ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ И СРЕДСТВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 621.3.015.52: 621.3.011.72

Н. А. Шидловская, чл.-кор. НАН Украины,
С. Н. Захарченко, канд. техн. наук
Ин-т электродинамики НАН Украины
(Украина, 03057, Киев, пр-т Победы, 56,
тел. (044) 4542425, e-mail: <snzakhar@bk.ru>)

Моделирование процессов в цепи разряда конденсатора на искроэрозионную нагрузку

Методом малого параметра проведено моделирование переходных электромагнитных процессов в RLC-контуре с искроэрозионной нагрузкой при аппроксимации ее сопротивления параметрическими зависимостями.

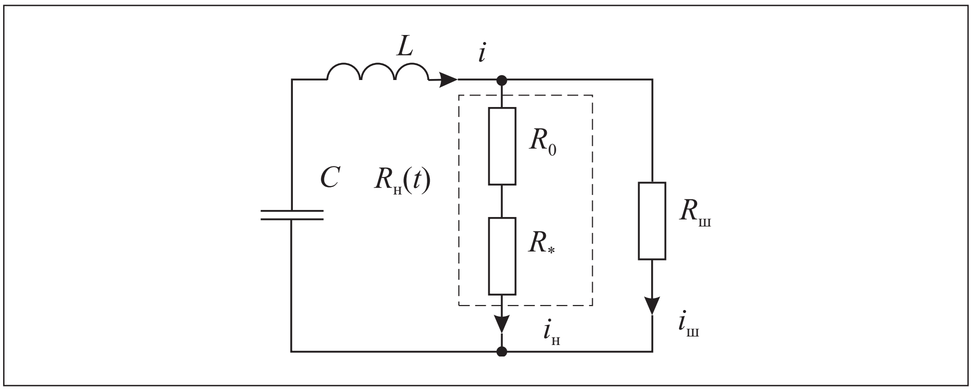
Методом малого параметра проведено моделювання перехідних електромагнітних процесів у RLC-контурі з іскроерозійним навантаженням при апроксимації його опору параметричними залежностями.

Ключевые слова: электрическое сопротивление, искроэрозионная нагрузка, параметрическая зависимость, метод малого параметра.

Моделирование электромагнитных процессов в цепях, содержащих искроэрозионные нагрузки, является актуальной и важной задачей при разработке и оптимизации соответствующих электротехнических комплексов [1]. Однако, в связи со специфическими особенностями сопротивления таких нагрузок, описываемых в общем случае нелинейно-параметрическими зависимостями, анализ электромагнитных процессов в них является трудоемкой задачей, иногда неразрешимой аналитическими методами.

В [2] показано, что при определенных условиях эквивалентное электрическое сопротивление таких нагрузок с некоторыми допущениями может быть аппроксимировано исключительно параметрическими функциями. Это существенно упрощает расчеты и позволяет избежать неоднозначности, характерной для нелинейного представления зависимости сопротивления нагрузки от протекающего в ней тока. Моделирование процессов в цепи разряда конденсатора на искроэрозионную нагрузку выполним с применением метода малого параметра.

Моделирование переходного процесса. Эквивалентная схема замещения цепи разряда конденсатора на искроэрозионную нагрузку представлена на рисунке, где C — емкость рабочего конденсатора; L — индук-



тивность разрядного контура (определяемая собственной индуктивностью элементов цепи и индуктивностью соединительных кабелей); i, $i_{\text{н}}$ и $i_{\text{ш}}$ — токи в реактивных элементах цепи, нагрузке и шунтирующем сопротивлении; $R_{\text{ш}}$ — сопротивление резистивного шунта (в данном случае 3 Ом) [3]; $R_{\text{н}}(t)$ — параметрическая зависимость эквивалентного сопротивления искроэрозионной нагрузки,

$$R_{\text{н}}(t) = R_0 + A_1 \exp(-a_1 t) + A_2 \exp(a_2 t) = R_0 + R_*(t). \tag{1}$$

Здесь A_1, a_1 — коэффициенты, характеризующие процессы генерации свободных носителей заряда в искровых каналах; A_2, a_2 — коэффициенты, характеризующие процессы рекомбинации свободных носителей заряда в искровых каналах; R_0 — постоянная составляющая активного сопротивления искроэрозионной нагрузки, R_* — его параметрическая составляющая.

