Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2006, т.3, №3, 474-486

І. А. Юрчук

Київський національний університет ім. Т.Шевченка, Київ
E-mail: iyurch@ukr.net

Топологічна еквівалентність функцій з класу $F(D^2)$

We construct the combinatorial invariant of functions from a $F(D^2)$ class. Necessary and sufficient condition for a topological equivalence of such functions is obtained in terms of their invariants.

Ключові слова: *pseudoharmonic functions, a topological equivalence*

Вступ

Проблемі дослідження умов топологічної еквівалентності функцій присвячені роботи [1, 2, 5, 6, 9–13, 19] та ін. Відмітимо, що переважна більшість розв'язків топологічних задач такого типу, зводиться до дослідження комбінаторних об'єктів. Для прикладу, у роботі [12] автори, вивчаючи проблему класифікації полів Морса-Смейла на замкнених двовимірних многовидах, будують спін графи, ізоморфізм яких є необхідною та достатньою умовою топологічної еквівалентності полів. У роботах Арнольда [1, 11] при класифікації M–морсифікацій та біфуркацій виникає такий комбінаторний об'єкт, як змії (перестановки спеціального типу).

В даній роботі будемо розглядати неперервні функції, які задані на одиничному диску $D^2 \subset \mathbb{C}$ і задовольняють умовам:

- звуження цих функцій на границю диску ∂D^2 є неперервні функції з *скінченим* числом локальних екстремумів (максимумів та мінімумів);
- у внутрішності диску ці функції мають скінчене число критичних точок, які є сідлами (локальне представлення функції в околі сідла з точністю до неперервної заміни координат має наступний вигляд $f = Rez^n + const$, де $z = x + iy$).

Позначимо цей клас функцій через $F(D^2)$. Даний клас функцій співпадає з класом псевдогармонічних функцій, що задані на D^2 [4, 7, 14–18].

Основна мета роботи – побудувати інваріант функцій з класу $F(D^2)$ та знайти необхідні та достатні умови їх топологічної еквівалентності.

1. Основні означення.

Нехай f деяка функція з класу $F(D^2)$. Надалі, ми будемо розглядати орієнтовані диски та гомеоморфізми, що ***зберігають орієнтацію***. Відомо [8, с.254], якщо E_1, E_2 – диски і $h : \partial E_1 \to \partial E_2$– гомеоморфізм, то існує гомеоморфізм $H : E_1 \to E_2$ такий, що $H|_{\partial E_1} = h$.

Означення 1.1. *Дві неперервні функції $f, g : D^2 \to \mathbb{R}$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h_1 : D^2 \to D^2$ та $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$.*

Нагадаємо, що точка $(x_0, y_0) \in IntD^2$ гладкої функції f називається критичною, якщо $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$. Число c називається критичним (регулярним) значенням функції f, якщо множина рівня $f^{-1}(c)$ містить критичні точки функції (не містить критичних точок функції та гомеоморфна незв'язному об'єднанню відрізків, які перетинаються з границею ∂D^2 лише по своїх кінцях).

Відомо, що лініями рівня критичного значення функції з класу $F(D^2)$ є дерева (взагалі кажучи незв'язні) [14, с.430].

Означення 1.2. *Значення c називається квазірегулярним значенням функції f, якщо воно не є ні регулярним, ні критичним.*

Зауваження 1.1. *Із означень випливає, що лінії рівня квазірегулярного значення містять лише граничні критичні точки, а лінії рівня критичного, як критичні, так і граничні критичні точки.*

Згідно Теореми 4.1 [17, с.28] для довільної граничної критичної точки існує канонічний гомеоморфізм її околу на півдиск з центром в даній точці і скінченим числом променів, що виходять з нього. Для довільної граничної критичної точки x число областей, на які розбито півдиск, більше 2. Відмітимо ту особливість, що у випадку, коли число областей непарне, то області, які прилягають до границі ∂D^2, мають один і той самий знак. Звідки випливає, що точка x є локальним екстремумом функції $f|_{\partial D^2}$. Зрозуміло, що у випадку мінуса дана точка є локальним максимумом, а у випадку плюса – мінімумом.

