УДК 621.314.572

В.М.Михальський, канд.техн.наук, **В.М.Соболєв**, канд.техн.наук, **В.В.Чопик**, **І.А.Шаповал**, канд.техн.наук (Інститут електродинаміки НАН України, Київ)

ВИЗНАЧЕННЯ ГАРМОНІЧНОГО СКЛАДУ ТА ПОКАЗНИКІВ ЯКОСТІ ВИХІДНОЇ НАПРУГИ АІН ПРИ ЗАСТОСУВАННІ ДЛЯ ШИРОТНО-ІМПУЛЬСНОЇ МОДУЛЯЦІЇ ПЕРЕРВНИХ МОДУЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто методику визначення гармонічного складу вихідної напруги АІН при застосуванні для ШІМ різних методів перервної підмодуляції. Здійснено порівняльний аналіз показників якості кривих вихідної напруги.

Рассмотрена методика определения гармонического состава выходного напряжения АИН при использовании для ШИМ разных методов прерывистой подмодуляции. Осуществлен сравнительный анализ показателей качества кривых выходного напряжения.

Вступ. Основною проблемою при створенні методів широтно-імпульсної модуляції (ШІМ) в автономних інверторах напруги (АІН) є забезпечення високої якості кривих вихідної напруги з одночасним отриманням максимально можливого коефіцієнта використання напруги ланки постійного струму. Способи імплементації в модуляційні функції складових нульової послідовності, які направлені на вирішення цієї проблеми, можна розділити на дві основні категорії: перші передбачають неперервну модуляцію із застосуванням нульових стаціонарних векторів у всіх шестидесятиградусних секторах кожної із фаз вихідної напруги перетворювача, а другі задають закон модуляції, що передбачає почергову відсутність модуляції в кривих вихідної напруги. Вивченню способів модуляції протягом останніх десятиліть присвячено велику кількість досліджень [1–10]. Значна увага оцінці якості вихідної напруги при застосуванні ШІМ приділялася в [5–7]. В той же час потрібно зауважити, що для деяких методів підмодуляції [1], [5] аналіз якості вихідної напруги не проведено в зв'язку зі значною складністю такого аналізу.

Метою статті є визначення гармонічного складу та показників якості вихідної напруги АІН при застосуванні для отримання максимально можливого коефіцієнта передачі по напрузі перервних модуляційних функцій.

Для визначення якості вихідної напруги доцільне використання коефіцієнта гармонік THD, але цей параметр не характеризує однозначно якість кривих, які складаються з ШІМ-послідовності. Крива напруги містить, крім основної гармоніки, набір всіх гармонічних складових, кратних частоті модуляції. Оскільки, як правило, навантаження АІН має активно-індуктивний характер, то слід зазначити, що результуючий вплив на струм навантаження буде різним для різних гармонік напруги [5] з таких причин: $I_k = U_k/(k\omega_1 L)$, де k = 2, 3, 4,…

Звідси отримаємо вираз для коефіцієнта гармонік струму:

$$THD_i = \frac{1}{\omega_1 L}\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{U_k}{k}\right)^2}\ . \tag{1}$$

Нормуючи останнє співвідношення по $U_1/\omega_1 L$, отримаємо зважений загальний коефіцієнт гармонік напруги (Weighted Total Harmonic Distortion − WTHD):

$$WTHD = \frac{1}{U_1}\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{U_k}{k}\right)^2}\ . \tag{2}$$

Як видно з останнього виразу, такий запис враховує якісний склад спектра напруги, а саме враховується місце, де розташована гармонічна на шкалі частоти, адже від цього залежить вплив цієї гармонічної на вихідний струм. Неважко помітити, що при наближенні сигналу завдання вихідної напруги інвертора до нуля відповідно буде зменшуватись амплітуда першої гармоніки у вихідній напрузі і, як наслідок, параметр WTHD буде нескінченно великим. Тому приймемо умовно коефіцієнт модуляції m =1 і тоді амплітуда першої гармоніки у відносних одиницях буде дорівнювати одиниці, або $U_{dc}/2$.

Нормуючи вираз (2) по $U_{dc}/2$ замість U_1, вводимо показник, який забезпечить об’єктивну порівняльну характеристику методів ШІМ [5] незалежно від глибини модуляції:

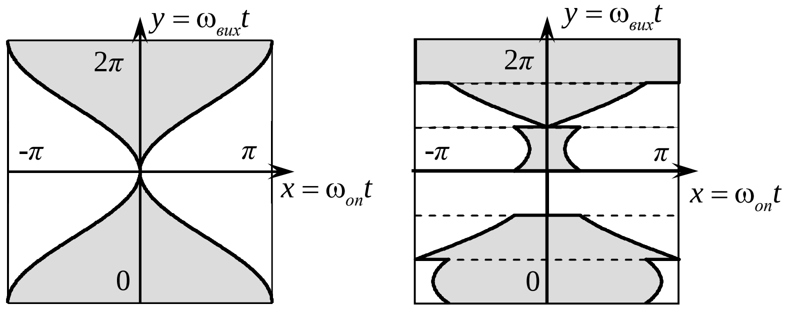
$$WTHD0 = \frac{2}{U_{dc}} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{U_k}{k} \right)^2} \, . \tag{3}$$

Для аналізу вихідної напруги інвертора, яка містить ШІМ-послідовність (тобто напруга, що сформована за допомогою ключів, які з деякою частотою підключають фази навантаження до шин ланки U_{dc}), потрібно знайти гармонічний склад цієї напруги. Гармонічний склад може бути знайдено за допомогою чисельних методів з використанням швидкого перетворення Фур’є. Але чисельні методи не гарантують достатньої точності та мають принципові недоліки у випадку використання їх для порівняння тих чи інших алгоритмів ШІМ. Аналітичний спосіб розв’язання цієї задачі полягає у використанні двох часових змінних [1]:

$$x(t) = \omega_{on} t + \theta_{on} \quad \text{та} \quad y(t) = \omega_{вих} t + \theta_{вих} \, , \tag{4}$$

де $\omega_{on} = 2\pi / T_{on}$ − колова частота опорного сигналу ШІМ; T_{on} − період опорного сигналу; $\omega_{вих} = 2\pi / T_{вих}$ − колова частота вихідної напруги U_{a0}; $T_{вих}$ − період вихідної напруги; θ_{on}, $\theta_{вих}$ − відповідні початкові фазові зсуви. При цьому зауважимо, що $\omega_{вих} << \omega_{on}$.