В соответствии с законами Кирхгофа [4] для цепи, представленной на рисунке, можно записать

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}\int i\,dt + \frac{1}{L} i_{\text{н}} R_{\text{н}} = 0; \tag{2}$$

$$i = i_{\text{н}}\left(1 + \frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{ш}}}\right), \tag{3}$$

или

$$\frac{di_{\text{н}}}{dt} + \frac{1}{LC}\int i_{\text{н}}\,dt + \frac{R_0 R_{\text{ш}}}{L(R_0 + R_{\text{ш}})} i_{\text{н}} +$$

$$+ \frac{R_0}{R_0 + R_{\text{ш}}}\left[\frac{1}{R_{\text{ш}}}\frac{d(i_{\text{н}} R_*)}{dt} + \frac{1}{R_{\text{ш}} LC}\int i_{\text{н}} R_*\,dt + \frac{R_*}{L} i_{\text{н}}\right] = 0. \tag{4}$$

Для решения полученного уравнения применим метод малого параметра [5]. В качестве малого параметра примем

$$\varepsilon = \frac{R_0}{R_0 + R_ш} < 1$$

и представим ток в цепи нагрузки в виде ограниченного асимптотического ряда по степеням малого параметра: $i_н = i_0 + \varepsilon i_1 + \varepsilon^2 i_2$, где i_0 — порождающее решение, соответствующее линейному случаю; i_1 и i_2 — первое и второе приближения. Следует заметить, что подобное ограничение ряда предусматривает пренебрежение слагаемыми уравнения при степенях ε выше второй. Таким образом, соотношение (4) преобразуется к виду

$$\frac{d(i_0 + \varepsilon i_1 + \varepsilon^2 i_2)}{dt} + \frac{1}{LC}\int (i_0 + \varepsilon i_1 + \varepsilon^2 i_2)\, dt + \frac{R_0 R_ш}{L(R_0 + R_ш)}(i_0 + \varepsilon i_1 + \varepsilon^2 i_2) +$$

$$+\varepsilon\left[\frac{1}{R_ш}\frac{d(i_0 + \varepsilon i_1) R_*}{dt} + \frac{1}{R_ш LC}\int (i_0 + \varepsilon i_1) R_*\, dt + \frac{R_*}{L}(i_0 + \varepsilon i_1)\right] = 0. \quad (5)$$

Определим начальные условия для интегро-дифференциального уравнения (5):

$$i|_{t=0} = 0 \Rightarrow i_н|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Воспользовавшись уравнением (2), запишем

$$\left[L\frac{di}{dt} + i_н R_н\right]\Big|_{t=0} = \left[L\frac{di}{dt}\right]\Big|_{t=0} = -\frac{Q_0}{C},$$

где Q_0 — начальный заряд на конденсаторе. Для нахождения $\left.\frac{di_н}{dt}\right|_{t=0}$ продифференцируем соотношение (3) с учетом (1):

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_н}{dt} + \frac{1}{R_ш}\frac{d(i_н R_н)}{dt} = \frac{di_н}{dt} + \frac{R_0}{R_ш}\frac{di_н}{dt} + \frac{R_*}{R_ш}\frac{di_н}{dt} + \frac{i_н}{R_ш}\frac{dR_*}{dt}.$$

