Теорема 3. *В финслеровом многообразии с флаговой кривизной $K \leqslant -k^2$ и $\mathbf{T}$-кривизной $|\mathbf{T}| \leqslant \delta$ такой, что $0 \leqslant \delta \leqslant k$, рассмотрим гиперповерхность N с нормальными кривизнами $\mathbf{k_n} > 2\delta$. Тогда все внешние эквидистантные гиперповерхности являются локально выпуклыми.*

Теперь, используя теоремы 2 и 3, становится возможным доказать теорему 1.

1. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. – Москва: Мир, 1970. – 412 с.
2. *Alexander S.* Locally convex hypersurfaces of negatively curved spaces // Proc. AMS. – 1977. – **64**, No 2. – P. 321–325.
3. *Борисенко А. А.* О локально выпуклых гиперповерхностях в многообразиях Адамара // Мат. заметки. – 2000. – **67**. – С. 425–431.
4. *Борисенко А. А.* Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий. – Москва: Экзамен, 2003. – 672 с.
5. *Shen Z.* Lectures on Finsler geometry. – Singapore: World Scientific Publishing Co, 2001. – 306 p.
6. *Warner F. W.* Extension of the Rauch comparison theorem to submanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – **122**, No 2. – P. 341–356.
7. *Bao D., Chern S. S., Shen Z.* An introduction to Riemann–Finsler geometry. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 434 c.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 03.04.2008

УДК 514.764.27

Е. В. Петров

О грассмановом отображении подмногообразий в группах Ли

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

A criterion for the harmonicity of the Grassmann map of an immersed smooth submanifold in some Lie group with left-invariant metric is given. Using the obtained expression, we obtain criteria for the harmonicity of this map in both cases of totally geodesic submanifolds in Lie groups with biinvariant metric and cylindrical submanifolds in Heisenberg groups.

Постановка задачи. Пусть M — гладкое многообразие, N — группа Ли с левоинвариантной метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{N}$ — ее алгебра Ли со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$, $M \to N$ — погружение, $\dim M = n$, $\dim N = n + q$.

Грассманово отображение $\Phi \colon M \to G(n, q)$ подмногообразия M определяется как результат переноса в $T_eN = \mathcal{N}$ касательного пространства в соответствующей точке M дифференциалом левого сдвига:

$$\Phi(p) = dL_{p^{-1}}(T_pM). \tag{1}$$

Тут точка p отождествляется с ее образом при погружении.

В [1] было доказано, что грассманово отображение подмногообразия евклидова пространства гармонично (в смысле гармонических отображений римановых многообразий, см. [2]) тогда и только тогда, когда векторное поле средней кривизны подмногообразия параллельно. Это утверждение обобщалось в различных постановках на пространства постоянной кривизны (см. [3–6]). В работе [7] доказано, что гауссово отображение гиперповерхности в группе Ли с биинвариантной метрикой гармонично тогда и только тогда, когда гиперповерхность имеет постоянную среднюю кривизну.

Пусть p — некоторая точка M, $Y_1, \ldots, Y_n$ и $Y_{n+1}, \ldots, Y_{n+q}$ — ортонормированные базисы касательного пространства $T_pM \subset T_pN$ и нормального пространства $N_pM \subset T_pN$ соответственно. Здесь и далее мы будем обозначать через Y_i как векторы касательного пространства T_pN, так и соответствующие им элементы алгебры Ли N. Рассмотрим на M индуцированную погружением риманову метрику. Скалярное произведение, индуцируемое метрикой N на касательных пространствах, будем обозначать через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, риманову связность метрики N — через ∇, нормальную связность погружения M в N — через $\nabla^{\perp}$, тензор кривизны связности ∇ — через $\mathrm{R}(\cdot,\cdot)\cdot$.