Той факт, що число граничних критичних точок скінчене, випливає з рівності Морса [4, с.50], яка має вигляд

$$2 - \nu = m - S - s,$$

де ν – число граничних кривих області (в нашому випадку $\nu = 1$), m – число локальних мінімумів на границі ∂D^2, S та s – числа критичних точок та граничних критичних точок, кожна з яких враховується зі своїм степенем. Під степенем (граничної) критичної точки розуміють число $m-1$,

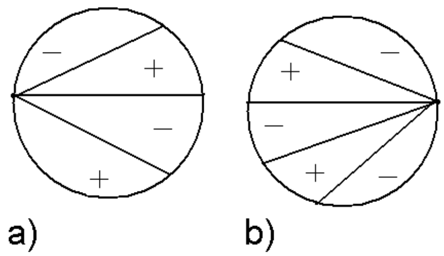

Рис. 1. У випадку a) точка є регулярною, а у випадку b) – локальним максимумом функції $f|_{\partial D^2}$.

де m – це число секторів зі знаком мінус, на які розбито її канонічний окіл.

Зауважимо, що у випадку, коли гранична критична точка є локальним мінімумом, в рівності Морса її враховуємо лише раз, як граничну критичну точку з відповідним їй степенем.

2. Комбінаторний інваріант та умови топологічної еквівалентності функцій з класу $F(D^2)$.

Нагадаємо означення графу Кронрода–Ріба.

Нехай M гладкий компактний многовид. Розглянемо деяку гладку функцію $f : M \to \mathbb{R}$ із скінченим числом критичних точок. Далі, означимо як шар зв'язну компоненту поверхні рівня $f^{-1}(a)$, де $a \in \mathbb{R}$. Тоді, многовид M є об'єднанням всіх шарів функції f. Введемо відношення еквівалентності, як властивість точки належати одному шару. Отримана фактор множина гомеоморфна скінченому графу, який назвемо графом Кронрода - Ріба і позначимо через $\Gamma_{K-R}(f)$.

Зауважимо, що побудова графу Кронрода - Ріба для многовиду з краєм є питання відкрите, а оскільки функції з класу $F(D^2)$ визначені на диску, то виникає необхідність ввести інший інваріант.

Опишемо ***побудову комбінаторної діаграми***, що відповідає деякій функції f з класу $F(D^2)$:

1) Розглянемо граф Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$, що відповідає звуженню функції f на границю ∂D^2. Він ізоморфний колу з парним числом вершин, степінь яких рівний 2.
2) Нехай a_i – критичні значення функції, а c_j – квазірегулярні. Додамо до $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ ті компоненти зв'язності множин

$$f^{-1}(a_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(a_k) \cup f^{-1}(c_1) \cup f^{-1}(c_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(c_l),$$

ліній рівня, які містять критичні та граничні критичні точки. Зрозуміло, що в цьому випадку на графі Кронрода-Ріба $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ з'являться нові вершини. Позначимо через

$$P(f) = \Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2}) \bigcup_i \widehat{f}^{-1}(a_i) \bigcup_j \widehat{f}^{-1}(c_j),$$

де $\widehat{f}^{-1}(a_i) \subset f^{-1}(a_i)$, $\widehat{f}^{-1}(c_j) \subset f^{-1}(c_j)$ – компоненти з'язності множин рівня, що містять критичні та граничні критичні точки.
3) Встановимо на вершинах комбінаторної діаграми $P(f)$ частковий порядок за правилом: $v_1 \lesseqgtr v_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \lesseqgtr f(x_2)$, де $v_1, v_2 \in P(f)$, x_1, x_2 точки, що відповідають вершинам v_1, v_2. Вершини, в яких функція приймає однакові значення, будемо вважати непорівнюваними.

Оскільки, дане відношення часткового порядку антирефлексивне, антисиметричне і транзитивне, то встановлений частковий порядок є строгим [3, с.36].

Зауважимо, що скориставшись гомеоморфізмом числової осі, значення функції в локальних екстремумах функції $f|_{\partial D^2}$ будемо вважати цілими, а критичні та квазірегулярні – дробовими.

Отже, конструкцію $P(f)$ разом із строгим частковим порядком будемо називати комбінаторною діаграмою функції f з класу $F(D^2)$. І згідно побудови, $P(f)$ – це скінчений граф із заданим строгим частковим порядком на вершинах, степінь яких більший одиниці.

