10. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – **39**, № 3. – С. 657–702.
11. *Дільний В. М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1257–1263.
12. *Винницкий Б. В., Дильный В. Н.* Об обобщении теоремы Берлинга–Лакса // Мат. заметки. – 2006. – **79**, № 3. – С. 362–368.

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 16.04.2008

УДК 517.956.4

Н. Г. Коновенко, В. В. Лычагин

Дифференциальные инварианты нестандартных проективных структур

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. В. Шарко)

We describe projective structures on a line in terms of solutions of the Schrödinger equation. We give a detailed classification of projective geometrical quantities and find the algebras of their differential invariants.

1. Проективные структуры и sl_2-действия. Проективная структура на прямой $\mathbb{R}$ задается атласом, функции перехода в некотором суть проективные (=дробно-линейные) преобразования прямой [1]. Стандартная проективная структура индуцируется вложением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}P^1$ как аффинной части. Алгебра Ли симметрий стандартной структуры изоморфна $sl_2(\mathbb{R})$ и порождена векторными полями: $A = \partial_x$, $B = x^2\partial_x$, $H = 2x\partial_x$. С другой стороны, в силу теоремы Софуса Ли [2], любое представление $\rho\colon sl_2(\mathbb{R}) \to D(\mathbb{R})$ алгебры Ли sl_2 в алгебре Ли $D(\mathbb{R})$ векторных полей на $\mathbb{R}$ локально эквивалентно стандартному. Поэтому проективную структуру можно рассматривать как представление $\rho\colon sl_2(\mathbb{R}) \to D(\mathbb{R})$. В дальнейшем мы обозначаем через A, B, H базис Шевалле в $sl_2(\mathbb{R})$, где $[A,B] = H$, $[H,A] = -2A$, $[H,B] = 2B$, а также его образ в векторных полях при представлении ρ.

Теорема 1. *Каждое представление $sl_2(\mathbb{R})$ в $D(\mathbb{R})$ имеет вид*

$$A = \pm f^2(x)\partial_x, \qquad B = \pm g^2(x)\partial_x, \qquad H = 2f(x)g(x)\partial_x, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — фундаментальная система решений уравнения Шредингера

$$y'' + W(x)y = 0$$

с вронскианом, равным единице, $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 1$.

Отметим, что представления (1), отвечающие разному выбору знаков, эквивалентны и переводятся друг в друга преобразованием: $x \mapsto -x$, $f \mapsto -f$, $g \mapsto g$.

В дальнейшем мы рассматриваем только представления (1), отвечающее $+$, и обозначаем их через $\rho^W_{f,g}$, соответствующую проективную структуру мы обозначаем через Im^W.

Потенциал W уравнения Шредингера, отвечающий представлению ρ, связан с ним естественным образом. А именно, пусть e_1, e_2, e_3 произвольный базис в алгебре Ли $sl_2(\mathbb{R})$ и пусть соответствующие представлению ρ векторные поля имеют вид $e_1 = f_1(x)\partial_x$, $e_2 = f_2(x)\partial_x$, $e_3 = f_3(x)\partial_x$, где x — аффинная координата на $\mathbb{R}$. Обозначим через $\langle f_1, \dots, f_r\rangle$ вронскиан функций $f_1, \dots, f_r$ и пусть $w_1 = \langle f_1\rangle$, $w_2 = \langle f_1, f_2\rangle$, $w_3 = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$, тогда

$$W = \frac{1}{4}[L, x](1), \tag{2}$$

где L — дифференциальный оператор 3-го порядка [3]:

$$L = \frac{w_3}{w_2} \circ \partial_x \circ \frac{w_2^2}{w_3 w_1} \circ \partial_x \circ \frac{w_1^2}{w_2} \circ \partial_x \circ \frac{1}{w_1}.$$

2. Эквивалентность проективных структур. Пусть представления $\rho^W_{f,g}$ и $\rho^{\widetilde{W}}_{\widetilde{f},\widetilde{g}}$ определены на интервалах U и V и пусть t и s суть ограничения аффинной координаты x на U и V соответственно. Пусть $\alpha\colon U \to V$, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, и $T = (\alpha^{-1})^*(t) \in C^\infty(V)$.

