



УДК 519.6.539.3:534.1.699.841

М. М. Мирсаидов*, д-р техн. наук, **Т. З. Султанов**** , канд. техн. наук,
Д. А. Ходжаев***, канд. физ.-мат. наук
Ташкентский ин-т ирригации и мелиорации
(Республика Узбекистан, 100000, Ташкент, ул. Кары Ниязова, 39,
тел. (99871) 2370981, e-mail: theormir@mail.ru*, z-tohir@mail.ru**,
(99871) 2371948, dhodjaev@mail.ru***)

Моделирование динамических процессов в неоднородных вязкоупругих системах

Приведены математическая модель, методы и алгоритмы решения задачи о нелинейных вынужденных колебаниях трехмерных неоднородных вязкоупругих систем. Рассматриваемая задача с использованием метода конечных элементов сведена к системе большого порядка нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, решаемой методом Ньюмарка. Рассмотрен пример расчета грунтовой плотины с учетом нелинейных, вязкоупругих свойств материала и конструктивных особенностей сооружения. Выявлен ряд новых механических эффектов.

Наведено математичну модель, методи та алгоритми розв'язування задачі про нелінійні вимушені коливання тривимірних неоднорідних в'язкопружних систем. Розглянуто задачу з використанням методу кінцевих елементів зведено до системи великого порядку нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь, яка розв'язується методом Ньюмарка. Розглянуто приклад розрахунку грунтової греблі з врахуванням нелінійних, в'язкопружних властивостей матеріалу та конструктивних особливостей споруди. Виявлено ряд нових механічних ефектів.

Ключевые слова: грунтовая плотина, неоднородная система, нелинейные колебания, напряженно-деформированное состояние, вязкоупругость.

В качестве неоднородной вязкоупругой системы будем рассматривать грунтовое сооружение, материал каждой отдельной части которого обладает линейными и нелинейными упругими или вязкоупругими свойствами. При оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) таких сооружений возникает ряд вопросов, связанных с учетом неоднородности конструкций и реальных свойств использованного материала, правильный учет которых способствует более точной оценке прочности сооружений при различных динамических воздействиях.

Увеличение диссипативных способностей как материала, так и конструкции приводит к уменьшению амплитуды колебаний. Например, конструкция грунтовой плотины, выполненная из ориентированных перпендикулярно

ее продольной оси вертикальных слоев (наподобие пирога) обладает наибольшей диссипативной способностью [1], так как каждый слой колеблется с различными частотами и амплитудами, препятствуя возникновению резонансного режима колебаний в целом [2]. Такое конструктивное решение позволяет изменить динамическую характеристику сооружения [3]. При этом математические и вычислительные проблемы еще более усложняются, так как сооружение превращается в неоднородную систему с различными упругими или вязкоупругими характеристиками составляющих ее частей.

Другой способ изменения динамической характеристики конструкции — подбор материалов, имеющих наибольшие диссипативные свойства. Исследование диссипативных свойств для сооружения в целом является достаточно трудной проблемой даже для простых механических систем, так как для полной оценки диссипативных свойств конструкции необходимо исследование собственных, установившихся и не установившихся, колебаний конструкции с учетом внутреннего трения в материале [2].

Трудность решения этой проблемы, во-первых, связана с отсутствием моделей, более или менее реально описывающих феномен внутреннего трения в материале; во-вторых, решение задачи на основе известных моделей приводит к ряду проблем, трудно реализуемых даже на современных ЭВМ вследствие отсутствия вычислительных методов и алгоритмов, отвечающих требованиям, предъявляемым к поставленным задачам. Поэтому почти все известные работы посвящены расчету колебаний грунтовых сооружений с использованием простых моделей, учитывающих диссипацию энергии, а поведение материала сооружений с использованием линейных или нелинейных вязкоупругих моделей в условиях динамических нагружений исследовано недостаточно [4].

Известно, что для грунтовых сооружений наиболее важен учет нелинейных вязкоупругих свойств материала. Многие материалы, к которым относятся грунты на территории Узбекистана, обладают реологическими свойствами, т.е. зависящей от времени связью между напряжениями и деформациями [4, 5]. Вязкоупругие свойства грунта (ползучесть и релаксация) в различной степени проявляются при динамических воздействиях. Представляет интерес учет вязкоупругих свойств грунта при оценке прочности грунтовых сооружений, в частности грунтовых плотин, находящихся в зоне повышенной сейсмичности, где сооружение подвергается интенсивным динамическим нагрузкам.

