УДК 681.51

Ю. А. Клевцов, канд. техн. наук
(Украина, 03150, **Киев**, тел. (044) 5290566, e-mail: kk123@ukr.net)

Моделирование многомерных объектов с распределенными параметрами

На основе спектральной теории нестационарных систем управления разработан алгоритм моделирования объектов, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных. Изложены правила, устанавливающие соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной областях. Введена передаточная функция многомерного объекта. Приведен пример применения метода.

На основі спектральної теорії нестаціонарних систем управління розроблено алгоритм моделювання об'єктів, описуваних системою диференціальних рівнянь у часткових похідних. Наведено правила, які встановлюють співвідношення між операціями у просторово-часовій та спектральній формах. Введено передавальну функцію багатовимірного об'єкту. Наведено приклад застосування методу.

Ключевые слова: спектральные характеристики, моделирование, передаточная функция, объекты с распределенными параметрами.

Многие физические системы, например в динамике жидкости, нельзя описать одним уравнением. Для описания таких объектов требуются системы связанных уравнений, в которые входят неизвестные функции, такие как давление, плотность, температура и их частные производные. Связи между этими функциями (величинами) представляются в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Метод моделирования таких объектов изложен в работе [1]. Обобщим полученные ранее результаты на связанные объекты, функции которых зависят от трех пространственных аргументов и временного аргумента. Задачу моделирования связанных (многомерных) объектов будем решать на основе спектральной теории нестационарных систем управления, в которой основные понятия и правила [2—6] обобщены на многомерные объекты с распределенными параметрами (ОРП).

Многомерные спектральные характеристики (СХ). Рассмотрим некоторую многомерную (n-мерную) функцию четырех аргументов, состоящую из n компонент,

$$\mathbf{q}(x,y,z,t)=\begin{bmatrix} q_1(x,y,z,t) \\ q_2(x,y,z,t) \\ \dots\dots\dots \\ q_n(x,y,z,t) \end{bmatrix},$$

где t — временной аргумент, изменяющийся в закрытом отрезке $[0,T]$ (T — конечное значение); x, y, z — пространственные аргументы, изменяющиеся в закрытых интервалах $0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$, $0 \le z \le L$. Если все компоненты $q_r(x,y,z,t)$, $r = 1, 2, \dots, n$, многомерной функции $\mathbf{q}(x,y,z,t)$ интегрируемы с квадратом

$$\int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^T [q_r(x,y,z,t)]^2\, dxdydzdt < \infty, \; r = 1,2,\dots,n,$$

то можно найти СХ этих компонент:

$$Q_{(r)ijkm} = \int_0^L \int_0^L \int_0^L \int_0^T \psi_i(x)\,\psi_j(y)\,\psi_k(z)\,\varphi_m(t)\, q_r(x,y,z,t)\, dtdxdydz, \tag{1}$$

где $\{\psi(x)\}, \{\psi(y)\}, \{\psi(z)\}, \{\varphi(t)\}$ — системы ортонормированных на отрезках $[0,L]$, $[0,T]$ базисных функций в пространстве L_2.

Каждая r-я СХ $Q_{(r)ijkm}$ является функцией четырех дискретных аргументов, i, j, k, m, и поэтому представляет собой пространственную матрицу четырех измерений. Пространственную матрицу $Q_{(r)ijkm}$ можно представить в виде матрицы столбца. Такое представление осуществляется посредством обхода сначала по индексу i, затем по индексу j и т.д. Совокупность СХ Q_r, представленных в виде блочной матрицы столбца, назовем многомерной СХ функции $\mathbf{q}(x,y,z,t)$:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} Q_{(1)ijkm} \\ Q_{(2)ijkm} \\ \dots\dots \\ Q_{(n)ijkm} \end{bmatrix}.$$

Введем обозначение оператора вычисления многомерной СХ функции $\mathbf{q}(x,y,z,t)$ в виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^4[\mathbf{q}(x,y,z,t)],$$

где индекс 4 указывает на то, что СХ определяются относительно четырех аргументов: x, y, z, t.