Продолжим векторы $Y_1, \ldots, Y_{n+q}$ в некоторую окрестность U точки p полями $E_1, \ldots, E_{n+q}$ так, что $E_1, \ldots, E_n$ в каждой точке U составляют ортонормированный базис касательного пространства к M, а $E_{n+1}, \ldots, E_{n+q}$ — ортонормированный базис нормального пространства. Для $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $n+1 \leqslant \alpha \leqslant n+q$ обозначим через $b_{ij}^{\alpha} = \langle\nabla_{E_i}E_j, E_\alpha\rangle$ коэффициенты второй фундаментальной формы подмногообразия M в окрестности U. Векторное поле H средней кривизны погружения определяется на U выражением

$$H = \frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(\nabla_{E_i}E_i)^{\perp}. \tag{2}$$

Через $(\cdot)^T$ и $(\cdot)^{\perp}$ обозначается проектирование на касательное расслоение TM и нормальное расслоение NM соответственно. Говорят, что векторное поле средней кривизны параллельно, если $\nabla_X^{\perp}H = 0$ для любого касательного X.

Критерий гармоничности. Отображение Φ в точке p гармонично тогда и только тогда, когда

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\langle \mathrm{R}(Y_j,Y_i)Y_i,Y_\alpha\rangle - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\langle\nabla_{(\nabla_{Y_i}Y_i)}Y_j,Y_\alpha\rangle + \langle[nH,Y_j],Y_\alpha\rangle + 2\sum_{\substack{1\leqslant i,\\ k\leqslant n}} b_{ik}^{\alpha}\langle\nabla_{Y_i}Y_k,Y_j\rangle +$$

$$+ 2\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n,\\ n+1\leqslant\gamma\leqslant n+q}} b_{ij}^{\gamma}\langle\nabla_{Y_i}Y_\gamma,Y_\alpha\rangle - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\langle(\nabla_{Y_i}Y_j)^T,(\nabla_{Y_i}Y_\alpha)^T\rangle + \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\langle(\nabla_{Y_i}Y_j)^{\perp},(\nabla_{Y_i}Y_\alpha)^{\perp}\rangle = 0 \tag{3}$$

для всех $1 \leqslant j \leqslant n$, $n+1 \leqslant \alpha \leqslant n+q$.

Отметим, что грассманово отображение подгруппы Ли постоянно и, следовательно, гармонично.

Пусть N — группа Ли с биинвариантной метрикой. Алгебра Ли $\mathcal{N}$ компактна, т. е. $\mathcal{N} = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{N}'$, где прямая сумма ортогональна, $\mathcal{Z}$ абелева и $\mathcal{N}' = [\mathcal{N},\mathcal{N}]$ полупростая, причем форма Киллинга $\mathcal{N}'$ отрицательно определена (см. [8]).

Пусть M — вполне геодезическое подмногообразие N, $\Psi\colon M \to N$ — соответствующее погружение, p — некоторая точка M. Рассмотрим погружение $\Psi' = L_{\Psi(p)^{-1}} \circ \Psi\colon M \to N$. Образ $\Psi'(p)$ совпадает с единичным элементом e группы Ли N. Грассманово отображение этого погружения отображает каждую точку $r \in M$ на подпространство $\Phi'(r) = dL_{\Psi'(p)^{-1}} \circ d\Psi'(T_r M) = dL_{\Psi(p)^{-1}} \circ d\Psi(T_r M) = \Phi(r)$, таким образом, грассмановы отображения двух погружений совпадают. Левые сдвиги являются изометриями N, следовательно, Ψ' также вполне геодезично. Таким образом, без ограничения общности можно предположить, что $\Psi(p) = e$. Касательное пространство $T_e M$ является тройной системой Ли в $\mathcal{N}$ (см., напр., [9]). Подпространство $\overline{\mathcal{N}} = T_e M + [T_e M, T_e M]$ — компактная подалгебра Ли, следовательно, имеет ортогональное прямое разложение $\overline{\mathcal{N}} = \overline{\mathcal{Z}} \oplus \overline{\mathcal{N}}'$, где $\overline{\mathcal{Z}}$ абелева, а $\overline{\mathcal{N}}' = [\overline{\mathcal{N}}, \overline{\mathcal{N}}]$ полупроста. Рассмотрим разложение $Y_a = X_a + Z_a$ для $1 \leqslant a \leqslant n + q_1$, где $X_a \in \overline{\mathcal{N}}'$, $Z_a \in \overline{\mathcal{Z}}$, $\dim \overline{\mathcal{N}} = n + q_1$. Тогда для $1 \leqslant a$, $b \leqslant n + q_1$ скобка Ли $[Y_a, Y_b] = [X_a, X_b]$. Обозначим через $\mathcal{W}$ подпространство, натянутое на $X_1, \ldots, X_n$ (т.е. ортогональную проекцию $T_e M$ на $\overline{\mathcal{N}}'$). Это тройная система Ли в $\overline{\mathcal{N}}'$, и $\overline{\mathcal{N}}' = \mathcal{W} + [\mathcal{W}, \mathcal{W}]$. Пересечение $\overline{\mathcal{W}} = \mathcal{W} \bigcap [\mathcal{W}, \mathcal{W}]$ является идеалом (здесь и далее под идеалами мы подразумеваем идеалы в $\overline{\mathcal{N}}$). Алгебра Ли $\overline{\mathcal{N}}'$ полупроста, следовательно, ортогональное дополнение $\mathcal{V}$ к $\overline{\mathcal{W}}$ также является идеалом и равняется ортогональной прямой сумме $\bigoplus\limits_{1 \leqslant l \leqslant m} \mathcal{S}_l$ простых идеалов $\mathcal{S}_l$.