Результаты экспериментов [6, 7] подтверждают тот факт, что при закончившемся процессе консолидации деформируемость дисперсных грунтов достаточно точно описывается линейной теорией наследственной ползу-

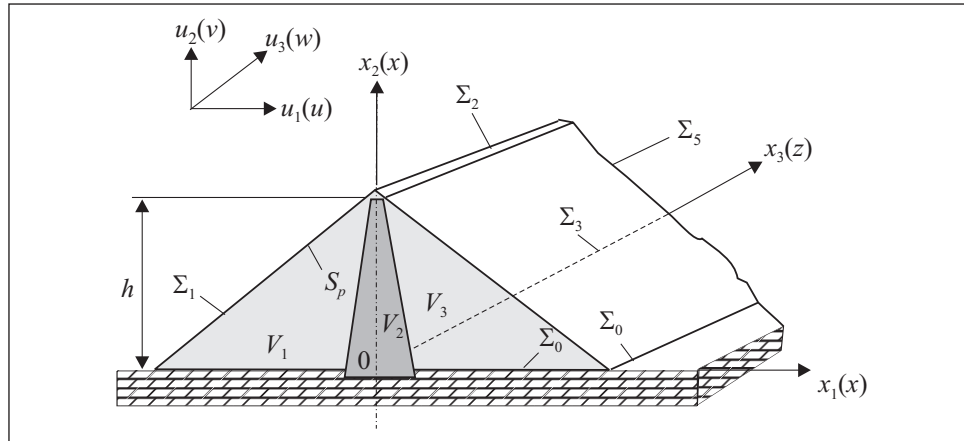


Рис. 1. Модель неоднородной трехмерной системы

части Больцмана—Вольтерры [8, 9]. Вследствие относительной сложности уравнений наследственной теории вязкоупругости некоторые исследователи избегают ее применения в механике грунтов. Однако современный уровень развития методов решения задач наследственной вязкоупругости [8—14] позволяет использовать их для описания динамических процессов в грунте.

В связи с этим целесообразна разработка адекватных математических моделей, методов и алгоритмов, учитывающих как конструктивные особенности, так и неоднородность сооружений, реальные свойства их материалов при динамических воздействиях, а также необходимо исследование динамического поведения конкретных сооружений с учетом указанных выше факторов.

Математическая постановка, методы и алгоритмы решения задачи. Для прогноза НДС и динамического поведения грунтовой плотины в трехмерной постановке рассмотрим пространственную модель сооружения, представленную в виде неоднородной системы (рис. 1). При этом основание системы Σ_0 подвергается произвольному кинематическому воздействию $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$. На поверхности S_p (верхового откоса Σ_1) приложено гидростатическое давление воды $\mathbf{p}_c(\mathbf{x})$. Система представляет собой массивное тело, поэтому при расчете учитывается вектор массовых сил \mathbf{f} . Поверхности основания Σ_0 и береговых склонов Σ_4, Σ_5 жестко зашпелены, поверхность гребня и низового откоса Σ_2, Σ_3 свободны от напряжения. Объем тела плотины V состоит из объема верхней V_1 и нижней V_3 упорных призм и объема ядра V_2 .

Материал различных частей системы (V_1, V_2, V_3) считается линейно- или нелинейно-упругим и вязкоупругим. На границах раздела областей

системы компоненты векторов перемещений и тензоров напряжений непрерывны.

Задача состоит в определении полей перемещений и напряжений в системе (см. рис. 1) с учетом массовых сил \mathbf{f} , давления воды $\mathbf{p}_c(\mathbf{x})$ и кинематического воздействия на основание $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$.

Для моделирования процесса деформирования и динамического поведения рассматриваемой системы в трехмерной постановке используем вариационное уравнение Лагранжа, основанное на принципе Даламбера для неоднородных деформируемых тел:

$$\begin{aligned}
 & -\int_{V_1} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_2} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_3} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_{V_1} \rho_1 \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV - \int_{V_2} \rho_2 \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV - \\
 & - \int_{V_3} \rho_3 \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{f} \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_p} \mathbf{p}_c \delta \mathbf{u} dS = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{u} , ε_{ij} и σ_{ij} — компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений; $\delta \mathbf{u}$ и $\delta \varepsilon_{ij}$ — изохронные вариации перемещений и деформаций; ρ_n — плотность материала элементов рассматриваемой системы ($n = 1, 2, 3$, что означает часть системы, к которой относится данная величина);

$$\mathbf{p}_c = \rho_0 g (h - x_2). \quad (2)$$

Связь между компонентами тензора деформаций и вектором перемещений описывается линейными соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Для описания связи между тензором напряжения и деформацией используется нелинейная кубическая теория вязкоупругости Илюшина—Огибалова [9] для трехмерного тела, согласно которой объемное деформирование происходит с учетом упругости, а сдвиговые составляющие определяются с учетом вязкоупругости:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} = & K_n \varepsilon_{ij}(t) \delta_{ij} + 2G_n \left\{ \left[e_{ij}(t) - \int_0^t \Gamma_1(t-\tau) e_{ij}(\tau) d\tau \right] + \right. \\
 & \left. + \lambda \left[e_{ij}(t) e(t) - \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) e_{ij}(\tau) e(\tau) d\tau \right] \right\}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Кинематические условия в основании имеют вид

$$\mathbf{x} \in \Sigma_0 : \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\Psi}_1(t), \quad (5)$$

