* x. *Розгляньмо гомеоморфізм*

$$\Phi_i(grad_{B_2}f, grad_{B_1}f) : M_{p_i} \longrightarrow M_{p_i}.$$

Якщо точка x *- притягуюча нерухома точка то інтегральна крива* γ *буде орбітально стійкою.*

Доведення. Точка x завжди має окіл U який не перетинає критичну поверхню рівня$f^{-1}(c_{i-1}$ функції f Нехай точка y знаходиться в цьому околі. Інтегральна крива γ_1, що проходить через точку y буде очевидно інтегральною кривою другого типу системи (2). Використовуючи той факт, що довжини відрізків інтегральних кривих γ і γ_1 від точок x і y і до перетину з множиною M_{q_i} є скінченими, можна зробити висновок, що γ_1 буде близькою до γ. Це завжди можна зробити, зменшуючи величину околу U. Оскільки точка x є притягуючою нерухомою точкою, то і після застосування відображення A наступна інтегральна крива буде близькою до γ. $\square$

Література

[1] *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. Киев:Вища школа, 1987 - С. 287.

[2] *Перестюк Н.А., Черникова О.С.* Устойчивость решений импульсных систем // Украинский мат. журнал -1997.- № 49.- С. 98-111.

[3] *Торп Д.* Начальные главы дифференциальной геометрии. М.:Мир, 1982 - С. 359 .

[4] *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М. : "Мир", 1970 - С. 412.

[5] *Борисович Ю., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.* Введение в топологию. М.:Наука, 1995 - С. 415.

[6] *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.:Мир, 1979 - С. 279.

[7] *Дольд А.* Лекции по алгебраической топологии. М.:Мир, 1976 - С. 403.

[8] *Палис Ж., Димелу В.* Геометрическая теория динамических систем. М.:Мир, 1986 - С. 301.

[9] *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.:Издательство иностранной литературы, 1961 - С. 387.