На рис. 1 показано умовне розташування двох змінних, які задають алгоритм керування.



а *б*

Рис. 1

Так, на рис. 1, *а* зображено формування сигналу завдання для модуляційної функції СИНШІМ, а на рис. 1, *б* показано формування сигналу завдання для модуляційної функції ПШІМ0 [1]. Відомо, що аналіз функцій ПШІМ0, ПШІМ1, ПШІМ2, ПШІМ3 у світі раніше не проводився.

Змінні $x(t)$ та $y(t)$ відображують склад часових інтервалів для високочастотної модуляції кривої завдання, що окремо представлена на кожному періоді ШІМ.

У загальному випадку гармонічний ряд Фур’є має вигляд:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t) \right]. \tag{5}$$

Коефіцієнти гармонічного ряду можуть бути знайдені з інтегралу Фур’є таким чином:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(k\omega t) dt \, ; \qquad B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(k\omega t) dt \, ; \qquad k = 0, 1, 2\ldots. \tag{6}$$

Для функції з двома змінними вираз (5) запишеться так [5]:

$$\begin{aligned} f(x,y) = \frac{A_{00}}{2} &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{0n} \cos ny + B_{0n} \sin ny \right] + \sum_{r=1}^{\infty} \left[A_{r0} \cos rx + B_{r0} \sin rx \right] + \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 0}}^{\infty} \left[A_{rn} \cos(rx + ny) + B_{rn} \sin(rx + ny) \right], \end{aligned} \tag{7}$$

де
$$A_{rn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \cos(rx + ny) dx\, dy \, , \qquad B_{rn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) \sin(rx + ny) dx\, dy \, , \tag{8}$$

n та r − номери компонент гармонічного ряду.

Для більш зручного використання вираз (8) можна записати в загальному комплексному вигляді:

$$A_{rn} + jB_{rn} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{j(rx+ny)} dx\, dy \, . \tag{9}$$

Як видно з рис. 1, *б*, функція ПШІМ0 на інтервалі від 0 до 2π має кусково-неперервний характер, тобто вираз (9) має бути записаний інтервально на всьому періоді вихідної частоти. Границями внутрішнього інтегралу будуть модуляційні функції, вписані в проміжок від $-\pi$ до 0 зі знаком мінус та від 0 до π зі знаком плюс відповідно. Вираз для першого інтервалу модуляційної кривої ПШІМ0 запишеться у вигляді:

$$x_s(t) = -\frac{\pi}{2}\left[1 + m\cos(\omega_{вих}t) + \left(-1 - m\cos\left[\omega_{вих}t - \frac{4\pi}{3}\right]\right)\right];$$

$$x_e(t) = \frac{\pi}{2}\left[1 + m\cos(\omega_{вих}t) + \left(-1 - m\cos\left[\omega_{вих}t - \frac{4\pi}{3}\right]\right)\right]. \tag{10}$$

Приймаючи $\omega_{вих}t$ як y та виконавши деякі тригонометричні перетворення, вираз (10) перепишеться так:

$$x_s = -\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right); \qquad x_e = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y - \frac{\pi}{6}\right). \tag{11}$$

Інтегрування кусково-неперервних функцій на періодах основної гармоніки вихідної частоти і частоти ШІМ виконується шляхом додавання часткових інтегралів на інтервалах безперервності. Границі інтервалів у розглянутому випадку ПШІМ0 показано в табл. 1, де y_s, y_e і x_e, x_s – початкові та кінцеві границі інтервалів на періодах вихідної кутової частоти $\omega_{вих}$ і кутової частоти $\omega_{оп}$ відповідно.

Таблиця 1

i	y_s	y_e	x_s	x_e
1	0	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$
			$\varDelta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$	
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
			$\varDelta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)+2\pi$	
3	$\frac{2\pi}{3}$	π	0	0
			$\varDelta x = x_e - x_s = 0$	
4	π	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
			$\varDelta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi$	
5	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$
			$\varDelta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$	
6	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$-\pi$	π
			$\varDelta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$	

Загальна формула для коефіцієнтів ряду Фур'є розглянутої ПШІМ0

$$A_{rn} + jB_{rn} = \frac{U_{dc}}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\int_{x_{si}}^{x_{ei}} e^{j(rx+ny)}dxdy =$$

$$= \frac{U_{dc}}{j2r\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\left(e^{jrx_{fi}} - e^{jrx_{ri}}\right)e^{jny}dy\ . \tag{12}$$

Послідовно визначаємо коефіцієнти для різних комбінацій r і n, а також номерів інтервалів i, і далі знаходимо сумарні значення на всіх інтервалах.