а начальные условия при $t = 0$ —

$$\mathbf{x} \in V : \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\Psi}_2(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\Psi}_3(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Во всех рассматриваемых задачах вектор перемещений имеет три компоненты $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\} = \{u, v, w\}$ в пространственной системе координат $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$, где $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\theta\delta_{ij}$; $\theta = \varepsilon_{ii}$; $e = e_{kl}e_{lk}$; $i, j, k, l = 1, 2, 3$; $\boldsymbol{\Psi}_1$ — заданная функция времени; $\boldsymbol{\Psi}_2, \boldsymbol{\Psi}_3$ — заданные функции координат; K_n — объемный модуль упругости; G_n — мгновенный модуль сдвига; Γ_1, Γ_3 — ядра релаксации; δ_{ij} — символ Кронеккера; λ — коэффициент нелинейности; ρ_0 — плотность воды; $(h - x_2)$ — глубина точки на напорной грани плотины; h — высота заполнения водохранилища; t — время; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Общую вариационную задачу о вынужденных колебаниях неоднородных вязкоупругих систем можно сформулировать так: необходимо определить поля перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и напряжений $\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)$ данной системы, удовлетворяющие уравнениям (1), (3)—(4) с учетом массовых сил \mathbf{f} , гидростатического давления воды (2), кинематических и начальных условий (5) и (6) при любом возможном перемещении $\delta \mathbf{u}$.

Установившиеся вынужденные колебания линейных неоднородных вязкоупругих систем происходят при влиянии на систему внешних периодических воздействий. Поскольку результаты решения рассматриваемой задачи не зависят от начальных условий, их учитывать не будем и нижний предел интеграла в (4) примем равным $(-\infty)$.

Результаты исследований данного процесса позволяют прогнозировать изменение величины перемещений и напряжений в любых точках системы при различных частотах внешнего периодического воздействия, включая резонансные режимы колебаний. Построение амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) перемещений и напряжений для различных точек сооружения дает возможность оценить отклик на сигналы различной частоты. При этом решение вариационной задачи (1)—(5) об установившихся вынужденных колебаниях неоднородных вязкоупругих систем (при $\lambda = 0$) находим в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \exp(-i\Omega t), \quad (7)$$

где Ω — заданная частота внешних воздействий; $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ — векторы искомых амплитуд перемещений; $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — заданное кинематическое воздействие.

После подстановки выражения (7) в (1) полученное вариационное уравнение с использованием метода конечных элементов (МКЭ) [4, 15]

сводится к решению комплексной системы неоднородных алгебраических уравнений

$$([\bar{K}] - \Omega^2 [M]) \{ \mathbf{u} \} = \{ \mathbf{F} \} + \Omega^2 \{ \mathbf{f} \}, \quad (8)$$

где $[\bar{K}]$ — переменная комплексная матрица жесткости; $[M]$ — матрица масс системы (см. рис.1); $\{ \mathbf{u} \}$ — вектор искомых комплексных амплитуд перемещений; $\{ \mathbf{f} \}$ — вектор внешней нагрузки от кинематического воздействия; $\{ \mathbf{F} \}$ — суммарный вектор внешних нагрузок (массовых сил, гидростатического давления воды и др.).

Элементы матрицы $[\bar{K}]$, т.е. $\bar{k}_{ij}(\Omega)$, зависят от частоты внешнего воздействия Ω . Интегральный оператор Вольтерры

$$\tilde{G}_n \varphi = G_n \left[\varphi(t) - \int_{-\infty}^t \Gamma_{G_n}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right], \quad (9)$$

заменяем следующим комплексным соотношением:

$$\tilde{G}_n \varphi = G_n \left[1 - \Gamma_{G_n}^{\cos}(\Omega) - i \Gamma_{G_n}^{\sin}(\Omega) \right] \varphi. \quad (10)$$

Здесь $\Gamma_{G_n}^{\sin}, \Gamma_{G_n}^{\cos}$ — синусы и косинусы вида Фурье ядра релаксации Γ_{G_n} ,

$$\Gamma_{G_n}^{\cos}(\Omega) = \int_0^{\infty} \Gamma_{G_n}(\tau) \cos \Omega \tau d\tau, \quad \Gamma_{G_n}^{\sin}(\Omega) = \int_0^{\infty} \Gamma_{G_n}(\tau) \sin \Omega \tau d\tau, \quad (11)$$

где φ — произвольная функция времени.

