УДК 519.711.3:631.382.2:669.174

В. Ф. Евдокимов, чл.-кор. НАН Украины,
Е. И. Петрушенко, канд. техн. наук, **В. А. Кучаев**, аспирант
Ин-т проблем моделирования в энергетике
им. Г. Е. Пухова НАН Украины
(Украина, 03164, Киев, ул. Генерала Наумова, 15,
тел. (044) 4249160, e-mail: dep_7@ voliacable.com, vitalku07@yandex.ru)

Интегральная модель трехмерного вращающегося магнитного поля статора цилиндрического ЭМП на основе симметричных составляющих. I

Скалярная система интегральных уравнений (СкСИУ) [1, 2] преобразована с учетом симметрии по координате Z в проекциях плотностей источников k-й симметричной составляющей магнитного поля статора. Областью определения СкСИУ, полученной после указанных преобразований, является часть поверхности магнитопровода статора, лежащая выше плоскости симметрии, т.е. координатной плоскости XOY. Это обстоятельство существенно сокращает объем вычислений, связанный с составлением матрицы аппроксимирующей алгебраической системы и ее решением.

Скалярну систему інтегральних рівнянь (СкСІР) [1, 2] перетворено з урахуванням симетрії по координаті Z в проекціях щільності джерел k-ї симетричної складової магнітного поля статора. Областю визначення СкСІР, отриманою після вказаних перетворень, є частина поверхні магнітопроводу статора, що лежить вище площини симетрії, тобто координатної площини XOY. Ця обставина істотно скорочує об’єм обчислень, пов’язаний із складанням матриці апроксимуючої алгебраїчної системи та її рішенням.

Ключевые слова: интегральная модель, трехмерное вращающееся магнитное поле, симметричные составляющие, соотношения симметрии, электромагнитный перемешиватель, магнитопровод, скалярная система интегральных уравнений.

Разработка интегральной модели трехмерного вращающегося магнитного поля (ВМП) трехфазного цилиндрического электромагнитного перемешивателя (ЭМП) на основе симметричных составляющих (СС) состоит из трех этапов:

1) разложение несимметричного результирующего ВМП на СС;

2) преобразование векторного интегрального уравнения (ВИУ) для плотности источников одной из СС магнитного поля (будем считать ее k-й СС) к скалярной системе интегральных уравнений (СкСИУ) относительно проекций на оси цилиндрической системы координат векторов плотности источников k-й СС магнитного поля;

3) преобразование полученной СкСИУ с учетом соотношений симметрии в проекциях на оси цилиндрической системы координат векторов плотности источников k-й СС магнитного поля по координатам ρ, φ, Z.

Первые два этапа подробно описаны в работах [1, 2], где в частности ВМП ЭМП разложено на три СС, из которых k-я СС создается током в обмотке k-й фазы при нулевых токах в обмотках $k+1$ и $k-1$ фаз. Для нахождения ВМП в пространстве в данный момент времени моделируется k-я СС. Поле $k+1$ СС получается поворотом k-й СС вокруг оси системы на 120 град по часовой стрелке, а поле $k-1$ СС — поворотом поля k-й СС вокруг оси системы на 120 град против часовой стрелки.

При моделировании k-й СС использована концепция связанных токов намагниченности, позволяющая выполнять моделирование при любой конфигурации магнитопровода и обмоток с током и любом их взаимном расположении. Векторное интегральное уравнение для плотности токов намагниченности на поверхности цилиндрического магнитопровода преобразовано к системе четырех ВИУ, которые, в свою очередь, преобразованы к СкСИУ относительно проекций на оси цилиндрической системы координат векторов плотности источников k-й СС магнитного поля.

Преобразуем указанную СкСИУ с учетом симметрии в проекциях на оси цилиндрической системы координат векторов плотности источников k-й СС магнитного поля по координате Z. Областью определения новой СкСИУ, полученной после преобразований, является часть поверхности магнитопровода статора, лежащая выше плоскости симметрии XOY.

В [1] получена векторная СИУ (ВСИУ) для векторов плотности источников k-й СС магнитного поля статора ЭМП на канонических участках поверхности магнитопровода. На рис. 1 представлена схема магнитопровода ЭМП в декартовой XYZ и цилиндрической $\rho\varphi Z$ системах координат, а на рис. 2 — схема обмотки k-й фазы.

Запишем ВСИУ в виде

$$\frac{2\pi}{\chi}\bar{\sigma}(Q_i)+\sum_{j=1}^{4}\int_{S_j}\frac{[\bar{n}_{Q_i}\overline{G}(Q_i, M_j)]}{r^3_{Q_i M_j}}ds_{M_j}=-D_{s0k}\bar{\delta}_{0k}, \quad Q_i\in S_i,$$

$$i=1, \ldots, 4; \quad k=1, \ldots, 3. \tag{1}$$

Полагая в (1) $i=1$, получаем первое ВИУ системы:

$$\frac{2\pi}{\chi}\bar{\sigma}_1(Q_1)+\sum_{j=1}^{4}\int_{S_j}\frac{[\bar{n}_{Q_1}\overline{G}(Q_1, M_j)]}{r^3_{Q_1 M_j}}ds_{M_j}=-D_{S_i 0k}\bar{\delta}_{0k}, \quad Q_1\in S_1. \tag{2}$$

Последовательно полагая в (1) $Q_2\in S_2, Q_3\in S_3, Q_4\in S_4$, получаем второе, третье и четвертое ВИУ системы (1).