Формулу обращения СХ запишем в виде

$$q_r(x,y,z,t)=\sum_{ijkm} Q_{(r)ijkm}\psi_i(x)\psi_j(y)\psi_k(z)\varphi_m(t). \tag{2}$$

Для того чтобы установить соответствие между операциями в пространственно-временной и спектральной областях, необходимы правила преобразований (трансформаций). Все основные правила преобразований СХ функций нескольких аргументов [1, 3—6] обобщим на многомерный случай.

Правило дифференцирования многомерной функции по временному аргументу. Спектральную характеристику производной многомерной функции по временному аргументу t определяем согласно правилу

$$\mathbf{S}^4\left[\frac{\partial \mathbf{q}(x,y,z,t)}{\partial t}\right]=\mathbf{PQ}-\mathbf{H}_0, \tag{3}$$

где $\mathbf{P}$ — блочная диагональная матрица, в которой диагональные блоки $\overline{P}$ одинаковы и представляют собой пространственные матрицы СХ оператора дифференцирования по временному аргументу t; $\mathbf{H}_0$ — блочная матрица-столбец, учитывающая начальные условия.

Диагональные блоки определяются по формуле

$$\overline{P}=E\otimes E\otimes E\otimes P,$$

где E — единичная матрица; $\otimes$ — символ прямого произведения матриц; P — СХ оператора дифференцирования по аргументу t [2].

Матрица $\mathbf{H}_0$ формируется в следующем виде:

$$\mathbf{H}_0=\begin{bmatrix} S^4[q_1(x,y,z,0)\,\delta(t)] \\ S^4[q_2(x,y,z,0)\,\delta(t)] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ S^4[q_n(x,y,z,0)\,\delta(t)] \end{bmatrix},$$

где $q_r(x,y,z,0)$ — начальные значения компонент функции $\mathbf{q}$ при $t=0$.

Правило дифференцирования многомерной функции по пространственным аргументам. Спектральную характеристику второй производной многомерной функции $\mathbf{q}$ по аргументу x с учетом граничных условий первого рода определяем согласно правилу

$$\mathbf{S}^4\left[\frac{\partial^2 \mathbf{q}(x,y,z,t)}{\partial x^2}\right]=\mathbf{D}_{1x}\mathbf{Q}-\mathbf{G}_{1x}, \tag{4}$$

где $\mathbf{D}_{1x}$ — блочная диагональная матрица, в которой диагональные блоки $\overline{D}_{1x}$ одинаковы и являются СХ оператора дифференцирования второго порядка по аргументу x с учетом граничных условий первого рода; $\mathbf{G}_{1x}$ — блочная матрица-столбец, учитывающая граничные условия первого рода.

Диагональные блоки $\overline{D}_{1x}$ определяем по формуле

$$\overline{D}_{1x} = \mathsf{P}R \otimes E \otimes E \otimes E,$$

где P — СХ оператора дифференцирования, не учитывающая граничных условий [2]; R — СХ оператора дифференцирования, учитывающая граничные условия на левой и правой границах [6].

Блоки матрицы $\mathbf{G}_{1x}$ формируем в следующем виде:

$$G_{(r)1x} = \mathsf{P} \otimes E \otimes E \otimes E \,\{S^4[q_r(0, y, z, t)\,\delta(x)] - S^4[q_r(L, y, z, t)\,\delta(x-L)]\},$$

где $q_r(0, y, z, t)$, $q_r(L, y, z, t)$ — граничные условия компонент функции $\mathbf{q}(x, y, z, t)$ при $x = 0$, $x = L$. Если заданы граничные условия второго рода, то дифференцирование многомерной функции $\mathbf{q}(x, y, z, t)$ по аргументу x выполняем по правилу

$$\mathbf{S}^4\left[\frac{\partial^2 \mathbf{q}(x, y, z, t)}{\partial x^2}\right] = \mathbf{D}_{2x}\mathbf{Q} - \mathbf{G}_{2x},$$

где диагональные блоки матрицы $\mathbf{D}_{2x}$ определяются по формуле $\overline{D}_{2x} = R\mathsf{P} \otimes E \otimes E \otimes E$; G_{2x} — блочная матрица-столбец, учитывающая граничные условия второго рода. Каждый блок этой матрицы вычисляем по формуле

$$G_{(r)2x} = S^4\left[\frac{\partial q_r(0, y, z, t)}{\partial x}\,\delta(x)\right] - S^4\left[\frac{\partial q_r(L, y, z, t)}{\partial x}\,\delta(x-L)\right],$$

где $\dfrac{\partial q_r(0, y, z, t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial q_r(L, y, z, t)}{\partial x}$ — граничные условия компонент производной функции $\mathbf{q}(x, y, z, t)$ при $x = 0$, $x = L$.