В линейной системе алгебраических уравнений (8) с комплексными коэффициентами порядок уравнений достигает нескольких тысяч и они решаются методом квадратного корня с использованием комплексной арифметики [16]. Поэтому при исследовании установившихся вынужденных колебаний неоднородных вязкоупругих систем необходимо выполнить следующие операции:

1. При фиксированных значениях Ω вычислить комплексные величины (10), (11).
2. С помощью разработанного алгоритма [4], основанного на МКЭ [16], составить уравнение (8) с учетом комплексных величин (10), (11).
3. Полученную при данном значении Ω комплексную алгебраическую систему уравнений типа (8) решить методом квадратного корня с использованием комплексной арифметики.
4. Полученное решение уравнения (8) представляет собой компоненты перемещения (u_1, u_2, u_3) и тензора напряжений (σ_{ij}) в каждой дискретной точке сооружения при данном значении Ω .

5. Все указанные операции повторить для других значений Ω , по полученным результатам построить АЧХ для компонентов перемещения (u_1, u_2, u_3) и тензора напряжений (σ_{ij}) в различных точках сооружения. Это позволяет прогнозировать состояние каждой точки сооружения при различных частотах внешнего воздействия.

Неустановившиеся вынужденные колебания нелинейных неоднородных вязкоупругих систем. При исследовании нелинейных неустановившихся вынужденных колебаний неоднородных систем, возникающих при кратковременном импульсе, синтезированная или реальная запись акселерограммы землетрясения позволяет прогнозировать максимальные значения перемещений, деформаций и напряжений в любых точках сооружения и выявлять опасные (наиболее напряженные) участки с учетом конструктивной особенности сооружения и параметров материала при динамических воздействиях.

Решение вариационной задачи (1)—(4) с учетом граничных (5) и начальных (6) условий находим в виде [2, 4]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t). \quad (12)$$

После подстановки выражения (12) в (1)—(5) и в результате конечно-элементной дискретизации рассматриваемая вариационная задача сводится к решению системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений N -го порядка

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{F\} + \{f(t)\} + \int_0^t \Gamma_1(t-\tau)[K]\{u(\tau)\} d\tau + \lambda \left(\{V(t)\} - \int_0^t \Gamma_3(t-\tau)\{V(\tau)\} d\tau \right) \quad (13)$$

с начальными условиями

$$\{u(0)\} = \{u_0\}, \{\dot{u}(0)\} = \{v_0\}, \quad (14)$$

где $[M]$, $[K]$ — матрицы массы и жесткости системы; $[C]$ — матрица диссипативных сил при дополнительном учете других видов диссипации; $\{f(t)\}$ — вектор внешней нагрузки от кинематического воздействия; $\lambda = \text{const}$ — коэффициент нелинейности, зависящий от свойства материала сооружения; $\{u(t)\}$ — вектор искомых узловых перемещений; $\{V(t)\}$ — вектор, включающий нелинейные физико-механические параметры материала и нелинейные узловые перемещения сооружений.

Используя процедуру метода Ньюмарка [16], систему (13) с начальными условиями (14) на каждом шаге по времени Δt сводим к решению алгебраической системы

$$[A]\{u_{i+1}\} = \{R_{i+1}\}, \quad (15)$$

$$[A]=[K]+\frac{1}{\alpha t^2}[M]+\frac{\beta}{\alpha t}[C]. \quad (16)$$

При этом правая часть (15) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \{R_{i+1}\} = \{F\} + \{f_{i+1}\} + [M] \left\{ \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \{u_i\} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \{\dot{u}_i\} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right) \{\ddot{u}_i\} \right\} + \\ + [C] \left\{ \frac{\beta}{\alpha \Delta t} \{u_i\} + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) \{\dot{u}_i\} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha} - 2\right) \{\ddot{u}_i\} \right\} + \lambda \{V_{i+1}\} + \{W_{i+1}\}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\{W_{i+1}\} = \int_0^{t_{i+1}} \Gamma_1(t-\tau) [K(u_i)] \{u_i\} d\tau - \lambda \int_0^{t_{i+1}} \Gamma_3(t-\tau) \{V_i\} d\tau. \quad (18)$$

Таким образом, решение нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений (13) с начальными условиями (14) состоит из двух этапов.

1. Задаем начальные значения: $\{u_0\}, \{\dot{u}_0\}, \{\ddot{u}_0\} = 0$.