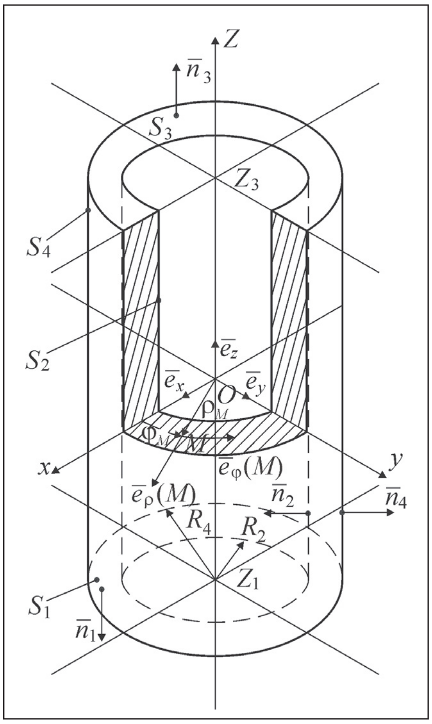

Рис. 1

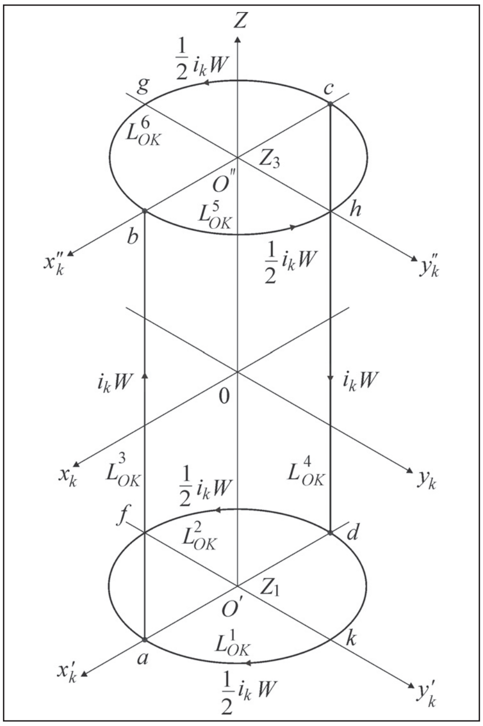

Рис. 2

В работе [2] ВСИУ (1) преобразована к СкСИУ относительно проекции на оси цилиндрической системы координат векторов плотности источников k-й СС магнитного поля статора. При этом первому уравнению ВСИУ (1) соответствуют первое и второе уравнения СкСИУ, второму уравнению ВСИУ (1) — третье и четвертое уравнения СкСИУ, третьему уравнению ВСИУ (1) — пятое и шестое уравнения СкСИУ, четвертому уравнению ВСИУ (1) — седьмое и восьмое уравнения СкСИУ. В данном случае указанная СкСИУ преобразуется с учетом симметрий по координате Z в плотностях источников k-й СС магнитного поля статора.

Введем обозначения, которые используем при преобразовании интегральных уравнений (ИУ) для СС магнитного поля. Пусть точка $M\,(X_M, Y_M, Z_M)$ лежит над координатной плоскостью XOY декартовой системы координат XYZ. При этом $Z_M \geq 0$. Точка $M_Z(X_M, Y_M, -Z_M)$ симметрична точке M относительно координатной плоскости XOY. Пусть также S_2 — внутренняя боковая поверхность магнитопровода; S_{21} — часть поверхности S_2, которой принадлежат точки M_Z, лежащая под плоскостью XOY; S_{22} — часть поверхности S_2, которой принадлежат точки M, лежащая над плоскостью XOY; S_3 или S_{32} — верхнее основание поверхности магнитопровода, которому принадлежат точки M; S_4 — внешняя боковая поверхность магнитопровода; S_{41} — часть поверхности S_4, которой принадлежат точки M_Z, лежащая под плоскостью XOY; S_{42} — часть поверхности S_4, которой принадлежат точки M, лежащая над плоскостью XOY.