Следует заметить, что блоки $\overline{D}_{1x}$ и $\overline{D}_{2x}$ отличаются порядком перемножаемых матриц P и R. Для учета граничных условий первого рода применяем произведение матриц $\mathsf{P}R$, а для учета граничных условий второго рода — произведение $R\mathsf{P}$. Методика учета граничных условий третьего рода описана в [6].

Спектральные характеристики второй производной многомерной функции $\mathbf{q}(x, y, z, t)$ по аргументам y и z с учетом граничных условий первого рода определяем по правилам

$$\mathbf{S}^4\left[\frac{\partial^2 \mathbf{q}(x, y, z, t)}{\partial y^2}\right] = \mathbf{D}_{1y}\mathbf{Q} - \mathbf{G}_{1y}, \tag{5}$$

 ISSN 0204–3572. Electronic Modeling. 2012. V. 34. № 5

$$\mathbf{S}^4\left[\frac{\partial^2 \mathbf{q}(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right] = \mathbf{D}_{1z}\mathbf{Q} - \mathbf{G}_{1z}. \tag{6}$$

Здесь диагональные блоки матриц $\mathbf{D}_{1y}$, $\mathbf{D}_{1z}$ определяются по формулам $\overline{D}_{1y} = E \otimes \mathsf{P} R \otimes E \otimes E$, $\overline{D}_{1z} = E \otimes E \otimes \mathsf{P} R \otimes E$, а блоки матриц $\mathbf{G}_{1y}$, $\mathbf{G}_{1z}$ — по формулам

$$G_{(r)1y} = E \otimes \mathsf{P} \otimes E \otimes E \{S^4[q_r(x,0,z,t)\delta(y)] - S^4[q_r(x,L,z,t)\delta(y-L)]\},$$

$$G_{(r)1z} = E \otimes E \otimes \mathsf{P} \otimes E \{S^4[q_r(x,y,0,t)\delta(z)] - S^4[q_r(x,y,L,t)\delta(z-L)]\},$$

где $q_r(x,0,z,t)$, $q_r(x,L,z,t)$, $q_r(x,y,0,t)$, $q_r(x,y,L,t)$ — граничные условия компонент функции $\mathbf{q}(x,y,z,t)$ при $y=0$, $y=L$, а также при $z=0$, $z=L$.

Для учета граничных условий второго рода при вычислении СХ второй производной многомерной функции $\mathbf{q}(x,y,z,t)$ по аргументам y и z необходимо воспользоваться правилами

$$\mathbf{S}^4\left[\frac{\partial^2 \mathbf{q}(x,y,z,t)}{\partial y^2}\right] = \mathbf{D}_{2y}\mathbf{Q} - \mathbf{G}_{2y},$$

$$\mathbf{S}^4\left[\frac{\partial^2 \mathbf{q}(x,y,z,t)}{\partial z^2}\right] = \mathbf{D}_{2z}\mathbf{Q} - \mathbf{G}_{2z}.$$

Здесь диагональные блоки матриц $\mathbf{D}_{2y}$ и $\mathbf{D}_{2z}$ определяются по формулам

$$\overline{D}_{2y} = E \otimes R\mathsf{P} \otimes E \otimes E, \quad \overline{D}_{2z} = E \otimes E \otimes R\mathsf{P} \otimes E,$$

а блоки матриц $\mathbf{G}_{2y}$, $\mathbf{G}_{2z}$ — по формулам

$$G_{(r)2y} = S^4\left[\frac{\partial q_r(x,0,z,t)}{\partial y}\delta(y)\right] - S^4\left[\frac{\partial q_r(x,L,z,t)}{\partial y}\delta(y-L)\right],$$

$$G_{(r)2z} = S^4\left[\frac{\partial q_r(x,y,0,t)}{\partial z}\delta(z)\right] - S^4\left[\frac{\partial q_r(x,y,L,t)}{\partial z}\delta(z-L)\right],$$

где $\dfrac{\partial q_r(x,0,z,t)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial q_r(x,L,z,t)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial q_r(x,y,0,t)}{\partial z}$, $\dfrac{\partial q_r(x,y,L,t)}{\partial z}$ — граничные условия компонент производных функции $\mathbf{q}(x,y,z,t)$ при $y=0$, $y=L$, а также при $z=0$, $z=L$.