2. Формируем систему алгебраических уравнений (15) и (16). Правые части (17) и (18) содержат нелинейные слагаемые, которые описывают нелинейные упругие и вязкие свойства материала, зависящие от достигнутого деформированного состояния системы. В зависимости от учета или не учета тех или иных свойств материала в правую часть (17), (18) включаются соответствующие слагаемые.

Особенностью алгоритма решения задачи о нелинейных неустановившихся вынужденных колебаниях неоднородных вязкоупругих систем [4] является тот факт, что интегралы, входящие в (18), вычисляются от начала процесса, т.е. от $t=0$ до $t=t_{i+1}$. При этом полное значение $\{w_{i+1}\}$ в момент времени t_{i+1} получается в результате суммирования сохраненного на предыдущем шаге значения $\{w_i\}$ с интегралом, полученным на последнем этапе с пределами интегрирования от нуля до t_i .

Результатом решения уравнений (13) при начальных условиях (14) являются компоненты вектора перемещений (u_1, u_2, u_3) и тензора напряжений (σ_{ij}) в каждой точке дискретной модели сооружения в фиксированный момент времени t .

Результаты исследований. Были исследованы установившиеся и неустановившиеся вынужденные колебания модели высокой Нурекской грунтовой плотины, находящейся в условиях плоской деформации, совершающей колебания под влиянием кинематического воздействия $u_0(t)$ в основании сооружения.

Нурекская плотина — самая высокая из грунтовых сооружений, строящихся в районах с сейсмичностью 9 баллов. Плотина имеет почти сим-

метричный профиль и очень крутые откосы. Коэффициенты заложения откосов: верховой — $m_1 = 2,25$ и низовой — $m_2 = 2,2$; высота плотины $H = 296$ м. Механические характеристики материала: для упорных призм — $E = 3060$ МПа, $\mu = 0,3$, $\gamma = 2200$ кгс/м³; для ядра — $E = 2400$ МПа, $\mu = 0,25$, $\gamma = 2330$ кгс/м³.

Собственные частоты этой плотины, полученные с учетом неоднородных упругих свойств сооружения, имеют следующие значения: $\omega_1 = 4,90$ рад/с; $\omega_2 = 7,39$ рад/с; $\omega_3 = 8,91$ рад/с; $\omega_4 = 9,93$ рад/с; $\omega_5 = 10,97$ рад/с; $\omega_6 = 11,67$ рад/с; $\omega_7 = 13,07$ рад/с; $\omega_8 = 13,94$ рад/с; $\omega_9 = 15,48$ рад/с; $\omega_{10} = 15,74$ рад/с.

Для описания вязкоупругих свойств грунта плотины использовано трехпараметрическое ядро [17] $R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}$, параметры ($A = 0,0674$, $\alpha = 0,25$, $\beta = 0,00243$) которого определены на основании кривых ползучести [6, 7] по методике, описанной в работе [8].

Установившиеся колебания. При периодических воздействиях материал плотины будем считать линейно-вязкоупругим и предположим, что к основанию сооружения приложено кинематическое воздействие

$$x \in \Sigma_0: \begin{cases} u_0(t) = B \exp(-i\Omega t), \\ v_0(t) = C \exp(-i\Omega t), \end{cases} \quad (19)$$

где B и C — амплитуды; Ω — частота кинематического воздействия.

Для ряда точек плотины построены АЧХ перемещений u_1, u_2 и компонентов напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$, главных напряжений σ_1, σ_2 и интенсивности напряжений σ_i при различных значениях $\Omega = 2,0 \div 20,0$ рад/с при $B/C = 2,0$ ($B = 0,01$ м). При этом в окрестности предполагаемого вязкоупругого резонанса шаг для Ω уменьшался в 2—3 раза.

На рис. 2, а, приведены АЧХ горизонтальных u_1 и вертикальных u_2 перемещений для точки плотины ($x_1 = -10,0$ м, $x_2 = 296,0$ м), а на рис. 2, б, — АЧХ максимального касательного напряжения τ_{\max} для точки плотины ($x_1 = -23,9$ м, $x_2 = 246,7$ м),

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}.$$

На рис. 3 представлены изолинии распределения максимального напряжения

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

в сечении плотины при фиксированных значениях $\Omega = 4,7$ рад/с.