В работе [2] второе ВИУ ВСИУ (1) преобразовано к третьему и четвертому ИУ СкСИУ. В операторной форме эти уравнения имеют вид

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2) - RS_{21}\sigma_{\rho M_1} - RC_{21}\sigma_{\varphi M_1} - RC_{22}\sigma_{\varphi M_2} - RS_{23}\sigma_{\rho M_3} - RC_{23}\sigma_{\varphi M_3} -$$

$$- RC_{24}\sigma_{\varphi M_4} = -F_{2\varphi}(Q_2), \quad Q_2 \in S_2, \tag{3}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2) - ZC_{21}\sigma_{\rho M} + ZS_{21}\sigma_{\varphi M} + ZS_{22}\sigma_{\varphi M} + CR_{22}\sigma_z - ZC_{23}\sigma_{\rho M} +$$

$$+ ZS_{23}\sigma_{\varphi M} + ZS_{24}\sigma_{\varphi M} + CR_{24}\sigma_z = -F_{2Z}(Q_2), \quad Q_2 \in S_2. \tag{4}$$

Используя введенные в [1,2] обозначения операторов, запишем интегральные уравнения (3) и (4) в развернутом виде:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_2) - \int_{S_1} RS\,(Q_2, M_1)\,\sigma_{\rho M_1}(M_1)\,ds_{M_1} -$$

$$- \int_{S_1} RS\,(Q_2, M_1)\,\sigma_{\varphi M_1}(M_1)\,ds_{M_1} - \int_{S_2} RC\,(Q_2, M_2)\,\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2} -$$

$$- \int_{S_3} RS\,(Q_2, M_3)\,\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3} - \int_{S_3} RC\,(Q_2, M_3)\,\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3} -$$

$$- \int_{S_4} RC\,(Q_2, M_4)\,\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,ds_{M_4} = -F_{2\varphi}(Q_2), \quad Q_2 \in S_2; \tag{5}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_2) - \int_{S_1} ZC\,(Q_2, M_1)\,\sigma_{\rho M}(M_1)\,ds_M + \int_{S_1} ZS\,(Q_2, M_1)\,\sigma_{\varphi M}(M_1)\,ds_M +$$

$$+ \int_{S_2} ZS\,(Q_2, M_2)\,\sigma_{\varphi M}(M_2)\,ds_M + \int_{S_2} CR\,(Q_2, M_2)\,\sigma_z(M_2)\,ds_M -$$

$$- \int_{S_3} ZC\,(Q_2, M_3)\,\sigma_{\rho M}(M_3)\,ds_M + \int_{S_3} ZS\,(Q_2, M_3)\,\sigma_{\varphi M}(M_3)\,ds_M +$$

$$+ \int_{S_4} ZS\,(Q_2, M_4)\,\sigma_{\varphi M}(M_4)\,ds_M + \int_{S_4} CR\,(Q_2, M_4)\,\sigma_z(M_4)\,ds_M =$$

$$= -F_{2Z}(Q_2), \quad Q_2 \in S_2. \tag{6}$$

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2012. V. 34. № 6

Используя соотношения симметрии

$$
\begin{gathered}
M_1 = M_{3Z},\ \sigma_{\rho M_1}(M_1) = -\sigma_{\rho M_3}(M_3),\\
M_1 = M_{3Z},\ \sigma_{\varphi M_1}(M_1) = -\sigma_{\varphi M_3}(M_3),\\
M_{21} = M_{22Z},\ \sigma_{\varphi M_{21}}(M_{21}) = -\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22}),\\
M_{41} = M_{42Z},\ \sigma_{\varphi M_{41}}(M_{41}) = -\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42}),\\
M_{21} = M_{22Z},\ \sigma_{ZM_{21}}(M_{21}) = \sigma_{ZM_{22}}(M_{22}),\\
M_{41} = M_{42Z},\ \sigma_{ZM_{41}}(M_{41}) = \sigma_{ZM_{42}}(M_{42}),
\end{gathered}
\tag{7}
$$

запишем уравнения (5) и (6) с учетом симметрии по координате Z в плотностях источников СС магнитного поля:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_2}(Q_{22}) + \int_{S_{22}}[-RC(Q_{22}, M_{22}) + RC(Q_{22}, M_{22Z})]\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,ds_{M_{22}} + \\
&\quad + \int_{S_3}[-RS(Q_{22}, M_3) + RS(Q_{22}, M_{3Z})]\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3} + \\
&\quad + \int_{S_3}[-RC(Q_{22}, M_3) + RC(Q_{22}, M_{3Z})]\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3} + \\
&+ \int_{S_{42}}[-RC(Q_{22}, M_{42}) + RC(Q_{22}, M_{42Z})]\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})\,ds_{M_{42}} = -F^Z_{2\varphi}(Q_{22}),\\
&\qquad Q_{22} \in S_{22};
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_{22}) + \int_{S_{22}}[ZS(Q_{22}, M_{22}) - ZS(Q_{22}, M_{22Z})]\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,ds_{M_{22}} + \\
&\quad + \int_{S_{22}}[CR(Q_{22}, M_{22}) + CR(Q_{22}, M_{22Z})]\sigma_z(M_{22})ds_{M_{22}} + \\
&\quad + \int_{S_3}[-ZC(Q_{22}, M_3) + ZC(Q_{22}, M_{3Z})]\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3} + \\
&\quad + \int_{S_3}[ZS(Q_{22}, M_3) - ZS(Q_{22}, M_{3Z})]\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3} + \\
&\quad + \int_{S_{42}}[ZS(Q_{22}, M_{42}) - ZS(Q_{22}, M_{42Z})]\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})\,ds_{M_{42}} + \\
&+ \int_{S_{42}}[CR(Q_{22}, M_{42}) + CR(Q_{22}, M_{42Z})]\sigma_z(M_{42})\,ds_{M_{42}} = -F^Z_{2Z}(Q_{22}),\\
&\qquad Q_{22} \in S_{22}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь $F^{Z}_{2\varphi}(Q_{22})$ и $F^{Z}_{2Z}(Q_{22})$ преобразованы с учетом симметрии по координате Z в плотностях источников СС магнитного поля $F_{2\varphi}(Q_2)$ и $F_{2Z}(Q_2)$.