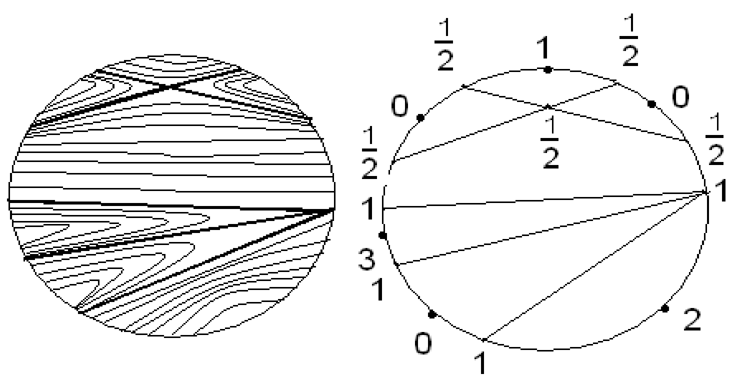

Рис. 1. Діаграма деякої функції з класу $F(D^2)$.

Зауважимо, що під графом ми розуміємо топологічний граф (CW - комплекс з 0 та 1 – вимірними клітинами, де 0−вимірні клітини – вершини дерева, а 1−вимірні – ребра). Нагадаємо декілька означень. Дві вершини v_1 та v_2

деякого графа G називаються суміжними, якщо вони є кінцевими вершинами одного і того ж ребра. Відображення ϕ графа $G \subset \mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^2$ називається вкладенням, якщо $\phi(x)$ та $\phi(y)$ з'єднані відрізком в $\mathbb{R}^2$ тоді і тільки тоді, коли x та y з'єднані ребром в G і жодні два відкриті відрізки в $\mathbb{R}^2$ не мають спільних точок.

Зауважимо, що при вкладенні ϕ в околі кожної вершини $\phi(v)$, де $v \in G$, виникає циклічний порядок ребер e_i (вершин v_i), що їй інцидентні (суміжні з нею).

Означення 2.1. *$\mathcal{C}r$– підграфом діаграми $P(f)$ назвемо деякий підграф $q(f)$, який задовольняє умовам:*

- *$q(f)$ – простий цикл;*
- *довільна пара суміжних вершин $v_i, v_{i+1} \in q(f)$ є порівнянною.*

Нехай v деяка вершина діаграми $P(f)$, а $\{v_i\}$, $i = \overline{1,k}$, – множина суміжних з нею вершин. Тоді, існують точки x та x_i, що належать диску D^2 і відповідають вершинам v та v_i. Позначимо через X_i - множину точок, що відповідають ребру $e(v, v_i)$ (зрозуміло, що множини X_i гомеоморфні відрізку) і $X_i \in D^2$. Розглянемо такі випадки:

Випадок 1: $x \in IntD^2$. Тоді $f(x) = f(x_i) = a$, де $i = \overline{1,k}$, a - деяке критичне значення. Тому вершини v,$v_1, v_2, \dots, v_k$ є непорівнюваними між собою. Оскільки, лінією рівня критичного значення a є скінченне дерево, то всі його вершини є непорівнюваними.

Випадок 2: $x \in \partial D^2$. В даному випадку точка x є або регулярною, або локальним екстремумом функції $f|_{\partial D^2}$, яка є неперервною та монотонно зростаючою (спадною) між сусідніми локальними екстремумами. Тому, серед множин X_i існують такі, що функція на них монотонно зростає (спадає). Оскільки, коло є замкненою жордановою кривою, то таких множин в точності дві X_j та X_k кінцями яких є точки x_j та x_k. Звідки випливає, що серед вершин $\{v_i\}$ існує в точності дві вершини v_j та v_k, які є порівнянними з вершиною v. Оскільки для кожної з вершин v_j та v_k існує в точності дві вершини, які є порівнянними з нею, то дані вершини утворять цикл. Зрозуміло, що вершина v разом з вершинами v_j та v_k належить $q(f)$–циклу.

З того, що діаграма $P(f)$ побудована за деякою функцією з класу $F(f)$, випливає декілька її властивостей.