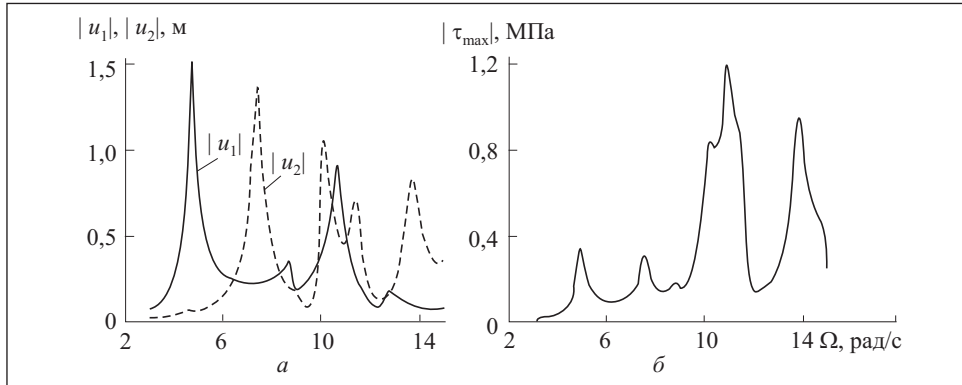


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики горизонтальных $|u_1|$ и вертикальных $|u_2|$ перемещений (а) и максимального касательного напряжения $|\tau_{\max}|$ (б) для некоторых точек плотины

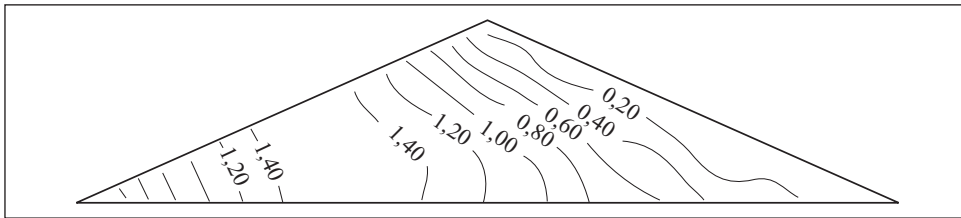


Рис. 3. Изолинии распределения главных напряжений $|\sigma_1|$, МПа, в сечении плотины при первом резонансе ($\Omega \approx \omega_1$)

Полученные результаты позволили установить, что амплитуды горизонтальных перемещений при первой резонансной частоте значительно больше вертикальных, а на второй резонансной частоте — наоборот. Это объясняется тем, что первая собственная форма колебаний является изгибным колебанием, вторая — вертикальным, а другие формы колебаний характеризуют сложные движения сооружения. При этом на других резонансных частотах амплитуда горизонтальных перемещений убывает по величине, за исключением резонанса, соответствующего плотным спектрам собственных частот, так как несколько собственных форм колебаний с близкими частотами ($\omega_4, \omega_5, \omega_6$ или ω_9, ω_{10}) создают единый пик с достаточно большой амплитудой.

Как видно из рис. 2, б, наибольшие амплитуды напряжений на многих участках плотины возникают именно при совпадении частоты кинематического воздействия с собственными частотами плотного спектра в диапазоне от ω_4 до ω_6 или ω_9, ω_{10} . Этим подтверждается тот факт, что собственные формы колебаний сооружения с близкими частотами, взаимо-

действуя между собой, создают единый пик с наибольшими амплитудами. Поэтому для такой плотины опасным является значение, находящееся между ω_4 и ω_6 .

Из рис. 3 видно, что при первом резонансе наиболее напряженные участки возникают в середине верхового откоса, распространяются в глубину, в середину верховой упорной призмы, и заканчиваются в основании плотины.

Неустановившиеся колебания. Рассмотрим нелинейные неустановившиеся вынужденные колебания сооружения под влиянием кинематического воздействия

$$\mathbf{x} \in \Sigma_0: \begin{cases} \ddot{i}_0(t) = B \sin \Omega t, \\ \ddot{o}_0(t) = C \sin \Omega t, \end{cases} \quad 0 < t \leq t^* . \quad (20)$$

Здесь B, C — амплитуды ускорения; t^* — продолжительность кинематического воздействия. Материал плотины обладает линейными, нелинейно-упругими и вязкоупругими свойствами.

Начальные условия задачи приняты однородными, коэффициент нелинейности $\lambda = \pm 50000$. При положительном значении λ диаграмма деформирования $\sigma \sim \varepsilon$ для грунта является жесткой, а при отрицательном — мягкой.

Полученные результаты (при $B = C = 0,25 \text{ м/с}^2$, $\Omega = 4 \text{ рад/с}$, $t^* = 4 \text{ с}$) свидетельствуют о том, что при учете нелинейно-упругих и вязкоупругих свойств материала амплитуда перемещений точек плотины значительно меньше, чем при учете линейных свойств. При этом влияние вязкости материала в начальный момент приводит к незначительному затуханию колебаний по времени. После снятия действия нагрузки колебания для линейно- и нелинейно-упругих материалов принимают почти гармонический характер, а нелинейные колебания происходят с меньшей амплитудой. Для нелинейно-вязкоупругих материалов характерно постепенное затухание колебаний во времени, т.е. влияние вязкости, со временем усиливается.