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}[RC(Q_{22},M_{22})-RC(Q_{22},M_{22Z})]=\Delta_Z RC(Q_{22},M_{22}),\\ [RC(Q_{22},M_{3})-RC(Q_{22},M_{3Z})]=\Delta_Z RC(Q_{22},M_{3}),\\ [RC(Q_{22},M_{42})-RC(Q_{22},M_{42Z})]=\Delta_Z RC(Q_{22},M_{42}),\\ [RS(Q_{22},M_{3})-RS(Q_{22},M_{3Z})]=\Delta_Z RS(Q_{22},M_{3}).\end{gathered} \tag{10}$$

Теперь запишем уравнения (8),используя введенные обозначения (10):

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_{22}}(Q_{22})-\int_{S_{22}}\Delta_Z RC(Q_{22},M_{22})\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,ds_{M_{22}}-$$
$$-\int_{S_3}\Delta_Z RS(Q_{22},M_3)\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3}-\int_{S_3}\Delta_Z RC(Q_{22},M_3)\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,ds_{M_3}-$$
$$-\int_{S_{42}}\Delta_Z RC(Q_{22},M_{42})\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})\,ds_{M_{42}}=-F^{Z}_{2\varphi}(Q_{22}),\;\; Q_{22}\in S_{22}. \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}[ZS(Q_{22},M_{22})-ZS(Q_{22},M_{22Z})]=\Delta_Z ZS(Q_{22},M_{22}),\\ CR(Q_{22},M_{22})+CR(Q_{22},M_{22Z})=\sum_Z CR(Q_{22},M_{22}),\\ ZC(Q_{22},M_{3})-ZC(Q_{22},M_{3Z})=\Delta_Z ZC(Q_{22},M_{3}),\\ ZS(Q_{22},M_{3})-ZS(Q_{22},M_{3Z})=\Delta_Z ZS(Q_{22},M_{3}),\\ ZS(Q_{22},M_{42})-ZS(Q_{22},M_{42Z})=\Delta_Z ZS(Q_{22},M_{42}),\\ CR(Q_{22},M_{42})+CR(Q_{22},M_{42Z})=\sum_Z CR(Q_{22},M_{42}).\end{gathered} \tag{12}$$

Запишем уравнения (9), используя введенные обозначения (12):

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_{22})+\int_{S_{22}}\Delta_Z ZS(Q_{22},M_{22})\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,ds_{M_{22}}+$$
$$+\int_{S_{22}}\sum_Z CR(Q_{22},M_{22})\sigma_z(M_{22})\,ds_{M_{22}}-\int_{S_3}\Delta_Z ZC(Q_{22},M_3)\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,ds_{M_3}+$$
$$+\int_{S_3}\Delta_Z ZS(Q_{22},M_3)\sigma_{\varphi M_3}(M_3)ds_{M_3}+\int_{S_{42}}\Delta_Z ZS(Q_{22},M_{42})\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})ds_{M_{42}}+$$
$$+\int_{S_{42}}\sum_Z CR(Q_{22},M_{42})\sigma_z(M_{42})\,ds_{M_{42}}=-F^{Z}_{2Z}(Q_{22}),\;\; Q_{22}\in S_{22}. \tag{13}$$

В работе [2] третье ВИУ ВСИУ (1) преобразовано к пятому и шестому ИУ СкСИУ. В операторной форме эти уравнения имеют вид

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho_Q}(Q_3)-ZC_{31}\sigma_{\rho M}+ZS_{31}\sigma_{\varphi M}+CR_{32}\sigma_z+ZS_{32}\sigma_{\varphi M}+CR_{34}\sigma_Z+$$
$$+ZS_{34}\sigma_{\varphi M}=-F_{3\rho}(Q_3),\ \ Q_3\in S_3; \tag{14}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi_Q}(Q_3)-ZS_{31}\sigma_{\rho M}-ZC_{31}\sigma_{\varphi M}+SR_{32}\sigma_z-ZC_{32}\sigma_{\varphi M}+SR_{34}\sigma_Z-$$
$$-ZC_{34}\sigma_{\varphi M}=-F_{3\varphi}(Q_3),\ \ Q_3\in S_3. \tag{15}$$