Правило умножения многомерных функций нескольких аргументов. Пусть многомерная функция **q** задана произведением компонент

$$\mathbf{q}(x,y,z,t)=\begin{bmatrix} a_1(x,y,z,t)\,b_1(x,y,z,t) \\ a_2(x,y,z,t)\,b_2(x,y,z,t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n(x,y,z,t)\,b_n(x,y,z,t) \end{bmatrix}.$$

В спектральной области произведению компонент соответствует произведение блочных матриц:

$$\mathbf{S}^4[\mathbf{q}(x,y,z,t)]=\mathbf{AB}, \tag{7}$$

где **A** — блочная диагональная матрица, каждая диагональная клетка которой есть СХ множителя $a_r(x,y,z,t)$, вычисляемая по формуле

$$A_r=S^4[\delta(x-\xi)\,\delta(y-\varepsilon)\,\delta(z-\zeta)\,\delta(t-\tau)\,a_r(\xi,\varepsilon,\zeta,\tau)];$$

B — блочная матрица-столбец, каждая клетка которой есть СХ функций $b_r(x,y,z,t)$.

Если некоторая функция $a_r(x,y,z,t)=\text{const}$, то соответствующая клетка матрицы **B** равна единичной матрице, умноженной на const.

Данное правило необходимо для преобразования в спектральную область систем дифференциальных уравнений в частных производных с коэффициентами, зависящими от аргументов x, y, z, t.

Анализируя рассмотренные правила, можно сделать вывод о том, что операции дифференцирования многомерной функции нескольких аргументов в спектральной форме соответствуют операции умножения блочных матриц многомерных СХ. Приведенные правила необходимы для трансформации системы дифференциальных уравнений в частных производных в спектральную область.

Передаточная функция многомерных объектов с распределенными параметрами. Пусть некоторый ОРП описывается следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial q_1}{\partial t}+a_1\left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 q_1}{\partial z^2}\right)+b_{11}q_1+b_{12}q_2+\ldots+b_{1n}q_n=f_1, \\
\frac{\partial q_2}{\partial t}+a_2\left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2}\right)+b_{21}q_1+b_{22}q_2+\ldots+b_{2n}q_n=f_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{\partial q_n}{\partial t}+a_n\left(\frac{\partial^2 q_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 q_n}{\partial z^2}\right)+b_{n1}q_1+b_{n2}q_2+\ldots+b_{nn}q_n=f_n,
\end{gathered} \tag{8}$$

где $a_r = a_r(x, y, z, t)$, $b_{rs} = b_{rs}(x, y, z, t)$, $f_r = f_r(x, y, z, t)$, $r, s = 1, 2, ..., n$, $t > 0$, $0 \le x, y, z \le L$; все функции удовлетворяют необходимым условиям гладкости, функции $q_r(x, y, t)$ дважды дифференцируемы.

Систему уравнений (8) запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} - \mathbf{a}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial z^2}\right) + \mathbf{bq} = \mathbf{f}. \tag{9}$$

Система уравнений (9) должна удовлетворять начальным, $\mathbf{q}(x, y, z, 0) = \mathbf{q}_0(x, y, z)$, и граничным условиям, например первого рода, $\mathbf{q}(x, y, z, t)|_{\text{г}} = \mathbf{g}(x, y, z)$. Учитывая правила (3)—(7), уравнение (9) запишем в спектральной области:

$$\mathbf{PQ} - \mathbf{A}(\mathbf{D}_{1x}\mathbf{Q} + \mathbf{D}_{1y}\mathbf{Q} + \mathbf{D}_{1z}\mathbf{Q}) + \mathbf{BQ} = \boldsymbol{F} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{G}, \tag{10}$$

где $\mathbf{B}$ — блочная матрица, блоки которой являются СХ множителей $b_{rs}(x, y, z, t)$; $\mathbf{F}$ — блочная матрица-столбец СХ функций $f_r(x, y, z, t)$; $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{G}$ — блочные матрицы-столбцы СХ начальных и граничных условий.