В случае линейно-упругого материала сооружения напряжения σ_{12} , возникающие в отдельных точках сооружения по амплитуде, несколько превышают напряжения в случае нелинейно-упругого материала. Вязкость, как и в предыдущих случаях, проявляется через определенный промежуток времени. В момент времени, достаточно отдаленный от начала воздействия, нелинейная вязкость несколько снижает напряжение в определенных точках плотины в отличие от случая, когда материал линейно- и нелинейно-упругий.

В случае ($B = C = 0,2 \text{ м/с}^2$, $\Omega = 7,3 \text{ рад/с}$, $t^* = 4 \text{ с}$), когда частота кинематического воздействия Ω близка к частоте собственных колебаний сооружения (ω_2), установлено, что амплитуда вынужденных колебаний со-

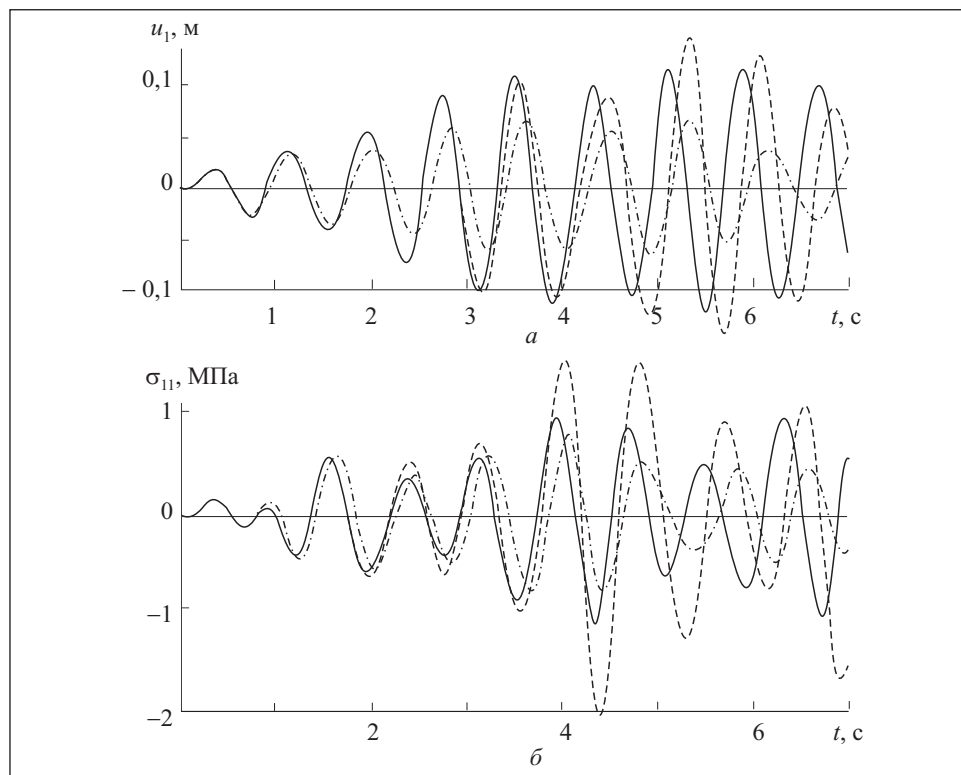


Рис. 4. Графики перемещений u_1 (а) и напряжений σ_{11} (б) в отдельных точках грунтовой плотины при нелинейных неустановившихся вынужденных колебаниях в резонансном режиме ($\Omega \approx \omega_2$): — — линейно-упругое решение; - - - — нелинейно-упругое решение; - · - · - — нелинейно-вязкоупругое решение

оружения существенно возрастает. После снятия нагрузки ($t = 4$ с), система совершает свободные колебания, которые в случае линейных материалов имеют почти гармонический характер. Для нелинейно-упругого материала амплитуда возрастает до определенного значения. Это объясняется нелинейной зависимостью между напряжением и деформацией, в данном случае жесткой диаграммой $\sigma \sim \varepsilon$ для грунта. Для вязкоупругого материала характерно затухание колебаний по времени.