Используя введенные в [1, 2] обозначения операторов, запишем ИУ (14) и (15) в развернутом виде:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_3}(Q_3,t)+\int_{S_2}ZS(Q_3,M_2)\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2}+$$
$$+\int_{S_2}CR(Q_3,M_2)\sigma_z(M_2)\,ds_{M_2}-\int_{S_1}ZC(Q_3,M_1)\sigma_{\rho M_1}(M_1)\,ds_{M_1}+$$
$$+\int_{S_1}ZS(Q_3,M_1)\sigma_{\varphi M_1}(M_1)\,ds_{M_1}+\int_{S_4}ZS(Q_3,M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,ds_{M_4}+$$
$$+\int_{S_4}CR(Q_3,M_4)\sigma_z(M_4)\,ds_{M_4}=-F_{3\rho}(Q_3),\ \ Q_3\in S_3; \tag{16}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_3}(Q_3,t)-\int_{S_2}ZC(Q_3,M_2)\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,ds_{M_2}+$$
$$+\int_{S_2}SR(Q_3,M_2)\sigma_z(M_2)\,ds_{M_2}-\int_{S_1}ZS(Q_3,M_1)\sigma_{\rho M_1}(M_1)\,ds_{M_1}-$$
$$-\int_{S_1}ZC(Q_3,M_1)\sigma_{\varphi M_1}(M_1)\,ds_{M_1}-\int_{S_4}ZC(Q_3,M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,ds_{M_4}+$$
$$+\int_{S_4}SR(Q_3,M_4)\sigma_z(M_4)\,ds_{M_4}=-F_{3\varphi}(Q_3),\ \ Q_3\in S_3. \tag{17}$$

Используя соотношения симметрии (7), преобразуем уравнения (16) и (17) с учетом симметрии по координате Z в плотностях источников СС магнитного поля:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_3}(Q_3)+\int_{S_{22}}\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})[ZS(Q_3,M_{22})-ZS(Q_3,M_{22Z})]\,ds_{M_{22}}+$$

$$+\int_{S_{22}} \sigma_z(M_{22})[CR(Q_3, M_{22}) + CR(Q_3, M_{22Z})]\, ds_{M_{22}} +$$

$$+\int_{S_3} \sigma_{\rho M_3}(M_3)[ZC(Q_3, M_{3Z})]\, ds_{M_3} + \int_{S_3} \sigma_{\varphi M_3}(M_3)[-ZS(Q_3, M_{3Z})]\, ds_{M_3} +$$

$$+\int_{S_{42}} \sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})[ZS(Q_3, M_{42}) - ZS(Q_3, M_{42Z})]\, ds_{M_{42}} +$$

$$+\int_{S_{42}} \sigma_z(M_{42})[CR(Q_3, M_{42}) + CR(Q_3, M_{42Z})]\, ds_{M_{42}} = -F^Z_{3\rho}(Q_3), \;\; Q_3 \in S_3; \quad (18)$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_3}(Q_3) - \int_{S_{22}} \sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})[ZC(Q_3, M_{22}) - ZC(Q_3, M_{22Z})]\, ds_{M_{22}} +$$

$$+\int_{S_{22}} \sigma_z(M_{22})[SR(Q_3, M_{22}) + SR(Q_3, M_{22Z})]\, ds_{M_{22}} +$$

$$+\int_{S_3} \sigma_{\rho M_3}(M_3)[ZS(Q_3, M_{3Z})]\, ds_{M_3} + \int_{S_3} \sigma_{\varphi M_3}(M_3)[ZC(Q_3, M_{3Z})]\, ds_{M_3} -$$

$$-\int_{S_{42}} \sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})[ZC(Q_3, M_{42}) - ZC(Q_3, M_{42Z})]\, ds_{M_{42}} +$$

$$+\int_{S_{42}} \sigma_z(M_{42})[SR(Q_3, M_{42}) + SR(Q_3, M_{42Z})]\, ds_{M_{42}} = -F^Z_{3\varphi}(Q_3), Q_3 \in S_3. \quad (19)$$

Здесь $F^Z_{3\rho}(Q_3)$ и $F^Z_{3\varphi}(Q_3)$ — преобразованные с учетом симметрии по координате Z в плотностях источников СС магнитного поля $F_{3\rho}(Q_3)$ и $F_{3\varphi}(Q_3)$.

Введем обозначение ядер уравнения (18):

$$\begin{gathered}
ZS(Q_3, M_{22}) - ZS(Q_3, M_{22Z}) = \Delta_Z ZS(Q_3, M_{22}),\\
CR(Q_3, M_{22}) + CR(Q_3, M_{22Z}) = \sum_Z CR(Q_3, M_{22}),\\
-ZC(Q_3, M_{3Z}) = \Delta_Z ZC(Q_3, M_3),\\
-ZS(Q_3, M_{3Z}) = \Delta_Z ZS(Q_3, M_3),\\
ZS(Q_3, M_{42}) - ZS(Q_3, M_{42Z}) = \Delta_Z ZS(Q_3, M_{42}),\\
CR(Q_3, M_{42}) + CR(Q_3, M_{42Z}) = \sum_Z CR(Q_3, M_{42}).
\end{gathered} \quad (20)$$