Основні властивості діаграми $P(f)$:

C1) існує $\mathcal{C}r$-підграф $q(f) \in P(f)$;

C2) $\overline{P(f) \setminus q(f)} = \bigcup\limits_i \Psi_i$, $\Psi_j \bigcap \Psi_i = \varnothing$, де $i \neq j$, Ψ_i – дерева такі, що для кожного індексу i довільні дві вершини $v', v'' \in \Psi_i$ є непорівнянними;

C3) підмножина $q' \subset q(f)$ така, що $q' = \bigcup\limits_i (P(f) \setminus \overline{\Psi}_i)$ містить лише вершини степеня 2;

C4) існує вкладення $\psi : P(f) \to D^2$ таке, що

$$\psi(P(f)) \subset D^2, \quad \psi(q(f)) = \partial D^2, \quad \psi(P(f) \setminus q(f)) \subset IntD^2;$$

C5) множина $D^2 \setminus \psi(P(f))$ складається з незв'язного об'єднання множин θ_i таких, що $\partial\overline{\theta}_i$ містить одну або дві граничні дуги ∂D^2;

C6) для $\forall v \in P(f) \setminus q(f)$ справедливо $deg(v) = 2s \geq 4$.

Справедливість $C1$ та $C2$ випливає з наведених вище міркувань. Причому, з умов $C1$ та $C2$ слідує єдиність $\mathcal{C}r$-підграфу $q(f)$.

Для доведення $C3$ необхідно розглянути множину

$$\bigcup_i (P(f) \setminus \overline{\Psi}_i)$$

і скористатись тим, що діаграма

$$P(f) = \Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2}) \bigcup_i \Psi_i,$$

де через Ψ_i позначено компоненти зв'язності множин $\widehat{f}^{-1}(a_i)$ ($\widehat{f}^{-1}(c_j)$) ліній рівня, які містять критичні та граничні критичні точки. А граф $\Gamma_{K-R}(f|_{\partial D^2})$ містить згідно побудови лише вершини валентності 2.

Зауважимо, що $C4$ випливає з того, що $P(f)$ діаграма функції f, яка задана на D^2. Слід також відмітити, що $C5$ є наслідком $C2$ і $C4$. Причому, $\partial\overline{\theta}_i$ містить одну дугу ∂D^2, якщо існує єдиний індекс k такий, що $\psi(\Psi_k)\bigcap\partial\overline{\theta}_i \neq \varnothing$, і $\partial\overline{\theta}_i$ містить дві дуги ∂D^2 у випадку, коли існують індекси k_1 та k_2 такі, що

$$\psi(\Psi_{k_1})\bigcap\partial\overline{\theta}_i \neq \varnothing \text{ і } \psi(\Psi_{k_2})\bigcap\partial\overline{\theta}_i \neq \varnothing\ .$$

Тоді, як існування трьох і більше індексів виключено, оскільки у $IntD^2$ з'являться критичні точки, що не є сідлами, а це не можливо.

Лема 2.1. *Якщо $P(f) \subset \mathbb{R}^3$ діаграма деякої функції $f \in F(D^2)$, то вкладення ψ таке, що $\psi(P(f)) \subset D^2, \psi(q(f)) = \partial D^2$ і $\psi(P(f) \setminus q(f)) \subset IntD^2$ єдине з точністю до гомеоморфізму диску D^2 на себе.*

Доведення. Доведемо єдність такого вкладення ψ методом від супротивного.

Припустимо, що існує два вкладення ψ_1, ψ_2 такі, що $\psi_1(P(f))$, $\psi_2(P(f)) \subset D^2$ і $\psi_1 \neq \psi_2$. Позначимо через Θ (Θ') множину $D^2 \setminus \psi_1(P(f))$ ($D^2 \setminus \psi_2(P(f))$). Згідно $C5$ множина Θ (Θ') є незв'язним об'єднанням скінченої кількості підмножин θ_i (θ'_j). Не обмежуючи загальності, розглянемо цикл вершин $\{v_i\}$ діаграми $P(f)$ разом з ребрами, що їм інцидентні, образи яких при вкладенні ψ_1 обмежують деяку однозв'язну область θ_i, а при вкладенні ψ_2 — область θ'_j, яка не є однозв'язною. Припустимо, що $\theta'_j = \widetilde{\theta}'_1 \bigcup \widetilde{\theta}'_2$, $\widetilde{\theta}'_1 \bigcap \widetilde{\theta}'_2 = \varnothing$. Це означає, що серед вершин $\{v_i\}$ існує деяка вершина V така, що циклічний порядок вершин $\psi_1(V_i)$ не дорівнює циклічному порядку $\psi_2(V_i)$, де V_i суміжні з V. Нехай вершини V_k та V_j, які є суміжними з V та належать циклу $\{v_i\}$, і такі, що $\psi_1(V_k)$ та $\psi_1(V_j)$ є сусідніми в циклічному порядку $\psi_1(V_i)$, а пару вершини $\psi_2(V_k)$ та $\psi_2(V_j)$ розбиває деяка вершина $\psi_2(V_r) \in \psi_2(P(f))$. Оскільки справедливе $C5$, то цикл $\{\psi_2(v_i)\}$ містить вершини підграфу $\psi_2(q(f))$. Вершина $\psi_2(V_r)$ не може належати множині $\{\psi_2(v_i)\} \setminus \psi_2(q(f))$, оскільки з'явиться цикл. Розглянемо випадок, коли $\psi_2(V_r)$ співпадає з однією з вершин множини

