Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2008

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.2+517.5

© 2008

В. М. Дільний

Про існування розв'язків одного рівняння типу згортки

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

The complete solution of the existence problem of nontrivial solutions for the equation $\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)\,dw = 0$, $\tau \leqslant 0$, *in a class of functions* f *analytic in* $D_\sigma = \{z\colon |\operatorname{Im} z| < \sigma,\ \operatorname{Re} z < 0\}$ *is obtained.*

Задачу про існування нетривіальних розв'язків рівняння

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(u+\tau)g(u)\,dw = 0, \qquad \tau \leqslant 0, \qquad g \in L^2(-\infty;0), \tag{1}$$

у просторі $L^2(-\infty;0)$ розв'язав П. Лакс, адаптуючи один результат А. Берлінга [1] для круга. Цей результат можна сформулювати таким чином (див. [2]).

Теорема Берлінга–Лакса. *Нехай* $G \in H^2(\mathbb{C}_+)$. *Тоді еквівалентними є такі твердження:*

1) рівняння (1) *має лише нульовий розв'язок у просторі* $L^2(-\infty;0)$;

2) функція G, *де*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} g(u)e^{uz}du,$$

не має нулів у $\mathbb{C}_+$,

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|G(x)|}{x} = 0$$

і сингулярна гранична функція функції G *є тотожною сталою;*

3) функція G *є зовнішньою для* $H^2(\mathbb{C}_+)$.

Сингулярна гранична функція h функції $G \in H^p(\mathbb{C}_+)$ визначається з точністю до адитивної сталої і значень у точках неперервності рівністю

$$h(t_2) - h(t_1) = \lim_{x \to 0+} \int_{t_1}^{t_2} \ln |G(x + iy)|\, dy - \int_{t_1}^{t_2} \ln |G(iy)|\, dy. \tag{2}$$

Функцію G називають зовнішньою для $H^p(\mathbb{C}_+)$ тоді і тільки тоді, коли

$$G(z) = e^{i\alpha} \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tz + i}{(t + iz)(1 + t^2)} \ln |G(it)|\, dt \right\}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad G \in L^p(\partial\mathbb{C}_+).$$

Б. Винницький розглянув в [3] одне рівняння згортки у півсмузі та одержав деякі результати про існування його розв'язків. Проте задача про знаходження повного аналогу результату Берлінга залишилася відкритою. У цій роботі ми повністю розв'язуємо поставлену там задачу. Для формулювання одержаного результату введемо деякі простори.

Нехай $E^p[D_\sigma]$ і $E^p_*[D_\sigma]$, $1 \leqslant p < +\infty$, — простори функцій, аналітичних відповідно в $D_\sigma = \{z\colon |\operatorname{Im} z| < \sigma,\ \operatorname{Re} z < 0\}$ та $D^*_\sigma = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_\sigma$, для яких

$$\sup \left\{ \int_\gamma |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < +\infty,$$

де супремум береться за всіма відрізками γ, які лежать відповідно в D_σ та D^*_σ і є паралельними одній зі сторін ∂D_σ. Функції f із цих просторів мають [4] майже скрізь на ∂D_σ кутові граничні значення, які позначаємо через $f(z)$, і $f \in L^p[\partial D_\sigma]$.

Розглянемо також простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\sigma \geqslant 0$, $1 \leqslant p < +\infty$, функцій, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$, для яких

$$\|f\| := \sup_{-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma |\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ вивчався в [4, 5]. Там, зокрема, показано, що функції f з цього простору мають майже скрізь на $\partial\mathbb{C}_+$ кутові граничні значення, які теж позначають через $f(iy)$, причому $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(R)$. Сингулярна гранична функція функції $G \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ існує [6, 7] і визначається з точністю до адитивної сталої та значень у точках неперервності рівністю (2). Також простори $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $1 \leqslant p < +\infty$, є банаховими відносно вказаної норми. При цьому у випадку $\sigma = 0$ маємо $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+) = H^p(\mathbb{C}_+)$ (див. [8]). Простір Пелі–Вінера цілих функцій експоненціального типу $\leqslant \sigma$, що належать $L^2(\mathbb{R})$, міститься [9, с. 26; 10, с. 663] в $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Відомо (див. [4]), що між просторами $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ і $E^2_*[D_\sigma]$ існує бієкція, що задається кожною з формул

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_{\partial D_\sigma} g(w) e^{zw} dw$$

і

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} G(x) e^{-xw} dx, \qquad \operatorname{Re} w > 0.$$

Теорема. *Нехай* $g \in E^2_*[D_\sigma]$, $g \not\equiv 0$. *Тоді еквівалентними є такі умови:*

1) рівняння

$$\int\limits_{\partial D_\sigma} f(w+\tau)g(w)\,dw = 0, \qquad \tau \leqslant 0,$$

має лише нульовий розв'язок $f \in E^2[D_\sigma]$;

2) функція G *не має нулів у* $\mathbb{C}_+$, *її сингулярна гранична функція є тотожною сталою і виконується одна з еквівалентних умов:*