Используя (20), запишем уравнения (18) в следующем виде:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\rho Q_3}(Q_3)+\int\limits_{S_{22}}\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,\Delta_Z ZS\,(Q_3,M_{22})\,ds_{M_{22}}+$$

$$+\int\limits_{S_{22}}\sigma_z(M_{22})\sum_Z CR\,(Q_3,M_{22})\,ds_{M_{22}}-\int\limits_{S_3}\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,\Delta_Z ZC\,(Q_3,M_3)\,ds_{M_3}+$$

$$+\int\limits_{S_3}\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,\Delta_Z ZS\,(Q_3,M_3)\,ds_{M_3}+\int\limits_{S_{42}}\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})\,\Delta_Z ZS\,(Q_3,M_{42})\,ds_{M_{42}}+$$

$$+\int\limits_{S_{42}}\sigma_z(M_{42})\sum_Z CR\,(Q_3,M_{42})\,ds_{M_{42}}=-F^Z_{3\rho}(Q_3),\,Q_3\in S_3. \qquad (21)$$

Введем обозначение ядер уравнения (19):

$$\begin{gathered}
ZC\,(Q_3,M_{22})-ZC\,(Q_3,M_{22Z})=\Delta_Z ZC\,(Q_3,M_{22}),\\
SR\,(Q_3,M_{22})+SR\,(Q_3,M_{22Z})=\sum_Z SR\,(Q_3,M_{22}),\\
-ZS\,(Q_3,M_{3Z})=\Delta_Z ZS\,(Q_3,M_3),\\
-ZC\,(Q_3,M_{3Z})=\Delta_Z ZC\,(Q_3,M_3),\\
ZC\,(Q_3,M_{42})-ZC\,(Q_3,M_{42Z})=\Delta_Z ZC\,(Q_3,M_{42}),\\
SR\,(Q_3,M_{42})+SR\,(Q_3,M_{42Z})=\sum_Z SR\,(Q_3,M_{42Z})\,.
\end{gathered} \qquad (22)$$

Используя обозначения (22), запишем уравнение (19) в виде

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_3}(Q_3)-\int\limits_{S_{22}}\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,\Delta_Z ZC\,(Q_3,M_{22})\,ds_{M_{22}}+$$

$$+\int\limits_{S_{22}}\sigma_z(M_{22})\sum_Z SR\,(Q_3,M_{22})\,ds_{M_{22}}-\int\limits_{S_3}\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,\Delta_Z ZS\,(Q_3,M_3)\,ds_{M_3}-$$

$$-\int\limits_{S_3}\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\Delta_Z ZC\,(Q_3,M_3)\,ds_{M_3}-\int\limits_{S_{42}}\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})\,\Delta_Z ZC\,(Q_3,M_{42})\,ds_{M_{42}}+$$

$$+\int\limits_{S_{42}}\sigma_z(M_{42})\sum_Z SR\,(Q_3,M_{42Z})\,ds_{M_{42}}=-F^Z_{3\varphi}(Q_3),\quad Q_3\in S_3. \qquad (23)$$

В [2] четвертое ВИУ ВСИУ (1) преобразовано к седьмому и восьмому ИУ СкСИУ.В операторной форме эти уравнения имеют вид

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi_Q}(Q_4)+RS_{41}\sigma_{\rho M}+RC_{41}\sigma_{\varphi M}+RC_{42}\sigma_{\varphi M}+RS_{43}\sigma_{\rho M}+RC_{43}\sigma_{\varphi M}+$$

$$+RC_{44}\sigma_{\varphi M} = -F_{4\varphi}(Q_4), \quad Q_4 \in S_4; \tag{24}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_4) + ZC_{41}\sigma_{\rho M} - ZS_{41}\sigma_{\varphi M} - ZS_{42}\sigma_{\varphi M} - RC_{42}\sigma_z + ZC_{43}\sigma_{\rho M} -$$

$$-ZS_{43}\sigma_{\varphi M} - ZS_{44}\sigma_{\varphi M} - RC_{44}\sigma_z = -F_{4Z}(Q_4), \quad Q_4 \in S_4. \tag{25}$$

Используя введенные в [1, 2] обозначения операторов, запишем интегральные уравнения (24) и (25) в развернутом виде:

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q}(Q_4) + \int_{S_1} RS(Q_4, M_1)\sigma_{\rho M_1}(M_1)\,dS_{M_1} +$$

$$+\int_{S_1} RC(Q_4, M_1)\sigma_{\varphi M_1}(M_1)\,dS_{M_1} + \int_{S_2} RC(Q_4, M_2)\sigma_{\varphi M_2}(M_2)\,dS_{M_2} +$$

$$+\int_{S_3} RS(Q_4, M_3)\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,dS_{M_3} + \int_{S_3} RC(Q_4, M_3)\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,dS_{M_3} +$$

$$+\int_{S_4} RC(Q_4, M_4)\sigma_{\varphi M_4}(M_4)\,dS_{M_4} = -F_{4\varphi}(Q_4), \quad Q_4 \in S_4; \tag{26}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_4) + \int_{S_1} ZC(Q_4, M_1)\sigma_{\rho_{M_1}}(M_1)dS_{M_1} - \int_{S_1} ZS(Q_4, M_1)\sigma_{\varphi_{M_1}}(M_1)\,dS_{M_1} -$$

$$-\int_{S_2} ZS(Q_4, M_2)\sigma_{\varphi_{M_2}}(M_2)\,dS_{M_2} - \int_{S_2} RC(Q_4, M_2)\sigma_Z(M_2)\,dS_{M_2} +$$

$$+\int_{S_3} ZC(Q_4, M_3)\sigma_{\rho_{M_3}}(M_3)\,dS_{M_3} - \int_{S_3} ZS(Q_4, M_3)\sigma_{\varphi_{M_3}}(M_3)\,dS_{M_3} -$$

$$+\int_{S_4} ZS(Q_4, M_4)\sigma_{\varphi_{M_4}}(M_4)\,dS_{M_4} - \int_{S_4} RC(Q_4, M_4)\sigma_Z(M_4)\,dS_{M_4} =$$

$$= -F_{4z}(Q_4), \quad Q_4 \in S_4. \tag{27}$$

Используя соотношение симметрии (7), преобразуем уравнения (26) и (27) с учетом симметрии по координате Z в плотностях источников СС магнитного поля :

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_{42}}(Q_{42}) + \int_{S_{22}} \sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})[RC(Q_{42}, M_{22}) - RC(Q_{42}, M_{22Z})]\,dS_{M_{22}} +$$

$$+\int_{S_3} \sigma_{\rho M_3}(M_3)[RS(Q_{42}, M_3) - RS(Q_{42}, M_{3Z})]\,dS_{M_3} +$$

$$+\int_{S_3}\sigma_{\varphi M_3}(M_3)[RC(Q_{42},M_3)-RC(Q_{42},M_{3Z})]\,dS_{M_3}+$$

$$+\int_{S_{42}}\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})[RC(Q_{42},M_{42})-RC(Q_{42},M_{42Z})]\,dS_{M_{42}}=$$

$$=-F^{Z}_{4\varphi}(Q_{42}),\quad Q_{42}\in S_{42}; \tag{28}$$

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_{42})-\int_{S_{22}}\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})[ZS(Q_{42},M_{22})-ZS(Q_{42},M_{22Z})]\,dS_{M_{22}}-$$

$$-\int_{S_{22}}\sigma_z(M_{22})[RC(Q_{42},M_{22})+RC(Q_{42},M_{22Z})]\,dS_{M_{22}}+$$

$$+\int_{S_3}\sigma_{\rho M_3}(M_3)[ZC(Q_{42},M_3)-ZC(Q_{42},M_{3Z})]\,dS_{M_3}-$$

$$-\int_{S_3}\sigma_{\varphi M_3}(M_3)[ZS(Q_{42},M_3)-ZS(Q_{42},M_{3Z})]\,dS_{M_3}-$$

$$-\int_{S_{42}}\sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})[ZS(Q_{42},M_{42})-ZS(Q_{42},M_{42Z})]\,dS_{M_{42}}-$$

$$-\int_{S_{42}}\sigma_z(M_{42})[RC(Q_{42},M_{42})+RC(Q_{42},M_{42Z})]dS_{M_{42}}=-F^{Z}_{4Z}(Q_{42}),\ Q_{42}\in S_{42}. \tag{29}$$

Здесь $F^{Z}_{4\varphi}(Q_{42})$ и $F^{Z}_{4Z}(Q_{42})$ преобразованы с учетом симметрии по координате Z в плотностях источников СС магнитного поля $F_{4\varphi}(Q_4)$ и $F_{4Z}(Q_4)$.

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}RC(Q_{42},M_{22})-RC(Q_{42},M_{22Z})=\Delta_Z RC(Q_{42},M_{22}),\\ RS(Q_{42},M_3)-RS(Q_{42},M_{3Z})=\Delta_Z RS(Q_{42},M_3),\\ RC(Q_{42},M_3)-RC(Q_{42},M_{3Z})=\Delta_Z RC(Q_{42},M_3),\\ RC(Q_{42},M_{42})-RC(Q_{42},M_{42Z})]=\Delta_Z RC(Q_{42},M_{42}).\end{gathered} \tag{30}$$

Запишем уравнения (28), используя обозначения (30):