Матричное уравнение (10) может быть решено относительно матрицы $\mathbf{Q}$ при условии, что матрица в квадратных скобках не особенная:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{P} - \boldsymbol{A}(\mathbf{D}_{1x} + \mathbf{D}_{1y} + \mathbf{D}_{1z}) + \mathbf{B}]^{-1}(\mathbf{F} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{G}). \tag{11}$$

Обозначив $\mathbf{W} = [\mathbf{P} - \mathbf{A}(\mathbf{D}_{1x} + \mathbf{D}_{1y} + \mathbf{D}_{1z}) + \mathbf{B}]^{-1}$, запишем (11) в следующем виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{W}(\mathbf{F} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{G}). \tag{12}$$

Рассмотрим многомерную функцию $\mathbf{f}$ как возмущающую функцию или как многомерное входное поле (сигнал), а многомерную функцию $\mathbf{q}$ как многомерное выходное поле (сигнал). Тогда из (12) следует, что многомерная матрица $\mathbf{W}$ связывает СХ многомерного входного поля (начальные и граничные условия соответствуют входу системы) и СХ многомерного выходного поля. Поэтому матрицу $\mathbf{W}$ можно назвать многомерной передаточной функцией системы (8). Значения выходного поля $\mathbf{q}$ находим по формуле (2).

Пример. Пусть некоторый объект описан системой двух уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} + b_{11}q_1 + b_{12}q_2 = f_1(x, y, t), \\ &\frac{\partial q_2}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2} + b_{21}q_1 + b_{22}q_2 = f_2(x, y, t), \end{aligned} \tag{13}$$

где $q_1 = q_1(x, y, t)$; $q_2 = q_2(x, y, t)$; $b_{11} = 2$; $b_{12} = b_{21} = b_{22} = 1$; $f_1 = \sin(x)\sin(y) + e^{-t}$; $f_2 = t\sin(x)\sin(y)$; $0 \le x, y, t \le 1$.

Для наглядности рассмотрена система двух уравнений и функции от двух пространственных аргументов. Система (13) удовлетворяет начальным условиям

$$q_1(x, y, 0) = 0,\ q_2(x, y, 0) = 1$$

и граничным —

$$q_1(0, y, t) = q_2(x, 0, t) = 0,$$

$$q_1(1, y, t) = t\sin(1)\sin(y),\ q_1(x, 1, t) = t\sin(x)\sin(1),$$

$$q_2(0, y, t) = q_2(x, 0, t) = q_2(1, y, t) = q_2(x, 1, t) = e^{-t}.$$

Введя обозначения

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

запишем систему (13) в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial y^2} + \mathbf{bq} = \mathbf{f}. \tag{14}$$

Используя правила (3)—(5), (7), уравнение (14) запишем в спектральной области:

$$\mathbf{PQ} + \mathbf{D}_{1x}\mathbf{Q} + \mathbf{D}_{1y}\mathbf{Q} + \mathbf{BQ} = \mathbf{F} + \mathbf{H}_0 + \mathbf{G}, \tag{15}$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{S}^3[\mathbf{q}(x, y, t)]$; $\mathbf{F} = \mathbf{S}^3[f(x, y, t)]$;

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} E \otimes E \otimes P & 0 \\ 0 & E \otimes E \otimes P \end{bmatrix};\ \mathbf{D}_{1x} = \begin{bmatrix} \mathrm{P}R \otimes E \otimes E & 0 \\ 0 & \mathrm{P}R \otimes E \otimes E \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{D}_{1y} = \begin{bmatrix} E \otimes \mathrm{P}R \otimes E & 0 \\ 0 & E \otimes \mathrm{P}R \otimes E \end{bmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2E \otimes E \otimes E & E \otimes E \otimes E \\ E \otimes E \otimes E & E \otimes E \otimes E \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ S^3[\delta(t)] \end{bmatrix};\ \mathbf{F} = \begin{bmatrix} S[\sin(x)]S[\sin(y)]S[1(t)] + S[1(x)]S[1(y)]S[e^{-t}] \\ S[\sin(x)]S[\sin(y)]S[t] \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathrm{P} \otimes E \otimes E\{S^3[q_1(1, y, t)\delta(x-1)]\} \\ \mathrm{P} \otimes E \otimes E\{S^3[q_2(0, y, t)\delta(x)] - S^3[q_2(1, y, t)\delta(x-1)]\} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} -E\otimes \mathrm{P}\otimes E\{S^3[q_1(x,1,t)\delta(y-1)]\} \\ E\otimes \mathrm{P}\otimes E\{S^3[q_2(x,0,t)\delta(y)]-S^3[q_2(x,1,t)\delta(y-1)]\} \end{bmatrix}.$$