Отсюда с учетом условия (6) получим

$$\left(1 + \frac{R_0}{R_ш} + \frac{R_*}{R_ш}\right)\left.\frac{di_н}{dt}\right|_{t=0} = \left(1 + \frac{R_0}{R_ш} + \frac{A_1 + A_2}{R_ш}\right)\left.\frac{di_н}{dt}\right\|_{t=0} = -\frac{Q_0}{CL},$$

$$\left.\frac{di_н}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{Q_0}{CL}\frac{R_ш}{R_ш + R_0 + A_1 + A_2}. \quad (7)$$

Из уравнения (5) выделим коэффициенты:
при ε^0

$$\frac{di_0}{dt}+\frac{1}{LC}\int i_0 dt+\frac{R_0 R_{ш}}{L(R_0+R_{ш})}i_0=0; \tag{8}$$

при ε^1

$$\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{LC}\int i_1 dt+\frac{R_0 R_{ш}}{L(R_0+R_{ш})}i_1=$$
$$=-\frac{1}{R_{ш}}\frac{d(i_0 R_*)}{dt}-\frac{1}{R_{ш}LC}\int i_0 R_* dt-\frac{R_*}{L}i_0=-F_1(t); \tag{9}$$

при ε^2

$$\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{LC}\int i_2 dt+\frac{R_0 R_{ш}}{L(R_0+R_{ш})}i_2=$$
$$=-\frac{1}{R_{ш}}\frac{d(i_1 R_*)}{dt}-\frac{1}{R_{ш}LC}\int i_1 R_* dt-\frac{R_*}{L}i_1=-F_2(t). \tag{10}$$

Ненулевые начальные условия (7) будем учитывать только при решении невозмущенного уравнения (8), а случаи (9) и (10) будем рассматривать при нулевых начальных условиях.

Проанализируем апериодический режим разряда конденсатора в цепи, изображенной на рисунке. Для этого приведем интегро-дифференциальное уравнение (8) к виду

$$\frac{d^2 i_0}{dt^2}+\frac{R_0 R_{ш}}{L(R_0+R_{ш})}\frac{di_0}{dt}+\frac{i_0}{LC}=0.$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид [6]

$$i_0=C_{10}e^{\lambda_1 t}+C_{10}e^{\lambda_2 t}. \tag{11}$$

Здесь C_{10}, C_{20} — постоянные интегрирования; λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения,

$$\lambda_1=-\frac{R_0 R_{ш}}{2L(R_0+R_{ш})}+\sqrt{\frac{R_0^2 R_{ш}^2}{4L^2(R_0^2+R_{ш}^2)}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R_{А}}{2L}+\sqrt{\frac{R_A^2}{4L^2}-\omega_0^2};$$

$$\lambda_2=-\frac{R_0 R_{ш}}{2L(R_0+R_{ш})}-\sqrt{\frac{R_0^2 R_{ш}^2}{4L^2(R_0^2+R_{ш}^2)}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R_{А}}{2L}-\sqrt{\frac{R_A^2}{4L^2}-\omega_0^2}, \tag{12}$$

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2012. V. 34. № 6

где R_A — линейная составляющая активного сопротивления в параметрической цепи, $R_A = \dfrac{R_0 R_ш}{R_0 + R_ш}$; $\omega_0^2 = 1/(LC)$ — квадрат частоты собственных колебаний цепи.

С учетом начальных условий (6), (7) выражение (11) преобразуется к виду

$$i_0 = K_0 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}), \tag{13}$$

где

$$K_0 = -\frac{Q_0 \omega_0^2 R_ш}{2(R_ш + R_0 + A_1 + A_2)\sqrt{\dfrac{R_A^2}{4L^2} - \omega_0^2}}.$$