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_{\varphi Q_{42}}(Q_{42})+\int_{S_{22}}\sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,\Delta_Z RC(Q_{42},M_{22})\,dS_{M_{22}}+$$

$$+\int_{S_3}\sigma_{\rho M_3}(M_3)\,\Delta_Z RS(Q_{42},M_3)\,ds_{M_3}+\int_{S_3}\sigma_{\varphi M_3}(M_3)\,\Delta_Z RC(Q_{42},M_3)\,dS_{M_3}+$$

$$+\int_{S_{42}} \sigma_{\varphi M_4}(M_{42})\,\Delta_Z RC(Q_{42}, M_{42})\,dS_{M_{42}} = -F^Z_{4\varphi}(Q_{42}),\;\; Q_{42}\in S_{42}. \qquad (31)$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered}
ZS(Q_{42}, M_{22}) - ZS(Q_{42}, M_{22Z}) = \Delta_Z ZS(Q_{42}, M_{22}),\\
RC(Q_{42}, M_{22}) + RC(Q_{42}, M_{22Z}) = \sum_Z RC(Q_{42}, M_{22}),\\
ZC(Q_{42}, M_3) - ZC(Q_{42}, M_{3Z}) = \Delta_Z ZC(Q_{42}, M_3),\\
ZS(Q_{42}, M_3) - ZS(Q_{42}, M_{3Z}) = \Delta_Z ZS(Q_{42}, M_3),\\
ZS(Q_{42}, M_{42}) - ZS(Q_{42}, M_{42Z}) = \Delta_Z ZS(Q_{42}, M_{42}),\\
RC(Q_{42}, M_{42}) + RC(Q_{42}, M_{42Z}) = \sum_Z RC(Q_{42}, M_{42}).
\end{gathered} \qquad (32)$$

Запишем уравнения (29), используя обозначения (32):

$$\frac{2\pi}{\chi}\sigma_z(Q_{42}) - \int_{S_{22}} \sigma_{\varphi M_{22}}(M_{22})\,\Delta_Z ZS(Q_{42}, M_{22})\,dS_{M_{22}} -$$

$$-\int_{S_{22}} \sigma_z(M_{22})\sum_Z RC(Q_{42}, M_{22})\,dS_{M_{22}} + \int_{S_3} \sigma_{\rho M_3}(M_3)\,\Delta_Z ZC(Q_{42}, M_3)\,dS_{M_3} -$$

$$-\int_{S_3} \sigma_{\varphi M_3}(M_3)\Delta_Z ZS(Q_{42}, M_3)\,dS_{M_3} - \int_{S_{42}} \sigma_{\varphi M_{42}}(M_{42})\Delta_Z ZS(Q_{42}, M_{42})\,dS_{M_{42}} -$$

$$-\int_{S_{42}} \sigma_z(M_{42})\sum_Z RC(Q_{42}, M_{42})\,dS_{M_{42}} = -F^Z_{4Z}(Q_{42}), \quad Q_{42}\in S_{42}. \qquad (33)$$

Выводы

Скалярная СИУ относительно проекций векторов плотностей источников k-й СС магнитного поля статора ЭМП, полученная в [2], преобразована с учетом симметрии по координате Z в проекциях плотностей источников k-й СС магнитного поля статора. В результате получена новая СкСИУ (11), (13), (21), (23), (31), (33). В отличие от исходной СкСИУ, областью определения которой является вся поверхность магнитопровода, областью определения полученной СкСИУ является часть поверхности магнитопровода статора, лежащая выше координатной плоскости XOY. Полученная СкСИУ более низкого порядка (имеет шесть искомых функций). Это обстоятельство существенно сокращает объем вычислений, связанный с составлением матрицы аппроксимирующей алгебраической системы и ее решением.

The scalar system of integral equations (ScSIE) [1,2] will be transformed taking into account symmetries on *Z* coordinate in the projections of stator magnetic-field sources density *k* SC. The range of ScSIE definition, obtained after the indicated transformations, is part of stator magnetic core surface, lying higher than symmetry plane that is a *XOY* co-ordinate plane. This circumstance reduces considerably the calculations volume, related to matrix drafting of the approximating algebraic system and its decision, substantially.

1. *Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А.* Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода.I // Электрон. моделирование. — 2012. — **34**, № 1. — С. 48—51.
2. *Евдокимов В. Ф., Кучаев А. А., Петрушенко Е. И., Кучаев В. А.* Модель трехмерного магнитного поля статора цилиндрического электромагнитного перемешивателя с учетом распределения токов намагниченности по поверхности магнитопровода. II // Там же. — 2012. — **34**, № 2. — С. 51—75.

Поступила 18.09.12

ЕВДОКИМОВ Виктор Федорович, член-кор. НАН Украины, директор Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1963 г. окончил Харьковский политехнический ин-т. Область научных исследований — теория моделирования процессов и систем в энергетике, теория функционально-ориентированных компьютерных систем, анализ и синтез параллельных вычислительных методов и систем.

ПЕТРУШЕНКО Евгений Иванович, канд. техн. наук, ст. науч. сотр., зав. отделом моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 1960 г. окончил Новочеркасский политехнический ин-т, а в 1963 г. — Ростовский государственный университет. Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.

КУЧАЕВ Виталий Александрович, аспирант отдела моделирования задач электромагнитной гидродинамики Ин-та проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. В 2002 г. окончил Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический ин-т». Область научных исследований — моделирование электромагнитных полей.