Решим уравнение (15) относительно матрицы $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}=\mathbf{W}(\mathbf{F}+\mathbf{H}_0+\mathbf{G}),$$

где $\mathbf{W}=(\mathbf{P}+\mathbf{D}_{1x}+\mathbf{D}_{1y}+\mathbf{B})^{-1}$.

Значения искомой функции $q(x,y,t)$, найденные по формуле обращения (2), а также результаты точного решения $q_1(x,y,t)=t\sin(x)\sin(y)$ и $q_2(x,y,t)=e^{-t}$, приведены в таблице.

Для численных расчетов в качестве базисных функций по временному и пространственным аргументам будем использовать ортонормированные на [0, 1] полиномы Лежандра. Первые три базисные функции определим по формулам

$$\varphi_1(t)=1,\ \varphi_2(t)=\sqrt{3}(2t-1),\ \varphi_3(t)=\sqrt{5}(6t^2-6t+1).$$

Матрицы СХ операторов дифференцирования имеют следующие численные значения:

$$P=\begin{bmatrix} 1{,}000 & 1{,}732 & 2{,}236 \\ -1{,}732 & 3{,}000 & 3{,}873 \\ 2{,}236 & -3{,}873 & 5{,}000 \end{bmatrix},\ \mathsf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 3{,}464 & 0 \\ 0 & 0 & 7{,}746 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3{,}464 & 0 & 0 \\ 0 & -7{,}746 & 0 \end{bmatrix}.$$

Спектральные характеристики дельта-функции, функций начальных и граничных условий, а также возмущающих функций имеют следующие численные значения:

$$S[\delta(x)]=\begin{bmatrix} 1{,}000 \\ -1{,}732 \\ 2{,}236 \end{bmatrix},\ S[\delta(y-1)]=\begin{bmatrix} 1{,}000 \\ 1{,}732 \\ 2{,}236 \end{bmatrix},\ S[t]=\begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}289 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$S[\sin(x)]=\begin{bmatrix} 0{,}460 \\ 0{,}247 \\ -0{,}018 \end{bmatrix},\ S[e^{-t}]=\begin{bmatrix} 0{,}632 \\ -0{,}180 \\ 0{,}23 \end{bmatrix},\ S[\mathrm{const}]=\begin{bmatrix} \mathrm{const} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$q\,(x,\ y,\ t)$						
Аргумент			Численное значение		Точное решение	
t	x	y	q_1	q_2	q_1	q_2
0,00	0,00	0,00	– 0,001	0,996	0,000	1,000
0,00	0,00	0,50	0,000	0,996	0,000	1,000
0,00	0,00	1,00	– 0,001	0,996	0,000	1,000
0,00	0,50	0,00	0,000	0,996	0,000	1,000
0,00	0,50	0,50	0,000	0,996	0,000	1,000
0,00	0,50	1,00	– 0,001	0,996	0,000	1,000
0,00	1,00	0,00	– 0,001	0,996	0,000	1,000
0,00	1,00	0,50	– 0,001	0,996	0,000	1,000
0,00	1,00	1,00	– 0,001	0,996	0,000	1,000
0,50	0,00	0,00	– 0,002	0,606	0,000	0,607
0,50	0,00	0,50	– 0,003	0,606	0,000	0,607
0,50	0,00	1,00	– 0,006	0,606	0,000	0,607
0,50	0,50	0,00	– 0,003	0,606	0,000	0,607
0,50	0,50	0,50	0,116	0,606	0,115	0,607
0,50	0,50	1,00	0,203	0,606	0,202	0,607
0,50	1,00	0,00	– 0,006	0,606	0,000	0,607
0,50	1,00	0,50	0,203	0,606	0,202	0,607
0,50	1,00	1,00	0,356	0,606	0,354	0,607
1,00	0,00	0,00	– 0,005	0,374	0,000	0,368
1,00	0,00	0,50	– 0,005	0,374	0,000	0,368
1,00	0,00	1,00	– 0,013	0,374	0,000	0,368
1,00	0,50	0,00	– 0,005	0,374	0,000	0,368
1,00	0,50	0,50	0,232	0,374	0,230	0,368
1,00	0,50	1,00	0,406	0,374	0,403	0,368
1,00	1,00	0,00	– 0,013	0,374	0,000	0,368
1,00	1,00	0,50	0,406	0,374	0,403	0,368
1,00	1,00	1,00	0,712	0,374	0,708	0,368