Теорема 2. *Пусть M — гладкое погруженное вполне геодезическое подмногообразие в группе Ли N с биинвариантной метрикой. Тогда:*

1) если ограничение метрики на $\mathcal{V}$ является отрицательным кратным формы Киллинга (в частности, если $\mathcal{V}$ проста), то грассманово отображение M в этой метрике гармонично;

2) если $\mathcal{W} \bigcap \mathcal{V} = \bigoplus\limits_{1 \leqslant l \leqslant m} \mathcal{W}_l$, где $\mathcal{W}_l \subset \mathcal{S}_l$ — собственная тройная система Ли в $\mathcal{S}_l$, т.е. $\mathcal{W}_l \neq 0$ и $\mathcal{W}_l \neq \mathcal{S}_l$ для каждого $1 \leqslant l \leqslant m$ (в частности, если $\mathcal{V} = 0$), тогда грассманово отображение M гармонично в любой биинвариантной метрике на N;

3) если условие утверждения 2 не выполняется, то на N существует биинвариантная метрика такая, что грассманово отображение M негармонично.

Рассмотрим пример. Пусть $\mathcal{N}$ — алгебра Ли $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ с ортогональным базисом, состоящим из векторов e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3 с ненулевыми скобками Ли

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = e_3, \qquad [e_2, e_3] = -[e_3, e_2] = e_1, \qquad [e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = e_2,$$

$$[f_1, f_2] = -[f_2, f_1] = f_3, \qquad [f_2, f_3] = -[f_3, f_2] = f_1, \qquad [f_3, f_1] = -[f_1, f_3] = f_2.$$

Выберем метрику так, что $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ и $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} a^2$, где $0 < a \neq 1$. Пусть $\mathcal{W}$ — подпространство, порожденное $e_1 + f_1$, $e_2 - f_2$ и $e_3 + f_3$. Пусть $M = \exp(\mathcal{W})$, тогда $T_e M = \mathcal{W}$.

Предложение 1. *Подмногообразие M в связной односвязной группе Ли N с алгеброй Ли $\mathcal{N}$ и выбранной указанным способом биинвариантной метрикой является вполне геодезическим и имеет негармоническое грассманово отображение.*

Группы Гейзенберга. Пусть теперь N — $(2m + 1)$-мерная группа Гейзенберга. Она представляет собой пространство $\mathbb{R}^{2m+1}$ с глобальными координатами $x^1, \ldots, x^m, y^1, \ldots, y^m, z$ и ортонормированным базисом левоинвариантных векторных полей

$$\begin{aligned} &K_1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad \ldots, \qquad K_m = \frac{\partial}{\partial x^m}, \\ &L_1 = \frac{\partial}{\partial y^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \ldots, \qquad L_m = \frac{\partial}{\partial y^m} + x^m \frac{\partial}{\partial z}, \qquad Z = \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{4}$$