Теорема 2. *Диффеоморфизм $\alpha\colon U \to V$ переводит представление $\rho^W_{f,g}$ в $\rho^{\widetilde{W}}_{\widetilde{f},\widetilde{g}}$, т. е. $\rho^{\widetilde{W}}_{\widetilde{f},\widetilde{g}} = \alpha_* \cdot \rho^W_{f,g}$, тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{f} = \tau \cdot (\alpha^{-1})^*(f), \qquad \widetilde{g} = \tau \cdot (\alpha^{-1})^*(g), \tag{3}$$

и

$$\widetilde{W} = \tau^{-4} \cdot (\alpha^{-1})^*(W) - \tau^{-1}\tau'', \tag{4}$$

где $\tau(s) = (T'(s))^{-1/2}$.

Эта теорема показывает, что если решения уравнения Шредингера $f(x)$ понимать как $(-1/2)$-формы, $w = f(x)(dx)^{-1/2}$, то преобразование (3) на пространствах решений эквивалентно естественному преобразованию форм $w \mapsto (\alpha^{-1})^*(w)$ при диффеоморфизмах.

Следствие 1. *Каждое ненулевое решение $\tau(s)$ уравнения Шредингера $\tau'' + \widetilde{W} \cdot \tau = 0$ на интервале V определяет эквивалентность проективной структуры* $\mathrm{Im}^{\widetilde{W}}$ *стандартной* Im^0.

Следствие 2. *Если $W < 0$ на замкнутом интервале $[a, b]$, то проективная структура* Im^W *эквивалентна стандартной на (a, b).*

Следствие 3. *Если $W > (\pi/(b-a))^2$ на замкнутом интервале $[a, b]$, то проективная структура* Im^W *не эквивалентна стандартной на (a, b).*

П р и м е р 1. Проективные структуры Im^W, где $W = \lambda x^{-4}$, $\lambda > 0$, на любом как угодно малом интервале $(0, a)$, $a > 0$, не эквивалентны стандартной.

3. Проективные величины. Расслоение проективных геометрических величин для заданной структуры Im^W — это однородное расслоение $\pi\colon E \to \mathbb{R}$, в которое поднято действие $\rho^W_{f,g}$ алгебры Ли $sl_2(\mathbb{R})$ [4]. Мы рассмотрим 1-мерные расслоения $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi\colon (x, u) \to x$, и обозначим через $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$ поднятия векторных полей A, B, H в расслоение π.

Теорема 3. *В области, где $A \neq 0$, поднятие представления $\rho^W_{f,g}$ реализуется одной из следующих форм:*

$$\overline{A} = f^2(x)\left(\partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u\right), \quad \overline{B} = g^2(x)\left(\partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u\right), \quad \overline{H} = 2f(x)g(x)\left(\partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u\right), \tag{5}$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{A} = f^2(x)\left(\partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u\right),\\
&\overline{B} = g^2(x)\left(\partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u\right) + \frac{2\varphi}{\varphi_u}\left(\frac{g(x)}{f(x)} + c\varphi\right)\partial_u,\\
&\overline{H} = 2f(x)g(x)\left(\partial_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_u}\partial_u\right) + \frac{2\varphi}{\varphi_u}\partial_u,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $\varphi = \varphi(x, u)$ — гладкая функция и $\varphi_u \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Геометрические величины (т. е. сечения расслоения π), sl_2-действия на которых определены (5) и (6), мы будем относить к классу T_φ^W, R_φ^W, если $c \neq 0$, и S_φ^W, если $c = 0$, соответственно.

Отметим, что диффеоморфизм α, переводящий представления $\rho_{f,g}^W$ в $\rho_{\widetilde{f},\widetilde{g}}^{\widetilde{W}}$, допускает естественное поднятие до изоморфизма $\overline{\alpha}$ расслоений геометрических величин, если $\overline{\alpha}^*(\widetilde{\varphi}) = \varphi$.