Спектральную характеристику функции $f_2(x, y, t)$ находим как произведение СХ по каждому аргументу:

$$S\,[f_2(x, y, t)] = S\,[\sin(x)]\,S\,[\sin(y)]\,S\,[t]\,.$$

Подставляя численные значения матриц СХ в (15), находим

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0{,}106 & 0{,}057 & -0{,}005 \\ 0{,}057 & 0{,}031 & -0{,}002 \\ -0{,}005 & -0{,}002 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0{,}061 & 0{,}033 & -0{,}003 \\ 0{,}033 & 0{,}018 & -0{,}001 \\ -0{,}003 & -0{,}001 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0{,}632 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0{,}180 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0{,}024 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сечения пространственных матриц получены для $m = 0, 1, 2$ (разложение по базисным функциям $\varphi_m(t)$ из формулы (1)); индекс i изменяется по строкам, индекс j — по столбцам.

Все приведенные правила и формулы справедливы для бесконечномерных матриц. Однако численные расчеты выполняются над усеченными матрицами, что приводит к погрешности вычислений. Для оценки погрешности результата можно использовать метод, предложенный в работе [2]. Вычисления выполняются с выбранным размером СХ N. Затем значение N увеличивается на единицу и вновь выполняются вычисления. Если новый результат отличается от предыдущего в пределах заданной погрешности, то считается, что размер СХ найден. В рассмотренном примере размер СХ равен трем.

Выводы

Решению систем дифференциальных уравнений в частных производных в спектральной области соответствует решение алгебраических матричных уравнений. Предложенный метод позволяет использовать понятие передаточной функции, что упрощает решение задач автоматического управления объектами с распределенными параметрами.

Сравнение результатов моделирования с точным решением свидетельствует о том, что спектральная теория нестационарных систем управления может быть использована для моделирования связанных объектов с распределенными параметрами. Поскольку выполняются стандартные операции над матрицами СХ (сложение, перемножение, обращение), метод удобен в программировании.

Предложенный алгоритм не зависит от систем базисных функций, поэтому метод можно считать универсальным.

The algorithm of simulation of objects described by systems of differential partial equations has been designed on the basis of the spectral theory of non-stationary control systems. The rules setting the conformity between operations in time-space and spectral areas are stated. The transfer function of multidimensional object is entered. The example illustrates application of the method.

1. *Краскевич В. Е., Клевцов Ю. А.* Спектральный метод описания многомерных объектов с распределенными параметрами // Адаптивные САУ. Вып 11. — Киев : Техніка, 1983. С. 11—16.
2. *Солодовников В. В., Семенов В. В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М. : Наука, 1974. — 335 с.
3. *Краскевич В. Е., Клевцов Ю. А.* Спектральное представление линейных объектов с распределенными параметрами // Кибернетика на морском транспорте. — 1981. — Вып. 10. — С. 87— 94.
4. *Клевцов Ю. А.* Спектральное описание объектов с распределенными параметрами // Электрон. моделирование. — 1988. — **10**, № 3. — С. 27—31.
5. *Клевцов Ю. А.* Алгоритм решения СЛАУ в спектральных моделях объектов с распределенными параметрами // Там же. — 1998. — **20**, № 2. — С. 22—27.
6. *Клевцов Ю. А.* Алгоритм моделирования краевой задачи третьего рода // Там же. — 2001. — **23**, № 3. — С. 40—46.

Поступила 30.01.12

КЛЕВЦОВ Юрий Алексеевич, канд. техн. наук. В 1973 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — объекты с распределенными параметрами, спектральная теория нестационарных систем управления, задачи моделирования и идентификации.