Для r=n=0

У цьому випадку формула для визначення коефіцієнтів може бути записана у вигляді:

$$A_{00} + jB_{00} = \frac{U_{dc}}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\varDelta x_i dy\ . \tag{13}$$

Застосовуємо цю формулу до конкретних інтервалів з табл. 1, знаходимо суму і отримуємо в результаті

$$A_{00} + jB_{00} = U_{dc}\ . \tag{14}$$

Для r=0, n>0

Запишемо формулу для визначення коефіцієнтів у вигляді:

$$A_{0n} + jB_{0n} = \frac{U_{dc}}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\int_{x_{si}}^{x_{ei}} e^{jny}dxdy = \frac{U_{dc}}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\varDelta x_i e^{jny}dy\ . \tag{15}$$

Виходячи з даних табл. 1, проходимо той же шлях, що і у попередньому випадку, отримуючи:

$$A_{0n} + jB_{0n} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}mU_{dc}}{4\pi}\left\langle \frac{e^{j(n+1)\frac{\pi}{3}} - 1}{j(n+1)}\left[1 + e^{j(n+1)\pi}\right]\left\{e^{-j\frac{\pi}{6}} + e^{j\left[(n+1)\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right]}\right\} + \frac{e^{j(n-1)\frac{\pi}{3}} - 1}{j(n-1)}\left[1 + e^{j(n-1)\pi}\right]\left\{e^{j\frac{\pi}{6}} + e^{j\left[(n-1)\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]}\right\}\right\rangle +$$

$$+\frac{U_{dc}}{\pi}\frac{e^{jn\frac{\pi}{3}}-1}{jn}\left(e^{jn\frac{\pi}{3}}+e^{jn\pi}+e^{jn\frac{5\pi}{3}}\right). \qquad (16)$$

У формулі (16) складова $\frac{U_{dc}}{\pi}\frac{e^{jn\frac{\pi}{3}}-1}{jn}\left(e^{jn\frac{\pi}{3}}+e^{jn\pi}+e^{jn\frac{5\pi}{3}}\right)$=0 для всіх значень n>0, крім n=3 (2s–1)=3,9,15,21,… (s=1,2,3…), коли вона дорівнює:

$$6U_{dc}/jn\pi=-j\,6U_{dc}/n\pi. \qquad (17)$$

Вираз $1+e^{j(n\pm1)\pi}$ =0 для всіх парних значень n=2s, тому

$$A_{0n}+jB_{0n}\big|_{n=2s}=0. \qquad (18)$$

Той самий співмножник для непарних значень n=2s+1 дорівнює 2.

З урахуванням цього для непарних значень n ліву частину виразу (16) у трикутних дужках можна привести до вигляду:

$$A_{0n}+jB_{0n}\big|_{n=2s+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi}\left\langle\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}}{n+1}e^{j(n+1)\frac{\pi}{6}}\left\{e^{-j\frac{\pi}{6}}+e^{j\left[(n+1)\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right]}\right\}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}}{n-1}e^{j(n-1)\frac{\pi}{6}}\left\{e^{j\frac{\pi}{6}}+e^{j\left[(n-1)\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right]}\right\}\right\rangle=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1}e^{j(n+1)\frac{\pi}{3}}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1}e^{j(n-1)\frac{\pi}{3}}\right]=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{3}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}+\\ +j\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{3}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right]\end{array}\right\}. \qquad (19)$$

У результаті перетворення формули (16) отримано наступний вираз:

$$A_{0n}+jB_{0n}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi}\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1}\cos(n+1)\frac{\pi}{3}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1}\cos(n-1)\frac{\pi}{3}+\\ +j\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{3}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right]\end{array}\right\}_{n=2s+1}-$$

$$-j\frac{6U_{dc}}{n\pi}\bigg|_{n=6s-3=3,9,15...}. \qquad (20)$$

Розглянемо окремий випадок $\boldsymbol{n}$**=1**, при якому підстановка даного значення n у вираз (20) дає невизначеність (ділення 0 на 0). Шукана формула може бути отримана безпосередньо з (16):

$$A_{01}+jB_{01}=\lim_{n\to1}(A_{0n}+jB_{0n})=m\frac{U_{dc}}{2}. \qquad (21)$$

Для r>0

У даному діапазоні необхідно виходити із загальної формули (12):

$$A_{rn}+jB_{rn}=\frac{U_{dc}}{2\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\int_{x_{ri}}^{x_{fi}}e^{j(rx+ny)}dxdy=\frac{U_{dc}}{j2r\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\left(e^{jrx_{fi}}-e^{jrx_{ri}}\right)e^{jny}dy=$$

$$=\frac{U_{dc}}{j2r\pi^2}\sum_{i=1}^{6}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\left(e^{jrx_{fi}}-e^{-jrx_{fi}}\right)e^{jny}dy \qquad (22)$$

і співвідношень Якобі-Ангера з використанням функцій Беселя: $e^{\pm j\xi\cos\theta}=J_0(\xi)+2\sum_{k=1}^{\infty}j^{\pm k}J_k(\xi)\cos k\theta$.

Стосовно нашого випадку слід мати на увазі, що

$$e^{\pm jr\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\cos(y+\varphi)}=J_0\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)+2\sum_{k=1}^{\infty}j^{\pm k}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\cos k(y+\varphi); \qquad (23)$$

$$e^{\pm jr\left[\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\cos(y+\varphi)+\pi\right]}=e^{\pm jr\left[\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\cos(y+\varphi)\right]}e^{\pm jr\pi}=(-1)^r e^{\pm jr\left[\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\cos(y+\varphi)\right]}; \qquad (24)$$

$$\frac{U_{dc}}{jr\pi^2}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}e^{jny}\sum_{k=1}^{\infty}\left(j^k-j^{-k}\right)J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\cos k(y+\varphi)dy=\frac{2U_{dc}}{r\pi^2}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}e^{jny}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\frac{\pi}{2}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\cos k(y+\varphi)dy=$$

$$=\frac{U_{dc}}{r\pi^2}\int_{y_{si}}^{y_{ei}}\sum_{k=1}^{\infty}\sin k\frac{\pi}{2}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\left\{e^{j[(n+k)y+k\varphi]}+e^{j[(n-k)y-k\varphi]}\right\}dy=\frac{V_{dc}}{r\pi^2}\Lambda\Big|_{y_{si}}^{y_{ei}}, \qquad (25)$$