$$\psi_2(\{v_i\} \setminus (\overline{\{v_i\} \setminus q(f)})) \supset q'.$$

Проте, це суперечить $C3$ (дана множина містить лише вершини степеня 2). Отже, $\psi_2^{-1}(V_r) \notin \{v_i\}$, що не можливо. □

Теорема 2.1. *Дві функції f і g з класу $F(D^2)$ є топологічно еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм комбінаторних діаграм $\varphi : P(f) \to P(g)$, який зберігає строгий частковий порядок, що заданий на них.*

Доведення. Необхідність. Нехай дві функції $f : D^2 \to \mathbb{R}$ і $g : D^2 \to \mathbb{R}$ з класу $F(D^2)$ топологічно еквівалентні. Тоді існують гомеоморфізми $h_1 : D^2 \to D^2$ і $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $f = h_2^{-1} \circ g \circ h_1$. Для даних функцій існують комбінаторні діаграми $P(f)$ та $P(g)$, на яких виникає строгий частковий порядок, який відповідає функціям f та g. Згідно Леми 2.1 для $P(f)$ та $P(g)$ існують єдині вкладення ψ_1 та ψ_2 такі, що $\psi_1(P(f)) \subset D^2$ і $\psi_2(P(g)) \subset D^2$. Тоді, покладемо $\varphi =$

$\psi_2^{-1} \circ h_1 \circ \psi_1$. Зрозуміло, що $\varphi : P(f) \to P(g)$ є шуканий ізоморфізм діаграм.

Достатність. Нехай задано дві неперервні функції $f : D^2 \to \mathbb{R}$ і $g : D^2 \to \mathbb{R}$, з класу $F(D^2)$ і $P(f)$, $P(g)$ відповідні їм діаграми такі, що існує ізоморфізм $\varphi : P(f) \to P(g)$, який зберігає строгий частковий порядок (якщо $v \to v'$, $v \in P(f)$, $v' \in P(g)$, то $deg(v) = deg(v')$). Зрозуміло, що ізоморфізм φ переводить локальні максимуми (мінімуми) функції $f|_{S^1}$ в локальні максимуми (мінімуми) функції $g|_{S^1}$ і зберігає значення функцій в них. Згідно $C1$ для кожної з діаграм існують підграфи $q(f)$ та $q(g)$ і $\varphi : q(f) \to q(g)$. Використаємо ізоморфізм φ для побудови гомеоморфізму h_1 границі диску ∂D^2 в себе так, щоб для функцій $f|_{\partial D^2}$ і $g|_{\partial D^2}$ було справедливо $f|_{\partial D^2} = g|_{\partial D^2} \circ h_1$.

Розглянемо діаграми $P(f) \in \mathbb{R}^3$ та $P(g) \in \mathbb{R}^3$, згідно Леми 2.1 для $P(f)$ та $P(g)$ існують єдині вкладення ψ_1 та ψ_2 такі, що $\psi_1(P(f)) \subset D^2$, $\psi_2(P(g)) \subset D^2$. Згідно $C5$, множина $\Theta = D^2 \setminus \psi_1(P(f))$ ($\Theta' = D^2 \setminus \psi_2(P(g))$) є незв'язним об'єднанням скінченої кількості підмножин θ_i (θ'_j), замикання кожної з них гомеоморфне замкненому диску. За побудовою гомеоморфізм $h_1 = \psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1}$ задано на границях цих підмножин θ_i (θ'_j), тому для гомеоморфізму h_1 існує продовження з границь множин θ_i (θ'_j) в їх внутрішність, щоб мала місце рівність $f = g \circ h_1$. $\square$

На рисунку 3 зображені діаграми двох функцій з класу $F(D^2)$, які мають два локальних мінімуми та два локальних максимуми на ∂D^2 і одну граничну критичну точку. Проте, ці дві функції не є топологічно еквівалентними.