Соотношение (13) является порождающим решением уравнения (5). Для решения интегро-дифференциального уравнения (9) воспользуемся выражением (13) и приведем его к виду неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_A}{L}\frac{di_1}{dt} + \omega_0^2 i_1 = -F_1(t), \tag{14}$$

$$F_1(t) = K_0 A_1 \left[\frac{(\lambda_1 - a_1)^2}{R_ш} + \frac{\lambda_1 - a_1}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш}\right] e^{(\lambda_1 - a_1)t} + K_0 A_2 \left[\frac{(\lambda_1 + a_2)^2}{R_ш} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_1 + a_2}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш}\right] e^{(\lambda_1 + a_2)t} - K_0 A_1 \left[\frac{(\lambda_2 - a_1)^2}{R_ш} + \frac{\lambda_2 - a_1}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш}\right] e^{(\lambda_2 - a_1)t} -$$

$$- K_0 A_2 \left[\frac{(\lambda_2 + a_2)^2}{R_ш} + \frac{\lambda_2 + a_2}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш}\right] e^{(\lambda_2 + a_2)t} = f_1(t) + f_2(t),$$

где

$$f_1(t) = K_0 A_1\, e^{-a_1 t}[k_{11}\, e^{\lambda_1 t} - k_{12}\, e^{\lambda_2 t}] = B_{11}\, e^{(\lambda_1 - a_1)t} - B_{12}\, e^{(\lambda_2 - a_1)t};$$

$$f_2(t) = K_0 A_2\, e^{a_2 t}[k_{21}\, e^{\lambda_1 t} - k_{22}\, e^{\lambda_2 t}] = B_{21}\, e^{(\lambda_1 + a_1)t} - B_{22}\, e^{(\lambda_2 + a_1)t};$$

$$k_{11} = \frac{(\lambda_1 - a_1)^2}{R_ш} + \frac{\lambda_1 - a_1}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш};\quad k_{21} = \frac{(\lambda_1 + a_2)^2}{R_ш} + \frac{\lambda_1 + a_2}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш}; \tag{15}$$

$$k_{12} = \frac{(\lambda_2 - a_1)^2}{R_ш} + \frac{\lambda_2 - a_1}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш};\quad k_{22} = \frac{(\lambda_2 + a_2)^2}{R_ш} + \frac{\lambda_2 + a_2}{L} + \frac{\omega_0^2}{R_ш}.$$

Таким образом, уравнение (14) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R_A}{L}\frac{di_1}{dt} + \omega_0^2 i_1 =$$

$$= -B_{11}\, e^{(\lambda_1 - a_1)t} + B_{12}\, e^{(\lambda_2 - a_1)t} - B_{21}\, e^{(\lambda_1 + a_2)t} + B_{22}\, e^{(\lambda_2 + a_2)t}. \qquad (16)$$

Общее решение уравнения (16) имеет вид, аналогичный (11), при этом корни характеристического уравнения совпадают с соотношениями (12). Частное решение будем искать, воспользовавшись принципом суперпозиции, применимым для неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами [6], поскольку правая часть уравнения (16) представляет собой сумму четырех экспонент. Тогда

$$i_1 = C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{21} e^{\lambda_2 t} + D_1 e^{(\lambda_1 - a_1)t} + D_2 e^{(\lambda_2 - a_1)t} + D_3 e^{(\lambda_1 + a_2)t} + D_4 e^{(\lambda_2 + a_2)t},$$

где

$$D_1 = \frac{-k_0 A_1}{R_ш}\left[1 + \frac{R_ш^2(\lambda_1 - a_1)}{L(R_0 + R_ш)\, a_1(\lambda_2 - \lambda_1 + a_1)}\right];$$

$$D_2 = \frac{k_0 A_1}{R_ш}\left[1 + \frac{R_ш^2(\lambda_2 - a_1)}{L(R_0 + R_ш)\, a_1(\lambda_1 - \lambda_2 + a_1)}\right];$$

$$D_3 = \frac{-k_0 A_2}{R_ш}\left[1 + \frac{R_ш^2(\lambda_1 + a_2)}{L(R_0 + R_ш)\, a_2(\lambda_2 - \lambda_1 + a_2)}\right];$$