де

$$\Lambda=J_n\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)e^{-jn\varphi}y\Big|_{k=|n|}+\sum_{k=1}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\sin k\frac{\pi}{2}\left\{\frac{e^{j[(n+k)y+k\varphi]}}{j(n+k)}\Bigg|_{k\neq -n}+\frac{e^{j[(n-k)y-k\varphi]}}{j(n-k)}\Bigg|_{k\neq n}\right\}. \qquad (26)$$

Розгляд за інтервалами згідно з табл. 1 і подальше додавання приводить до такого результату:

$$A_{rn}+jB_{rn}=\frac{2U_{dc}}{r\pi^2}J_n\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi}{3}\left[1+(-1)^r\right]\cos n\frac{\pi}{6}+$$

$$+\frac{8U_{dc}}{r\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\(k\neq -n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\sin k\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{j\left[(n+k)\frac{5\pi}{6}+r\pi\right]}\sin(n+k)\frac{\pi}{6}\cos(n+k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n+2k+3r)\frac{\pi}{6}}{n+k}+$$

$$+\frac{8U_{dc}}{r\pi^2}\sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\sin k\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{j\left[(n-k)\frac{5\pi}{6}+r\pi\right]}\sin(n-k)\frac{\pi}{6}\cos(n-k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n-2k+3r)\frac{\pi}{6}}{n-k}. \qquad (27)$$

В остаточному вигляді даний вираз можна представити так:

$$A_{rn}+jB_{rn}=\frac{2U_{dc}}{r\pi^2}\frac{\pi}{3}\left[1+\cos(r\pi)\right]\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\frac{\pi}{6}J_n\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)+\frac{8U_{dc}}{r\pi^2}(1+j)\cos(r\pi)\times$$

$$\times\left\{\sum_{\substack{k=1\\(k\neq -n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n+k}\cos(n+k)\frac{5\pi}{6}\sin(n+k)\frac{\pi}{6}\cos(n+k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n+2k+3r)\frac{\pi}{6}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{n-k}\cos(n-k)\frac{5\pi}{6}\sin(n-k)\frac{\pi}{6}\cos(n-k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n-2k+3r)\frac{\pi}{6}\right\}. \qquad (28)$$

Покажемо можливості проведення аналогічного дослідження гармонічного складу вихідних напруг при застосуванні перервних модуляційних функцій ПШІМ1, ПШІМ2, ПШІМ3 [1]. На рис. 2 показано умовне розташування змінних $x(t)$ та $y(t)$ для модуляційних функцій ПШІМ1, ПШІМ2, ПШІМ3.

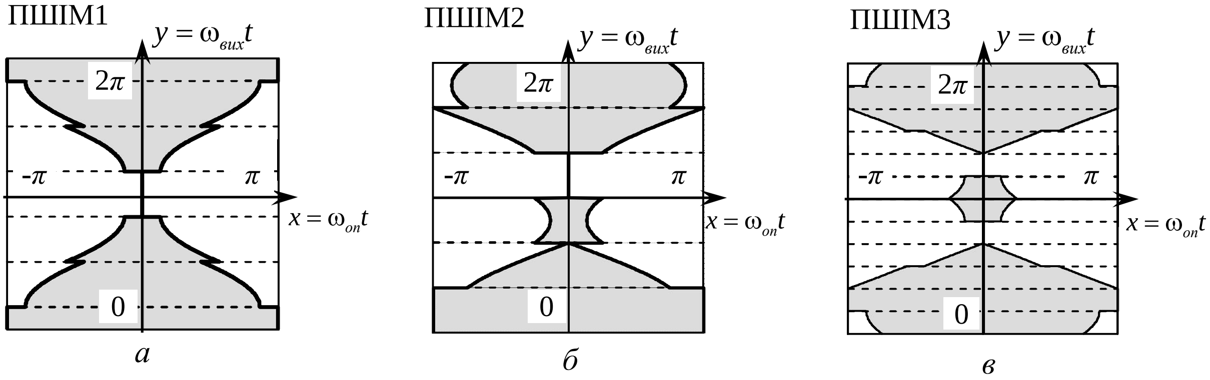


Рис. 2

В табл. 2 наведено границі інтегрування для функції ПШІМ1.

Таблиця 2

i	y_s	y_e	x_s	x_e
1	0	$\frac{\pi}{6}$	$-\pi$	π
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$	
2	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$	
3	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)+2\pi$	
4	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	0	0
			$\Delta x = x_e - x_s = 0$	
5	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi$	
6	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = \sqrt{3}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$	
7	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$-\pi$	π
			$\Delta x = x_e - x_s = 2x_e = 2\pi$	

Як видно з табл. 2, період вихідної напруги АІН при використанні модуляційної функції ПШІМ1 складається з семи інтервалів, на відміну від періоду вихідної напруги, отриманої при реалізації модуляційної функції ПШІМ0.

Причиною такої відмінності є те, що при використанні функції ПШІМ1 відлік початку періоду вихідної напруги починається посередині інтервалу тривалістю $\pi/3$, протягом якого при комутаціях ключів АІН для реалізації нульового стаціонарного стану використовується під'єднання всіх фаз навантаження виключно до позитивної шини вхідного джерела живлення. Таким чином утворюється перший інтервал табл. 2 тривалістю $\pi/6$, після якого на періоді вихідної напруги розташовуються п'ять інтервалів тривалістю $\pi/3$ кожен (інтервали 2−6), і завершується період інтервалом 7 тривалістю $\pi/6$ [1].