а) $\varliminf\limits_{r\to+\infty}\left(K_G(r) - \dfrac{\sigma}{\pi}\ln r\right) = -\infty$,

б) $\lim\limits_{r\to+\infty}\left(K_G(r) - \dfrac{\sigma}{\pi}\ln r\right) = -\infty$;

в) $G(z)\exp\left(\dfrac{2\sigma}{\pi}z\ln z - cz\right) \notin H^p(\mathbb{C}_+)$ *для кожного* $c \in \mathbb{R}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln|G(x)|}{x} + \dfrac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty$;

д) $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln|G(x)|}{x} + \dfrac{2\sigma}{\pi}\ln x\right) = +\infty$,

де

$$K_G(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{1<|t|\leqslant r}\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2}\right)\ln|G(it)|\,dt.$$

Зазначимо, що еквівалентність між собою умов *а–д* встановлена в [11], а те, що з умови *1* випливає *2* при умові *а*, встановлено в [12]. Доведення інших частин проводиться шляхом оцінок деяких сум функцій у просторах $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$ та відповідних їм сум у просторах $g \in E^2_*[D_\sigma]$.

1. *Beurling A.* On two problems concerning linear transformations in Hilbert space // Acta Math. – 1949. – **81**. – P. 79–93.
2. *Никольский Н. К.* Лекции об операторе сдвига. – Москва: Наука, 1980. – 383 с.
3. *Винницький Б. В.* Рівняння згортки і кутові граничні значення аналітичних функцій // Доп. НАН України. – 1995. – № 10. – С. 13–17.
4. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 484–500.
5. *Винницький Б. В.* Про нулі деяких класів функцій, аналітичних у півплощині // Мат. студії. – 1996. – № 6. – С. 67–72.
6. *Fedorov M. A., Grishin A. F.* Some questions of the Nevanlinna theory for the complex half-plane // Math. Physics, Anal. and Geom. – 1998. – **1**. – P. 223–271.
7. *Винницький Б. В., Дільний В. М.* Про необхідні умови існування розв'язків одного рівняння типу згортки // Мат. студії. – 2001. – **16**, № 1. – С. 61–70.
8. *Седлецкий А. М.* Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 75–82.
9. *Винер Н., Пели Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. – Москва: Наука, 1963. – 256 с.

10. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – **39**, № 3. – С. 657–702.
11. *Дільний В. М.* Про еквівалентність деяких умов для вагових просторів Гарді // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 9. – С. 1257–1263.
12. *Винницкий Б. В., Дильный В. Н.* Об обобщении теоремы Берлинга–Лакса // Мат. заметки. – 2006. – **79**, № 3. – С. 362–368.

Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 16.04.2008

УДК 517.956.4

© 2008

Н. Г. Коновенко, В. В. Лычагин

Дифференциальные инварианты нестандартных проективных структур

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. В. Шарко)

We describe projective structures on a line in terms of solutions of the Schrödinger equation. We give a detailed classification of projective geometrical quantities and find the algebras of their differential invariants.

1. Проективные структуры и sl_2-действия. Проективная структура на прямой $\mathbb{R}$ задается атласом, функции перехода в некотором суть проективные (=дробно-линейные) преобразования прямой [1]. Стандартная проективная структура индуцируется вложением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}P^1$ как аффинной части. Алгебра Ли симметрий стандартной структуры изоморфна $sl_2(\mathbb{R})$ и порождена векторными полями: $A = \partial_x$, $B = x^2\partial_x$, $H = 2x\partial_x$. С другой стороны, в силу теоремы Софуса Ли [2], любое представление $\rho\colon sl_2(\mathbb{R}) \to D(\mathbb{R})$ алгебры Ли sl_2 в алгебре Ли $D(\mathbb{R})$ векторных полей на $\mathbb{R}$ локально эквивалентно стандартному. Поэтому проективную структуру можно рассматривать как представление $\rho\colon sl_2(\mathbb{R}) \to D(\mathbb{R})$. В дальнейшем мы обозначаем через A, B, H базис Шевалле в $sl_2(\mathbb{R})$, где $[A, B] = H$, $[H, A] = -2A$, $[H, B] = 2B$, а также его образ в векторных полях при представлении ρ.

Теорема 1. *Каждое представление $sl_2(\mathbb{R})$ в $D(\mathbb{R})$ имеет вид*

$$A = \pm f^2(x)\partial_x, \qquad B = \pm g^2(x)\partial_x, \qquad H = 2f(x)g(x)\partial_x, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — фундаментальная система решений уравнения Шредингера

$$y'' + W(x)y = 0$$

с вронскианом, равным единице, $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 1$.

Отметим, что представления (1), отвечающие разному выбору знаков, эквивалентны и переводятся друг в друга преобразованием: $x \mapsto -x$, $f \mapsto -f$, $g \mapsto g$.

В дальнейшем мы рассматриваем только представления (1), отвечающее $+$, и обозначаем их через $\rho^W_{f,g}$, соответствующую проективную структуру мы обозначаем через Im^W.