$$D_4 = \frac{k_0 A_2}{R_ш}\left[1 + \frac{R_ш^2(\lambda_2 + a_2)}{L(R_0 + R_ш)\, a_2(\lambda_2 - \lambda_1 + a_2)}\right]; \qquad (17)$$

$$C_{11} = \frac{-M_1\lambda_2 + M_2}{\lambda_2 - \lambda_1};\; C_{12} = \frac{M_1\lambda_1 - M_2}{\lambda_2 - \lambda_1};$$

$$M_1 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4;$$

$$M_2 = D_1(\lambda_1 - a_1) + D_2(\lambda_2 - a_1) + D_3(\lambda_1 + a_2) + D_4(\lambda_2 + a_2).$$

Выражение для i_2 находим аналогично. Если учитывать только первое приближение, то окончательное выражения для тока нагрузки принимает вид

$$i_н = i_0 + \varepsilon i_1 = K_0(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) +$$

$$+ \frac{R_0}{R_0 + R_ш}[C_{11}\, e^{\lambda_1 t} + C_{21}\, e^{\lambda_2 t} + D_1\, e^{(\lambda_1 - a_1)t} + D_2\, e^{(\lambda_2 - a_1)t} +$$

$$+ D_3\, e^{(\lambda_1 + a_2)t} + D_4\, e^{(\lambda_2 + a_2)t}]. \qquad (18)$$

Формулу (18) используем в случае представления параметрической зависимости сопротивления искроэрозионной нагрузки суммой двух экспонент и постоянной составляющей. В более общем случае данную зависимость можно представить суммой трех экспонент и постоянной составляющей:

$$R_{\text{н}}(t)=R_0+A_1\exp(-a_1t)+A_2\exp(a_2t)+A_3\exp(a_3t),$$

где A_3 и a_3 — коэффициенты, характеризующие изменение эквивалентного сопротивления искровых каналов в их развитой стадии.

Следует заметить, что появление третьей экспоненты во многом определяется начальными условиями переходного процесса. При низких начальных напряжениях на конденсаторе, соизмеримых с минимальным напряжением, необходимым для возникновения искровых каналов, пренебрежение третьей экспонентой может привести к несоответствию аппроксимирующей функции реальной зависимости.

В случае аппроксимации параметрической зависимости сопротивления искроэрозионной нагрузки выражением (18) возмущающее воздействие для первого приближения (14) принимает вид

$$F_1(t)=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t),$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяется из (15);

$$f_3(t)=K_0A_3e^{a_3t}[k_{31}e^{\lambda_1t}-k_{32}e^{\lambda_2t}]=B_{31}e^{(\lambda_1+a_3)t}-B_{32}e^{(\lambda_2+a_3)t};$$

$$k_{31}=\frac{(\lambda_1+a_3)^2}{R_{\text{ш}}}+\frac{\lambda_1+a_3}{L}+\frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}};\quad k_{32}=\frac{(\lambda_2+a_3)^2}{R_{\text{ш}}}+\frac{\lambda_2+a_3}{L}+\frac{\omega_0^2}{R_{\text{ш}}}.$$

При этом коэффициент K_0 преобразуется к виду

$$K_0=-\frac{Q_0\omega_0^2R_{\text{ш}}}{2(R_{\text{ш}}+R_0+A_1+A_2+A_3)\sqrt{\frac{R_A^2}{4L^2}-\omega_0^2}}.$$

В выражении для частного решения дифференциального уравнения (14) появляются два новых члена и оно принимает следующий вид:

$$i_1=C_{11}e^{\lambda_1t}+C_{21}e^{\lambda_2t}+D_1e^{(\lambda_1-a_1)t}+D_2e^{(\lambda_2-a_1)t}+D_3e^{(\lambda_1+a_2)t}+$$
$$+D_4e^{(\lambda_2+a_2)t}+D_5e^{(\lambda_1+a_3)t}+D_6e^{(\lambda_2+a_3)t},$$