Для випадку формування вихідної напруги за алгоритмом ПШІМ1 вирази (14), (20), (21), (28) запишуться так:

$$A_{00} + jB_{00} = U_{dc}; \tag{29}$$

$$A_{0n} + jB_{0n} = \frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} + \frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1}\right]_{n=2s+1} +$$

$$+\frac{6U_{dc}}{n\pi}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\bigg|_{n=6s-3=3,9,15...}; \tag{30}$$

$$A_{01}+jB_{01}=m\frac{U_{dc}}{2}; \tag{31}$$

$$A_{rn}+jB_{rn}=\frac{2U_{dc}}{r\pi^2}\,\frac{\pi}{3}\left[1+\cos(r\pi)\right]\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\frac{\pi}{6}\,J_n\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)+\frac{8U_{dc}}{r\pi^2}\,\cos(r\pi)\times$$

$$\times\left\{\sum_{\substack{k=1\\(k\neq -n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}\sin(n+k)\frac{\pi}{6}\cos(n+k+r)\pi\cos(n+k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n+2k+3r)\frac{\pi}{6}}{n+k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}\sin(n-k)\frac{\pi}{6}\cos(n-k+r)\pi\cos(n-k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n-2k+3r)\frac{\pi}{6}}{n-k}\right\}. \tag{32}$$

Таблиця 3

i	y_s	y_e	x_s	x_e
1	0	$\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	π
			$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=2\pi$	
2	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$	
3	$\frac{2\pi}{3}$	π	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
			$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)+2\pi$	
4	π	$\frac{4\pi}{3}$	0	0
			$\Delta x=x_e-x_s=0$	
5	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
			$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi$	
6	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$
			$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$	

У табл. 3 показано границі інтегрування для перервної модуляційної функції ПШІМ2. Ця функція відрізняється від модуляційної функції ПШІМ0 тим, що при реалізації ПШІМ2 на непарних інтервалах періоду вихідної напруги (інтервали 1,3,5) як нульовий стаціонарний стан використовується під'єднання всіх фаз навантаження до позитивної шини джерела живлення АІН, а на парних інтервалах (2,4,6) − під'єднання всіх фаз навантаження до негативної шини джерела живлення [1], в той час, як при реалізації ПШІМ0 на інтервалах 1,3,5 використовується під'єднання до негативної шини, а на інтервалах 2, 4, 6 – до позитивної шини.

Для випадку формування за алгоритмом ПШІМ2 вирази (14), (20), (21), (28) запишуться так:

$$A_{00}+jB_{00}=U_{dc}\;; \tag{33}$$

$$A_{0n}+jB_{0n}=\frac{2\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi}\left\{\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}\cos(n+1)\frac{2\pi}{3}}{n+1}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}\cos(n-1)\frac{2\pi}{3}}{n-1}+\right.$$

$$\left.\left.+j\left[\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{6}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}\sin(n+1)\frac{2\pi}{3}}{n+1}+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{6}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}\sin(n-1)\frac{2\pi}{3}}{n-1}\right]\right\}\right|_{n=2s+1}+j\left.\frac{6U_{dc}}{n\pi}\right|_{n=6s-3=3,9,15...} \tag{34}$$

$$A_{01}+jB_{01}=m\frac{U_{dc}}{2}; \tag{35}$$

$$A_{rn}+jB_{rn}=\frac{2U_{dc}}{r\pi^2}\,\frac{\pi}{3}\left[1+\cos(r\pi)\right]\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\frac{\pi}{6}\,J_n\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)+\frac{8U_{dc}}{r\pi^2}\,(1+j)\cos(r\pi)\times$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&\sum_{\substack{k=1\\(k\neq-n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}\sin(n+k)\frac{\pi}{6}\cos(n+k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n+2k+3r)\frac{\pi}{6}\cos(n+k)\frac{7\pi}{6}}{n+k}+\\&+\sum_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{\infty}J_k\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\frac{\sin k\frac{\pi}{2}\sin(n-k)\frac{\pi}{6}\cos(n-k+r)\frac{\pi}{2}\cos(n-2k+3r)\frac{\pi}{6}\cos(n-k)\frac{7\pi}{6}}{n-k}\end{aligned}\right\}. \qquad (36)$$

Таблиця 4

i	y_s	y_e	x_r	x_f
1	0	$\pi/6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$
4	$\pi/2$	$2\pi/3$	$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi\, m\cos(y-\pi/6)$	
2	$\pi/6$	$\pi/3$	$-\pi$	π
11	$5\pi/3$	$11\pi/6$	$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=2\pi$	
3	$\pi/3$	$\pi/2$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
6	$5\pi/6$	π	$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi m\cos(y+\pi/6)+2\pi$	
5	$2\pi/3$	$5\pi/6$	0	0
8	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$\Delta x=x_e-x_s=0$	
7	π	$7\pi/6$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)+\pi$
10	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi m\cos(y-\pi/6)+2\pi$	
9	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi m\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$
12	$11\pi/6$	2π	$\Delta x=x_e-x_s=2x_e=\sqrt{3}\pi m\cos(y+\pi/6)$	

У табл. 4 показано границі інтегрування для перервної модуляційної функції ПШІМ3. Ця функція відрізняється від модуляційних функцій ПШІМ0, ПШІМ1, ПШІМ2 тим, що період вихідної напруги при її реалізації необхідно розбивати на 12 інтервалів тривалістю $\pi/6$ кожний. При цьому є можливість об'єднати ці інтервали в шість груп за ознакою ідентичності границь інтегрування (1 і 4, 2 і 11, 3 і 6, 5 і 8, 7 і 10, 9 і 12). Границі інтегрування для інтервалів з однієї групи формуються з одних і тих самих функцій.