4. Алгебры дифференциальных инвариантов. Пусть $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — расслоения проективных геометрических величин класса R_φ^W, S_φ^W, или T_φ^W. Гладкая функция $F \in C^\infty(J^k\pi)$ на расслоении k-джетов $\pi_k\colon J^k(\pi) \to \mathbb{R}$ называется дифференциальным инвариантом порядка $\leqslant k$ для заданного класса геометрических величин [4, 5], если $\overline{A}^{(k)}(F) = \overline{B}^{(k)}(F) = \overline{H}^{(k)}(F) = 0$, где через $\overline{A}^{(k)}$, $\overline{B}^{(k)}$, $\overline{H}^{(k)}$ обозначены продолжения векторных полей $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$ в пространство k-джетов.

Теорема 4. *В области, где $A \neq 0$, алгебры дифференциальных инвариантов проективных геометрических величин порождены следующим образом:*

1. Класс T_φ^W: дифференциальными инвариантами нулевого и 3-го порядков

$$
J_0 = \varphi,
$$

$$
J_3 = \frac{\varphi\widehat{A}^3(\varphi) - \dfrac{3}{2}(\widehat{A}^2(\varphi))^2}{(\widehat{A}(\varphi))^4}
$$

и производными Трессе $\dfrac{D^k J_3}{D J_0^k}$ [5].

2. Класс S_φ^W: дифференциальным инвариантом 2-го порядка

$$
J_2 = \varphi\widehat{A}^2\varphi - \frac{1}{2}(\widehat{A}(\varphi))^2
$$

и инвариантными производными $\nabla^{(k)}(J_2)$, где $\nabla = \varphi \cdot \widehat{A}$.

3. Класс R_φ^W: дифференциальным инвариантом 2-го порядка

$$
J_2 = \frac{\varphi\widehat{A}^2(\varphi) - 2(\widehat{A}(\varphi))^2 + 6\beta\widehat{A}(\varphi) - 4\beta^2}{(\beta - \widehat{A}(\varphi))^{3/2}}
$$

и инвариантными производными $\nabla^{(k)}(J_2)$, где $\nabla = \varphi/\sqrt{\beta - \widehat{A}(\varphi)}\widehat{A}$, $\beta = -1/(2c)$.

Здесь через $\widehat{A}$ обозначена полная производная вдоль векторного поля A [6].

1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва, Наука, 1985. – 304 с.
2. *Lie S.* Klassifikation und Integration von gewöhnlichen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten I, II // Math. Ann. – 1988. – **32**. – P. 213–281.
3. *Kushner A., Lychagin V., Roubtsov V.* Contact geometry and non-linear differential equations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 496 p.
4. *Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления // Геометрия-1. Т. 28. – Москва, 1988. – 289 с.
5. *Tresse A.* Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. – 1894. – **18**. – P. 1–88.
6. *Красильщик И. С., Лычагин В. В., Виноградов А. В.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1986. – 336 с.

Одесская национальная академия пищевых технологий

Поступило в редакцию 03.04.2008

УДК 517.51

Ю. С. Лінчук

Про один клас інтегро-диференціальних операторних рівнянь відносно узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

We describe solutions of a class of integro-differential operator equations which contain the generalized differentiation and integration. An analog of Delsartes–Lions's formula for the representation of solutions of such equations is obtained.

Нехай G — довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх аналітичних у G функцій, що наділений топологією компактної збіжності [1], а символом $\mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$ — множину всіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathcal{H}(G)$. Нехай D — оператор диференціювання, а у випадку, коли область G є зірковою відносно початку координат, через $\mathcal{J}$ позначимо оператор інтегрування, який діє за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)\,dt$. У класичній праці Ж. Дельсарта і Ж. Л. Ліонса [2] у класі $\mathcal{L}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ досліджувалося операторне рівняння

$$D^nT = TD^n, \tag{1}$$

де n — фіксоване натуральне число. Зокрема, у [2] стверджувалося, що загальний розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} T_kP^k, \tag{2}$$