где

$$D_5 = \frac{-k_0 A_3}{R_ш}\left[1 + \frac{R_ш^2(\lambda_1 + a_3)}{L(R_0 + R_ш)\, a_3(\lambda_1 - \lambda_2 + a_3)}\right];$$

$$D_6 = \frac{k_0 A_3}{R_ш}\left[1 + \frac{R_ш^2(\lambda_2 + a_3)}{L(R_0 + R_ш)\, a_3(\lambda_2 - \lambda_1 + a_3)}\right].$$

При этом коэффициенты M_1 и M_2 для нахождения постоянных интегрирования по формуле (17) принимают вид

$$M_1 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6;$$

$$M_2 = D_1(\lambda_1 - a_1) + D_2(\lambda_2 - a_1) + D_3(\lambda_1 + a_2) + D_4(\lambda_2 + a_2) +$$

$$+ D_5(\lambda_1 + a_3) + D_6(\lambda_2 + a_3).$$

В этом случае окончательное выражение для тока в нагрузке имеет вид

$$i_н = i_0 + \varepsilon i_1 = K_0(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) +$$

$$+ \frac{R_0}{R_0 + R_ш}(C_{11} e^{\lambda_1 t} + C_{21} e^{\lambda_2 t} + D_1 e^{(\lambda_1 - a_1)t} + D_2 e^{(\lambda_2 - a_1)t} +$$

$$+ D_3 e^{(\lambda_1 + a_2)t} + D_4 e^{(\lambda_2 + a_2)t} + D_5 e^{(\lambda_1 + a_3)t} + D_6 e^{(\lambda_2 + a_3)t}). \quad (19)$$

Выводы

1. Получены выражения, описывающие ток в искроэрозионной нагрузке для двух вариантов аппроксимации параметрической зависимости ее сопротивления. При этом вид аппроксимации определяется начальными условиями переходного процесса, а именно начальным напряжением на конденсаторе.

2. Выражения (18) и (19) свидетельствуют о том, что при больших отношениях $R_ш$ к R_0 влияние первого приближения относительно порождающего решения становится менее значительным.

Modelling of the transient electromagnetic processes in RLC-circuit with a spark-erosion load has been carried out at approximation of its resistance by parametric dependences by the method of small parameter.

1. *Захарченко С. Н.* Моделирование зависимости электрического сопротивления гранулированных токопроводящих сред от протекающего в них импульсного тока // Технічна електродинаміка. — 2012. — № 5. — С. 17—27.
2. *Захарченко С. Н., Шидловская Н. А.* Моделирование сопротивления гранулированных токопроводящих сред параметрическими зависимостями // Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 5. — С. 91—101.
3. *Щерба А. А., Захарченко С. Н., Яцюк С. А. и др.* Развитие систем получения ультрадисперсных искроэрозионных порошков: влияние вибрации на параметры разрядных импульсов и характеристики продукции // Технічна електродинаміка. Тем. вип. «Проблеми сучасної електротехніки». — 2008. — Ч. 4. — С. 107—112.
4. Физические основы электротехники / Под. ред. Поливанова К. М. — М.-Л. : Гос. энергетическое изд-во, 1950. — 556 с.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М. : Наука, 1974. — 504 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. — М. : Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1953. — 628 с.

Поступила 13.08.12

ШИДЛОВСКАЯ Наталия Анатольевна, чл.-кор. НАН Украины, д-р техн. наук, гл. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1986 г. окончила Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — нелинейные и параметрические электрические цепи.

ЗАХАРЧЕНКО Сергей Николаевич, канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Ин-та электродинамики НАН Украины. В 1996 г. окончил Национальный технический университет Украины «КПИ». Область научных исследований — электротехнические комплексы искроэрозионной обработки гетерогенных токопроводящих сред.