Для випадку формування за алгоритмом ПШІМ3 вирази (14), (20), (21), (28) запишуться

$$A_{00}+jB_{00}=U_{dc}; \qquad (37)$$

$$A_{0n}+jB_{0n}=$$

$$=\frac{4\sqrt{3}mU_{dc}}{\pi}\left[\begin{aligned}&\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{12}\cos(n+1)\frac{\pi}{4}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\cos(n+2)\frac{\pi}{6}}{n+1}+\\&+\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{12}\cos(n-1)\frac{\pi}{4}\cos(n-1)\frac{\pi}{2}\cos(n-2)\frac{\pi}{6}}{n-1}\end{aligned}\right]_{n=2s+1}-\frac{6U_{dc}}{n\pi}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\Bigg|_{n=6s-3=3,9,15...}; \qquad (38)$$

$$A_{01}+jB_{01}=m\frac{U_{dc}}{2}; \qquad (39)$$

$$A_{rn}+jB_{rn}=4\frac{U_{dc}}{r\pi^2}\,\frac{\pi}{6}\left[1+\cos(r\pi)\right]\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\cos n\frac{\pi}{6}\,J_n\left(r\frac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\Bigg|_{k=|n|}+16\frac{U_{dc}}{r\pi^2}\times$$

$$\times\begin{Bmatrix}\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq-n)}}^{\infty} J_k\left(r\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\dfrac{\sin k\dfrac{\pi}{2}\sin(n+k)\dfrac{\pi}{12}\cos(n+k)\dfrac{\pi}{4}\cos(n+k+r)\pi\cos(n+k+r)\dfrac{\pi}{2}\cos(n+2k+3r)\dfrac{\pi}{6}}{n+k}+\\ +\sum\limits_{\substack{k=1\\(k\neq n)}}^{\infty} J_k\left(r\dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}m\right)\dfrac{\sin k\dfrac{\pi}{2}\sin(n-k)\dfrac{\pi}{12}\cos(n-k)\dfrac{\pi}{4}\cos(n-k+r)\pi\cos(n-k+r)\dfrac{\pi}{2}\cos(n-2k+3r)\dfrac{\pi}{6}}{n-k}\end{Bmatrix}. \quad (40)$$

Для порівняння повних спектрів вихідної напруги U_{a0}, (U_{b0}, U_{c0}) (тобто, напруги між виходами інвертора і середньою точкою джерела живлення) [1] побудуємо спектрограми цієї напруги для різних методів модуляції, виходячи зі співвідношення $C_{rn}=\sqrt{A_{rn}^2+B_{rn}^2}$ для амплітуд гармонік з номерами гармонік r та n та формул (20), (32), (36), (40). На рис. 3, *а* наведено двовимірну спектрограму вихідної напруги АІН при застосуванні ПШІМ0, на рис. 3, *б* – спектрограму вихідної напруги при застосовуванні ПШІМ1, на рис. 3, *в* – спектрограму вихідної напруги при застосуванні ПШІМ2 і на рис. 3, *г* – спектрограму при застосуванні ПШІМ3.

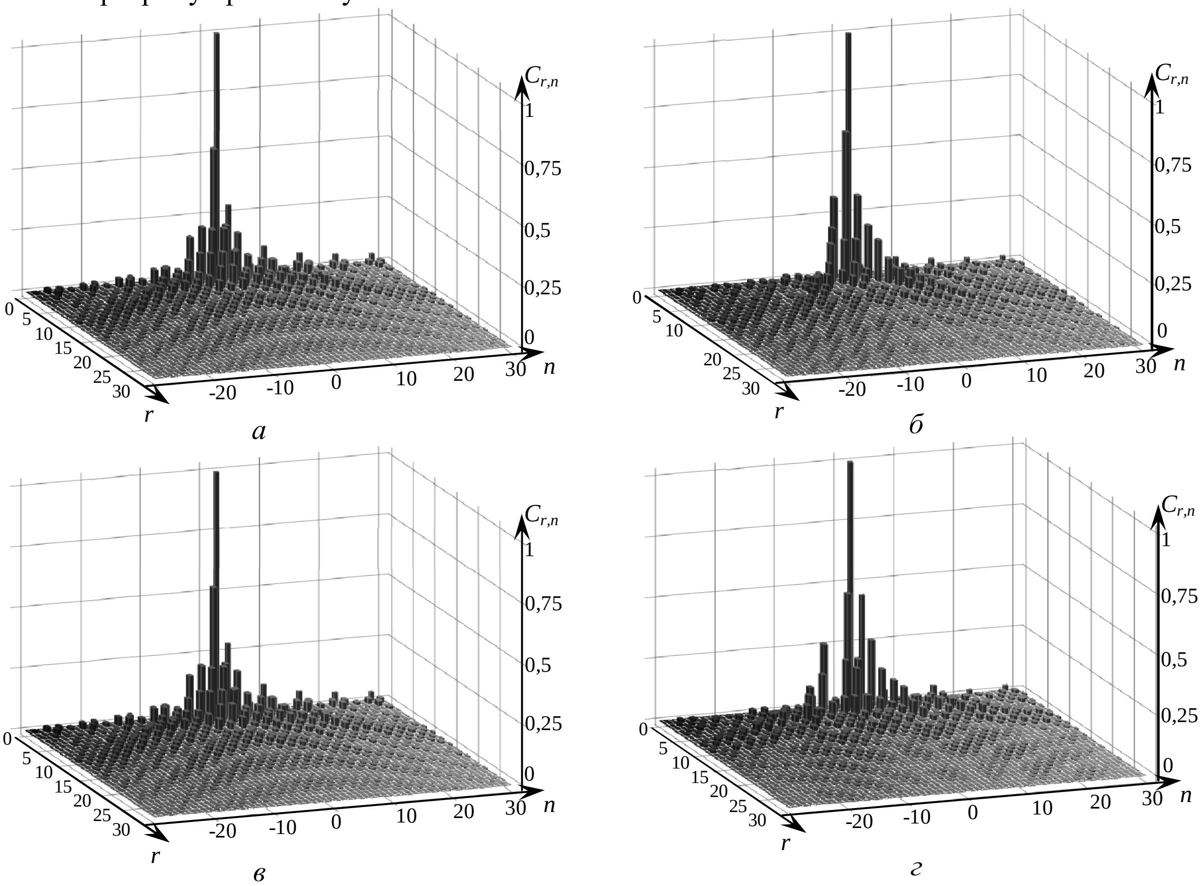
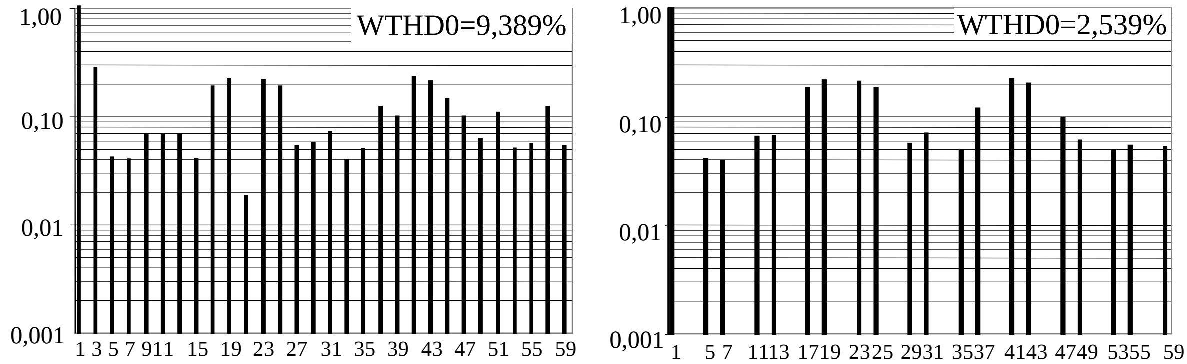