элементы которого связаны структурными соотношениями

$$[K_i, L_j] = \delta_{ij} Z, \qquad [K_i, K_j] = [L_i, L_j] = [K_i, Z] = [L_i, Z] = 0 \tag{5}$$

для $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Пусть M — цилиндрическое подмногообразие, т. е. пусть в касательном пространстве каждой его точки присутствует вектор Z. Интегральные траектории поля Z имеют вид $z = t$, поэтому $M = M_1 \times \mathbb{R}$, где M_1 — гладкое подмногообразие в подпространстве $z = 0$. Рассмотрим на этом $(2m)$-мерном подпространстве естественную евклидову метрику с ортонормированным базисом, состоящим из полей $\partial/\partial x^i$ и $\partial/\partial y^j$ для $1 \leqslant i, j \leqslant m$.

Предложение 2. *Пусть в каждой точке p подмногообразия M вектор Z является касательным. Тогда:*

1) $M = M_1 \times \mathbb{R}$ минимально в N тогда и только тогда, когда M_1 минимально в E^{2m};

2) векторное поле H средней кривизны M параллельно тогда и только тогда, когда векторное поле H_1 средней кривизны M_1 как подмногообразия евклидова пространства E^{2m} параллельно и выполняется условие $(J(Z)H)^{\perp} = 0$;

3) грассманово отображение M гармонично тогда и только тогда, когда H_1 параллельно.

Следствие 1. *Пусть M — гиперповерхность, в каждой точке которой вектор Z является касательным. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) гауссово отображение M гармонично;

2) M имеет постоянную среднюю кривизну;

3) M является произведением гиперповерхности постоянной средней кривизны E^{2m} на $\mathbb{R}$.

Для трехмерной группы Гейзенберга в [10] доказано:

Теорема 3. *Пусть M — гладкая ориентируемая поверхность постоянной средней кривизны в трехмерной группе Гейзенберга, гауссово отображение которой гармонично. Тогда M является цилиндрическим.*

Аналогичный результат для другого определения гауссова отображения (не совпадающего с гауссовым отображением поверхности в трехмерной группе Ли) получен в [11].

1. *Ruh E. A., Vilms J.* The tension field of the Gauss map // Trans. Amer. Math. Soc. – 1970. – **149**. – P. 569–573.
2. *Eells J. J., Sampson H.* Harmonic mappings of Riemannian manifolds // Amer. J. Math. – 1964. – **86**, No 1. – P. 109–160.
3. *Ishihara T.* The harmonic Gauss map in a generalized sense // J. London Math. Soc. – 1982. – **26**, No 1. – P. 104–112.
4. *Rigoli M.* The harmonicity of the spherical Gauss map // Bull. London Math. Soc. – 1986. – **18**, No 6. – P. 609–612.
5. *Масальцев Л. А.* Вариант теоремы Ру–Вильмса для поверхностей постоянной средней кривизны в S^3 // Мат. заметки. – 2003. – **73**, вып. 1. – С. 92–105.
6. *Масальцев Л. А.* Гармонические свойства гауссовых отображений в H^3 // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 489–499.
7. *do Espirito-Santo N., Fornari S., Frensel K., Ripoll J.* Constant mean curvature hypersurfaces in a Lie group with a bi-invariant metric // Manuscr. math. – 2003. – **111**. – P. 459–470.
8. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. – 1976. – **21**. – P. 293–329.
9. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2 т. – Москва: Мир, 1981. – Т. 2. – 416 с.
10. *Petrov Ye. V.* The Gauss map of hypersurfaces in 2-step nilpotent Lie groups // Math. Phys., An., Geom. – 2006. – **2**, No 2. – P. 186–206.
11. *Sanini A.* Gauss map of a surface of the Heisenberg group // Boll. Unione mat. ital. – 1997. – **11-B(7)**, Suppl. Fasc. 2. – P. 79–93.

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 23.04.2008