Я щиро вдячна В. В. Шарку за постановку задачі, а також І. Власенку, С. Максименку, Є. Полуляху за корисні обговорення та інтерес до роботи.

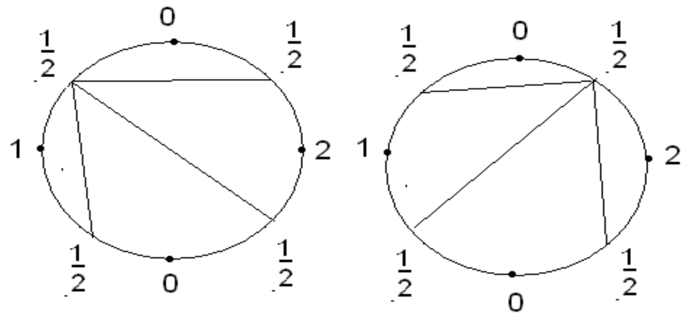

Рис. 2. Діаграми двох топологічно не еквівалентних функцій з класу $F(D^2)$.

Література

[1] *Арнольд В.И.* Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера: УМН., 1992. – Vol. 47, №1(283). – С. 3-45.

[2] *Максименко С.И.* Класификация m – функций на поверхностях//УМЖ– Т.51,№8(1999)–С.1129-1135.

[3] *Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А.* Общая алгебра. Т.1/ под. ред. Скорнякова Л.А.– М.:Наука, 1990 – 592с.

[4] *Морс М.* Топологические методы теории фукций комплексного переменного/ под. ред. Маркушевич А.И.– М:1951. – 247с.

[5] *Ошемков А.А.* Функции Морса на двумерных поверхностях. Кодирование особеностей.// Новые результаты в теории топологической классификации интегрируемых систем.- М.:Наука, 1994, труды МИРАН, т.205 – С.131-140

[6] *Пришляк А.О.* Классификация трехмерных градиентно-подобных динамических систем Морса-Смейла // Тр. Инст. Мат. АНУ, Киев, 1998,- С.35-39.

[7] *Стоилов С.* Лекции о топологических прнципах теории аналитических функций.– М.: Наука, 1964. – 228 с.

[8] *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д.* Поверхности и разрывные группы:Пер. с англ. /Под ред. О.Я.Виро. – М.:Наука,1988. – 688с.

[9] *Шарко В.В.* Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях// Укр.мат.жур – 2003. –Т.55,№5 – С.687-700.

[10] *Шарко В.В.* Функции Морса на некомпактных поверхностях. – Український математичний конгресс. – 2000. – С.56-64.

[11] *Arnold V.I.* Bernoulli – Euler updown numbers, associated with function singularities, their combinatorics and a mathematics //Duke Math.Journ. – 1991.– **63**. №2. – Pp.537–555.

[12] *Bolsinov A.V., Oshemkov A.A., Sharko V.V.* On classification of flows on manifolds.I // Methods of Functional Analysis and Topology, 1996.– Vol.2,no.2 – Pp.51-60

[13] *Bolsinov A. V., Fomenko A. T.* Exact topological classification of Hamiltonian flows on smooth two-dimensional surfaces //(Russian summary) Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. – 235 (1996)

[14] *Boothby W.M.* The topology of regular curve families with multiple saddle points.//Amer.J.Math. – 1951.– **73**. – Pp.405–438.

[15] *Jenkins J.A, Morse M.* Contour equivalent pseudoharmonic functions and pseudoconjugates//Amer.J.Math. – 1952.– **74**. – Pp.23-51.

[16] *Kaplan. W.* Topology of level curves of harmonic functions//Transactions of Amer.Math.Society– vol.63 №3(1948)– Pp.514-522.

[17] *Morse M.* The topology of pseudo-harmonic functions//Duke Math.J.– 1946.–**13**.– Pp.21-42.

[18] *Morse.M., Jenkins.J.* The existence of pseudoconjugates on Riemann surfaces //Fund.Math. – 1952.– **39**. – Pp.269–287.

[19] *Prishlyak A. O.* Regular functions on closed three-dimensional manifolds.//Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Prirodozn. Tekh. Nauki – 2003, no. 8 – Pp.21–24