Рис. 3

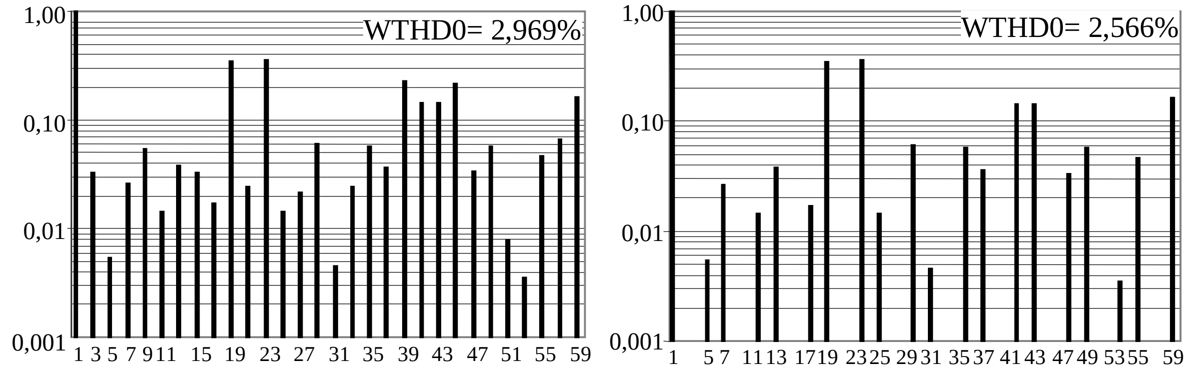
На рис. 4–рис. 7 показано одновимірні спектри напруг між виходами інвертора і середньою точкою джерела живлення (U_{a0}, U_{b0}, U_{c0}) (рис. 4, *а*, 5, *а*, 6, *а*, 7, *а*) та напруг на фазах навантаження (U_{aN}, U_{bN}, U_{cN}) (рис. 4, *б;* 5, *б;* 6, *б;* 7, *б*) для різних методів перервної модуляції: рис. 4 – ПШІМ0, рис. 5 – ПШІМ1, рис. 6 – ПШІМ2 та рис. 7 – ПШІМ3. Спектри побудовано за умов: f_{on} =1050 Гц; $f_{вих}$ =50 Гц; $r=1,2\ldots180$; $n=-180,-179\ldots0,1\ldots180$; співвідношення частот $f_{on}/f_{вих}=21$; модуляційний індекс m =1.

Висновки. Порівнюючи спектрограми на рис. 3 та рис. 4–7, можна зробити висновок, що застосування для керування АІН перервних модуляційних функцій ПШІМ0 та ПШІМ2 забезпечує однакові значення нормованого зваженого загального коефіцієнта гармонік напруги WTHD0 вихідних напруг U_{a0}, U_{b0}, U_{c0} (WTHD0 =9,389% як для ПШІМ0, так і для ПШІМ2) та напруг на фазах навантаження U_{aN}, U_{bN}, U_{cN} (WTHD0 =2,539% для ПШІМ0 і ПШІМ2). Це можна пояснити однаковістю підходів до формування нульових стаціонарних станів при керуванні АІН із застосуванням цих модуляційних функцій. Спектри напруг U_{aN}, U_{bN}, U_{cN} відрізняються від спектрів напруг U_{a0}, U_{b0}, U_{c0} (рис. 4–7) відсутністю складових, кратних трьом, тобто складових нульової послідовності.