На рис. 4, а, представлены кривые изменения горизонтального перемещения u_1 (для точки плотины $x_1 = 140,2$ м; $x_2 = 29,6$ м), а на рис. 4, б, — кривые изменения горизонтальных напряжений σ_{11} (для точки плотины $x_1 = -476,2$ м, $x_2 = 59,2$ м) при кинематическом воздействии (20), полученные при $B = C = 0,2$ м/с², $\Omega \approx \omega_2 = 7,3$ рад/с, $t^* = 4$ с (резонансный режим). Установлено, что максимальные величины напряжений в данной

точке плотины возникают через некоторый промежуток времени после прекращения воздействия. Напряжения для линейно- и нелинейно-упругого случаев носят гармонический характер, а для нелинейно-вязкоупругого случая напряжения постепенно убывают, что объясняется влиянием вязкости.

Выводы

Анализ проведенных исследований НДС плотины позволяет сделать следующие выводы:

максимальные амплитуды напряжений σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} при действии кратковременного импульса достигаются в различных точках плотины в разные моменты времени;

наибольшие величины касательных напряжений σ_{12} выявлены в центральной части плотины, на верхней части ядра, что нежелательно для грунтовых плотин;

при влиянии продолжительного кинематического воздействия большинство зон плотины испытывает растягивающие динамические напряжения, нежелательные для грунтовых сооружений;

учет нелинейно-упругих свойств материала приводит к уменьшению периода колебаний плотины, а также к существенному изменению значений напряжений в зависимости от величины ускорения;

учет вязкости приводит к увеличению периода колебаний, к уменьшению перемещений и постепенному затуханию колебаний во времени.

Mathematical model, methods and algorithms for the decision of a problem on nonlinear forced vibrations of three-dimensional heterogeneous viscoelastic systems are presented. The considered problem with use of the method of finite elements is reduced to the high order system of nonlinear integro-differential equations which is solved by Newmark's method. The example of calculation of soil dam taking into account nonlinear, viscoelastic properties of the material and design features of the structure is considered. A number of new mechanical effects have been revealed.

1. Натариус Я. И. Повышение сейсмостойкости плотин из грунтовых материалов. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 88 с.
2. Мирсаидов М. М., Трояновский Е. И. Динамика неоднородных систем с учетом внутренней диссипации и волнового уноса энергии. — Ташкент : Фан, 1990. — 108 с.
3. Мирсаидов М., Годованников А. М. Сейсмостойкость сооружений. — Ташкент : Узбекистан, 2008. — 220 с.
4. Мирсаидов М. М. Теория и методы расчета грунтовых сооружений на прочность и сейсмостойкость. — Ташкент : Фан, 2010. — 312 с.
5. Ширинкулов Т. Ш., Зарецкий Ю. К. Ползучесть и консолидация грунтов. — Ташкент : Фан, 1986. — 302 с.
6. Месчан С. Р. Механические свойства грунтов и лабораторные методы их определения. — М. : Недра, 1974. — 192 с.

7. Вялов С. С. Реологические основы механики грунтов. — М. : Высшая школа, 1978. — 447 с.
8. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. — М. : Высшая школа, 1976. — 277 с.
9. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термо-вязкоупругости. — М. : Наука, 1970. — 280 с.
10. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. — К. : Наук. думка, 1986. — 542 с.
11. Филатов А. Н. Асимптотические методы и теория дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. — Ташкент: Фан, 1974. — 216 с.
12. Мирсаидов М., Трояновский И. Е., Балакиров А. Об одном способе решения задачи Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений // Изв. АН РУз. Сер. техн. наук. — 1985. — № 6. — С. 32—36.
13. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. — Ташкент : Мехнат, 1987. — 269 с.
14. Бадалов Ф. Б., Эиматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. — 1987. — 51, № 5. — С. 867—871.
15. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и МКЭ. — М. : Стройиздат, 1982. — 448 с.
16. Фадеев Д. К., Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М. : Физматгиз, 1960. — 655 с.
17. Рэжаницын А. Р. Теория ползучести. — М. : Стройиздат, 1968. — 416 с.

Поступила 12.06.12

МИРСАИДОВ Мирзиёд Мирсаидович, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой теоретической и строительной механики Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1971 окончил Ташкентский политехнический ин-т, а в 1986 г. — Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — разработка математических моделей, методов и алгоритмов для решения задач динамики и сейсмостойкости сооружений; методы решения статических и динамических задач механики деформируемого твердого тела с учетом нелинейных и вязкоупругих свойств материалов.

СУЛТАНОВ Тахиржон Зокирович, канд. техн. наук, доцент, проректор по науке Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1996 г. окончил Наманганский индустриально-технологический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела; разработка методов и алгоритмов для оценки прочности гидротехнических сооружений.

ХОДЖАЕВ Дадахан Акмарханович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Ташкентского ин-та ирригации и мелиорации. В 1996 г. окончил Ташкентский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование задач механики деформируемого твердого тела; разработка методов и алгоритмов для оценки напряженно-деформированного состояния и динамического поведения гидротехнических сооружений.