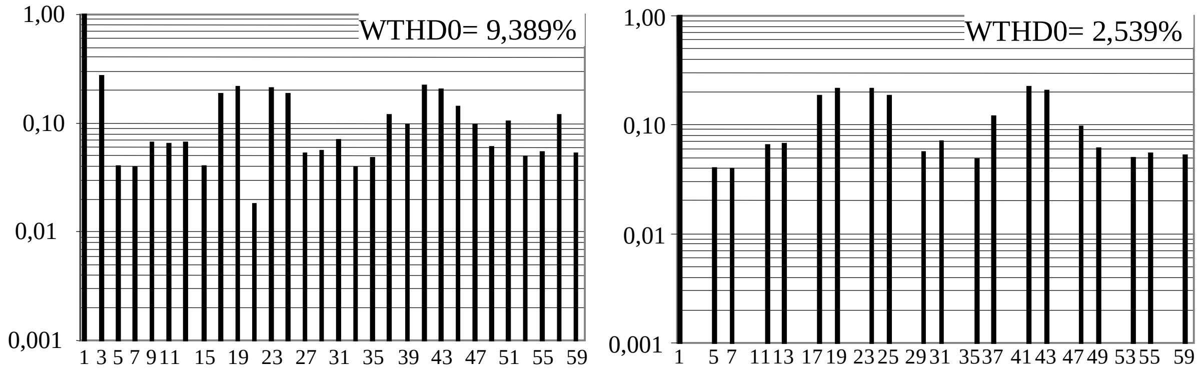
а *б*

Рис. 4



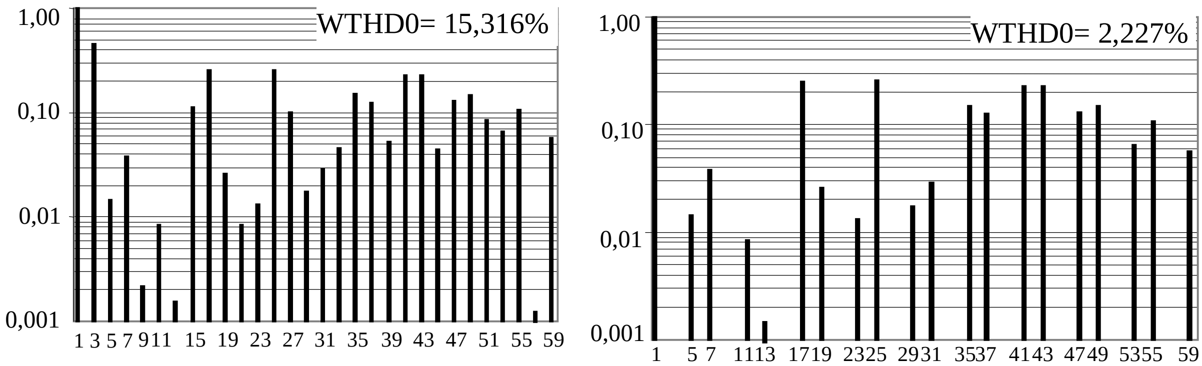
а *б*

Рис. 5



а *б*

Рис. 6



а *б*

Рис. 7

Для вибраного співвідношення частоти ШІМ $f_{оп}$ та вихідної частоти $f_{вих}$ ($f_{оп}$ / $f_{вих}$ =21) згадана нульова послідовність містить тільки складові з кратністю n=6s–3=3, 9, 15, … по відношенню до першої гармонічної вихідної напруги, але теоретично при довільних співвідношеннях $f_{оп}$ / $f_{вих}$ до складу нульової послідовності можуть входити також інші гармонічні, кратні трьом.

Порівнюючи коефіцієнти WTHD0 для напруг U_{a0}, U_{b0}, U_{c0} при застосуванні різних методів перервної модуляції, можна відзначити, яку важливу роль відіграє саме якісний склад спектрів напруг. Наприклад, для методу ПШІМ1 коефіцієнт WTHD0 напруги U_{a0} дорівнює лише 2,969% саме з причини малих амплітуд третьої та п'ятої гармонічних, чий внесок в сумарний коефіцієнт гармонік найбільш вагомий. В той же час, при застосуванні методу ПШІМ3 коефіцієнт WTHD0 напруги U_{a0} досягає значення 15,316% також саме з причини значної амплітуди третьої гармоніки в спектральному складі цієї напруги (рис. 7, *а*).

Для практичного ж застосування більш важливими є частотний спектр та значення коефіцієнта WTHD0 для напруг на фазах навантаження U_{aN}, U_{bN}, U_{cN} (рис. 4, *б;* 5, *б;* 6, *б;* 7, *б*), адже саме ці показники визначають якість вихідного струму АІН при використанні різних методів підмодуляції в модуляційних функціях, в той час як частотний спектр та значення WTHD0 вихідних напруг U_{a0}, U_{b0}, U_{c0} лише дозволяють опосередковано оцінити гармонічний склад та амплітудні значення складових підмодулюючих функцій.

1. *Михальський В.М., Соболєв В.М., Чопик В.В., Шаповал І.А.* Керування автономними інверторами напруги із забезпеченням максимального коефіцієнта модуляції при неспотворюючому формуванні вихідної напруги засобами модифікованої ШІМ // Техн. електродинаміка. – 2010. – №.1. – С. 49–59.

2. *Чаплыгин Е.Е.* Двухфазная широтно-импульсная модуляция в трехфазных инверторах напряжения // Электричество. – 2009. – №8. – С. 56–61.

3. *Шрейнер Р.Т.* Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. – Екатеринбург: УрО РАН, 2000. – 654 с.

4. *Bowes S.R., Yen-Shin Lai* The relationship between space-vector modulation and regular-sampled PWM // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – Oct 1997. – Vol.44. – No.5. – Pp. 670–679.

5. *Holmes D.G., Lipo T.A.* Pulse Width Modulation for Power Converters - Principle and Practice. – New York, USA: IEEE Series on Power Engineering, IEEE Press/Wiley InterScience, 2003. – 744 p.

6. *Holmes D.G.* The general relationship between regular-sampled pulse-width-modulation and space vector modulation for hard switched converters // Proc of the Conf. IEEE-IAS Annual Meeting. – 1992. – Pp. 1002–1009.

7. *Holtz J.* Pulsewidth modulation for electronic power conversion // Proc. of IEEE. – Aug 1994. – Vol. 82. – Pp. 1194–1214.

8. *Moynihan J.F., Egan M.G., Murphy J.M.D.* Theoretical spectra of space-vector-modulated waveforms // IEE Proc. Electr. Power Applications. – Jan 1998. – Vol. 145. – No.1. – Pp. 14–24.

9. *Van der Broeck H.W.* Analysis of the harmonics in voltage fed converter drives caused by PWM schemes with discontinuous switching operation // Conf. Rec. European Power Electronics Conf. (EPE), Florence. – 1991. – Pp. 3:261–3:266.

10. *Zhou K., Wang D.* Relationship between space-vector modulation and three-phase carrier-based PWM: a comprehensive analysis // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2002. – Vol. 49. – No.1. – Pp. 186–196.

Надійшла 22.12.2009